Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática



Carlos Antonio Nascimento da Silva

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

PARAUAPEBAS/PA
2025

Carlos Antonio Nascimento da Silva

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Dissertação apresentada como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientadora: Prof.ª Drª Ana Kely Martins da Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

PARAUAPEBAS/PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

S586e Silva, Carlos Antonio Nascimento da
O ensino de análise combinatória no ensino médio por meio de atividades experimentais / Carlos Antonio Nascimento da Silva. — Parauapebas, 2025.
183 f.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Campus XXIII - Parauapebas, 2025.

1. Ensino médio. 2. Engenharia didática. 3. Ensino de matemática por atividades experimentais. 4. Ensino de análise combinatória. I. Título.

CDD 22.ed. 510.7

Elaborado por Priscila Melo CRB/2-1345

Carlos Antonio Nascimento da Silva

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva.

Data de aprovação: 16/09/2025

Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
ANA KELY MARTINS DA SILVA
Data: 16/09/2025 20:43:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____. Orientadora
Profa. Dra. ANA KELY MARTINS DA SILVA
Doutora em Educação – Pontifícia Universidade Católica/PUC-RJ
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
gov.br
PEDRO FRANCO DE SA
Data: 16/09/2025 21:52:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____. Examinador Interno
Prof. Dr. PEDRO FRANCO DE SÁ
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte /UFRN
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOAO CLAUDIO BRANDEMBERG QUARESMA
Data: 16/09/2025 16:30:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____. Examinador Externo
Prof. Dr. JOÃO CLÁUDIO BRANDEMBERG QUARESMA
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade Federal do Pará

Dedicatória

Dedico esse trabalho a todos que passam boa parcela de suas vidas buscando tornar o mundo melhor, igualitário e socialmente justo, especialmente aos que buscam esse feito por meio da produção de conhecimento científico produzido por pesquisas rigorosamente validadas. Também tendo a certeza que o conhecimento científico não é constituído, e nem construído, de verdades absolutas, mas de conclusões momentaneamente aceitas, sendo passíveis de reformulações, ou mesmo substituições por novos conhecimentos, produzidos ao longo da história. A essas pessoas todo meu respeito, admiração e gratidão.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, ser supremo, por ter segurado em minhas mãos e me sustentado nos momentos mais difíceis.

Em segundo lugar agradeço a minha mãe e meu pai (*in memoriam*) por terem me presenteado com a vida e por toda dedicação a mim concedida em todos os momentos que precisei. Lamento profundamente que meu pai não poderá estar presente fisicamente quando eu finalizar esse curso, sem dúvidas, ficaria muito orgulhoso.

Agradeço a minha amada companheira, amiga e esposa Raquel Alves, por todos os momentos de companheirismo e paciência. Ao meu sobrinho Misaque Sousa, por todos os momentos de troca de saberes, reflexões e sugestões. Aos meus irmãos, outros familiares, amigos, colegas e conhecidos que sempre acreditaram e vibraram com as minhas vitórias.

Agradeço a Prefeitura Municipal de Parauapebas pelo convênio firmado com a Universidade do Estado do Pará, e pela conceção da licença para que eu pudesse estudar e me especializar. Sem nenhuma sombra de dúvidas, sem esse apoio, a conclusão desse sonho seria muito mais difícil. Quando o servidor público se qualifica, quem ganha é toda a sociedade. Que essa atitude também sirva de exemplo para outras instituições e órgãos públicos.

Agradeço a todos os professores do curso por todos os conhecimentos partilhados durante o mesmo, em especial a professora Ana Kely Martins da Silva, minha orientadora, e ao professor Pedro Franco de Sá, coorientador, lhes agradeço por toda dedicação, empenho, paciência e tempo destinados a me orientar da melhor forma possível durante esse processo, em nome dos dois estendo meus mais sinceros agradecimentos aos demais.

Aos colegas do curso pelo companheirismo, pelos momentos de convívio, pelo incentivo, pelas experiências trocadas, pelas críticas, sugestões e partilha de materiais, vivemos momentos inesquecíveis juntos e tivemos grandes momentos de aprendizado. Ao colega Emanoel (*in memoriam*), desejo que esteja em paz e em descaço na glória celeste.

Aos meus alunos e futuros alunos, me dedicarei para que esse investimento a mim concedido não seja em vão.

A todos que direto ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho, meu MUITO OBRIGADO!!!

RESUMO

SILVA, Carlos Antonio Nascimento da. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio Por Meio de Atividades Experimentais**. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Parauapebas, 2024.

O presente trabalho apresentou uma dissertação sobre o ensino de Análise Combinatória no nível médio que buscou responder a seguinte questão de pesquisa: "Quais são os possíveis efeitos que a aplicação de uma Sequência Didática, fundamentada na resolução de problemas e no uso de atividades experimentais, podem ter sobre a compreensão e desempenho na resolução de questões sobre o assunto em estudantes do ensino médio?", o objetivo do estudo foi analisar os possíveis efeitos que a aplicação de uma Sequência Didática, fundamentada na resolução de problemas e no uso de atividades experimentais, poderiam ter sobre a compreensão e desempenho na resolução de questões sobre o assunto em estudantes do ensino médio. A metodologia de pesquisa que adotada foi Engenharia Didática. A experimentação ocorreu em uma turma do ensino médio da rede estadual na região urbana do município de Parauapebas no Pará. O referencial teórico adotado em nossa pesquisa fundamentou-se, entre outros, nos trabalhos de Almouloud e Silva (2012), Artigue (2018), Rosas (2018), Sá (2019), Sá (2022) e Sá, Mafra e Fossa (2022). Os resultados das Análises Prévias indicaram que segundo professores da cidade, os assuntos que os discentes apresentavam mais dificuldades envolviam resolução de situações problemas sobre Arranjo Simples e a resolução de situações problemas sobre Combinação Simples. A revisão de estudos sobre o assunto mostrou que muitos assuntos relacionados ao conteúdo em tela poderiam ser abordados de diferentes maneiras em sala aula, usando recursos diversos e adotando diferentes metodologias, havendo a possibilidade de apresentar melhores resultados no processo de ensino aprendizagem. Os resultados da experimentação indicaram que houve avanço significativo na compreensão, na motivação e na capacidade de resolver problemas sobre o assunto em tela. No final também elaboramos um produto educacional na forma de Sequência Didática para o ensino do referido assunto, o produto pode ser acessado livremente no link: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1133273.

Palavras-chave: ensino médio; engenharia didática; ensino de matemática por atividades experimentais; ensino de análise combinatória.

ABSTRACT

SILVA, Carlos Antonio Nascimento da. **Teaching Combinatorial Analysis in High School Through Experimental Activities**. Dissertation of the Postgraduate Program in Mathematics Teaching – State University of Pará, Parauapebas, 2024.

This work presents a research proposal on the teaching of Combinatorial Analysis at secondary level that seeks to answer the following research question: “What are the possible effects that the application of a Didactic Sequence, based on problem solving and the use of activities experiments, can have on the understanding and performance in solving questions on the subject in high school students?”, The objective of the study is to analyze the possible effects that the application of a Didactic Sequence, based on problem solving and the use of experimental activities, may have on the understanding and performance in solving questions on the subject in high school students. The research methodology that will be adopted is Didactic Engineering. The experiment is expected to be carried out in at least one high school class in the state network in the urban region of the municipality of Parauapebas in Pará. The theoretical framework adopted in our research is based, among others, on the work of Almouloud and Silva (2012), Artigue (2018), Rosas (2018), Sá (2019), Sá (2022) and Sá, Mafra e Fossa (2022). The results of the Preliminary Analysis indicate that according to teachers in the city, the subjects that students have the most difficulty with involve solving problem situations about Simple Arrangement and solving problem situations about Simple Combination. The review of studies on the subject shows that many issues related to the content on screen could be approached in different ways in the classroom, using different resources and adopting different methodologies, with the possibility of presenting better results in the teaching-learning process. Finally, we also developed an educational product in the form of a Didactic Sequence for teaching the aforementioned subject; the product can be freely accessed at the following link: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1133273.

Keywords: high school; didactic engineering; teaching mathematics through experimental activities; teaching combinatorial analysis.

Lista de Quadros

Quadro 1: Lista dos livros didáticos analisado.....31
Quadro 2: Questões classificadas no nível 1 da Taxonomia de Bloom.....32
Quadro 3: Questões classificadas no nível 2 da Taxonomia de Bloom.....33
Quadro 4: Questões classificadas no nível 3 da Taxonomia de Bloom.....34
Quadro 5: Questões classificadas no nível 4 da Taxonomia de Bloom.....34
Quadro 6: Questões classificadas no nível 5 da Taxonomia de Bloom.....35
Quadro 7: Questões classificadas no nível 6 da Taxonomia de Bloom.....36
Quadro 8: Questões de contexto matemático.....37
Quadro 9: Questões de contexto não matemático.....37
Quadro 10: Questões de múltipla escolha nas obras.....39
Quadro 11: Questões que permitem métodos diversos na resolução.....40
Quadro 12: Questões com linguagem imperativa no enunciado.....40
Quadro 13: Questões com linguagem não imperativa no enunciado.....41
Quadro 14: Misconceptions no Estudo de Análise Combinatória.....51
Quadro 15: Organização das atividades de ensino.....75
Quadro 16: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 1.....91
Quadro 17: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 2.....92
Quadro 18: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 3.....93
Quadro 19: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 4.....94
Quadro 20: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 5.....95
Quadro 21: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 6.....96
Quadro 22: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 7.....97
Quadro 23: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 8.....98
Quadro 24: Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 9.....99
Quadro 25: Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 1.....105

Quadro 26: Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 2.....106
Quadro 27: Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 3.....107
Quadro 28: Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 4.....108
Quadro 29: Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 5.....110
Quadro 30: Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 6.....111
Quadro 31: Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 7.....112
Quadro 32: Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 8.....113
Quadro 33: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 1.....119
Quadro 34: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 2.....120
Quadro 35: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 3.....121
Quadro 36: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 4.....122
Quadro 37: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 5.....123
Quadro 38: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 6.....124
Quadro 39: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 7.....125
Quadro 40: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 8.....126
Quadro 41: Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 9.....127
Quadro 42: Transcrição do quadro da quarta atividade preenchido pelo Grupo 1.....131
Quadro 43: Transcrição do quadro da quarta atividade preenchido pelo Grupo 2.....131

Quadro 44: Transcrição do quadro da quarta atividade preenchido pelo Grupo 3.....132
Quadro 45: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 1.....135
Quadro 46: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 2.....136
Quadro 47: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 3.....137
Quadro 48: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 4.....138
Quadro 49: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 5.....139
Quadro 50: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 6.....140
Quadro 51: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 7.....141
Quadro 52: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 8.....142
Quadro 53: Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 9.....144
Quadro 54: Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 1.....149
Quadro 55: Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 2.....150
Quadro 56: Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 3.....151
Quadro 57: Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 4.....152
Quadro 58: Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 5.....153
Quadro 59: Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 6.....154
Quadro 60: Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 7.....155
Quadro 61: Quadro a ser preenchido na atividade sobre conceituação de permutação circular.....159

Quadro 62: Quadro a ser preenchido na atividade sobre cálculo de permutação circular.....161
Quadro 63: Permutação dos elementos.....162
Quadro 64: Transcrição do quadro da oitava atividade preenchido pelo Grupo 1.....163
Quadro 65: Transcrição do quadro da oitava atividade preenchido pelo Grupo 2.....164
Quadro 66: Transcrição do quadro da oitava atividade preenchido pelo Grupo 3.....165
Quadro 67: Percentual de participação por aluno nas atividades.....169
Quadro 68: Percentual de participação por atividades.....169
Quadro 69: Frequência dos discentes por aula.....170
Quadro 70: Desempenho por questões nos testes.....171
Quadro 71: Desempenho nos testes por aluno.....174

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....01
1. ENGENHARIA DIDÁTICA.....05
1.1 ENGENHARIA DIDÁTICA E DESIGNER.....09
2. ANÁLISES PRÉVIAS.....10
2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS.....10
2.1.1 Egito e Grécia.....11
2.1.2 China e Índia.....14
2.1.3 Quadrados mágicos.....15
2.1.4 Probabilidade.....18
2.2 ASPECTOS MATEMÁTICOS.....20
2.2.1 Princípio Fundamental da Contagem.....21
2.2.2 Permutação Simples.....22
2.2.3 Fatorial.....22
2.2.4 Permutação Circular.....23
2.2.5 Arranjo Simples.....23
2.2.6 Combinação Simples.....23
2.3 ASPECTOS CURRICULARES.....24
2.3.1 Análise Combinatória nos Documentos Oficiais.....26
2.4 ANÁLISE DE QUESTÕES PRESENTES EM LIVROS DIDÁTICOS.....27
2.4.1 Metodologia.....30
2.4.2 Resultados e Análises.....31
2.4.3 Considerações Sobre o Trabalho.....42
2.5 CONSULTA A DOCENTES.....42
2.5.1 Perfil dos Docentes.....43
2.5.2 Dificuldades dos Alunos Sob a Óptica dos Professores.....50
2.6 MISCONCEPTIONS NO ESTUDO DO ASSUNTO ANÁLISE COMBINATÓRIA.....50
3. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORE.....52
3.1 PESQUISAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA.....53
3.2 PESQUISAS SOBRE O USO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ÂMBITO DA UEPA.....55
3.3 ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS.....57
3.3.1 Considerações Teóricas Sobre o Ensino de Matemática Por Atividades Experimentais.....58

3.3.2 Descrição Resumida dos Momentos da Aula Conduzida na Perspectiva de Atividades Experimentais.....60
3.4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....62
3.5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA.....68
3.5.1 Termo de Autorização do Responsável Pela Unidade Escolar, Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e Questionário Socioeducacional.....70
3.5.2 Pré-Teste e Pós-Teste.....71
3.5.2.1 *Análise a Priori das Questões do Pré-Teste*.....73
3.5.2.2 *Análise a Priori das Questões do Pós-Teste*.....73
4. EXPERIMENTAÇÃO.....73
4.1 ENCONTRO DO DIA 30/04/2024.....77
4.1.1 Perfil dos Alunos.....78
4.2 ENCONTRO DO DIA 02/05/2024.....89
4.2.1 Análise das Conclusões dos Discentes Sobre a Atividade 1.....100
4.3 ENCONTRO DO DIA 14/05/2024.....104
4.3.1 Análise das Observações dos Discentes Sobre a Atividade 2.....115
4.4 ENCONTRO DO DIA 28/05/2024.....118
4.4.1 Análise das Observações dos Discentes Sobre a Atividade 3.....128
4.4.2 Segunda Atividade do dia 28/05/2024 (Atividade 4).....130
4.5 ENCONTRO DO DIA 11/06/2024.....133
4.5.1 Análise das Conclusões Sobre a Atividade 5.....145
4.6 ENCONTRO DO DIA 13/06/2024.....147
4.6.1 Análise das Conclusões Sobre a Atividade 6.....156
4.7 ENCONTRO DO DIA 20/06/2024.....158
4.7.1 Análise das Observações Sobre a Atividade 7.....159
4.7.2 Segunda Atividade do dia 20/06/2024 (Atividade 8).....161
4.8 ENCONTRO DO DIA 25/06/2024.....167
4.9 CONSIDERAÇÕES ACERCA DA EXPERIMENTAÇÃO.....167
5. ANÁLISE A POSTERIORE E VALIDAÇÃO.....169
5.1 FREQUÊNCIA DOS ALUNOS NO EXPERIMENTO.....169
5.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS TESTES POR QUESTÃO.....171
5.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS TESTES POR ALUNO.....173
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....176
REFERÊNCIAS.....179
ANEXOS.....183

INTRODUÇÃO

Dados recentes da Secretaria de Estado de Educação do Pará apresentados durante a Semana de Planejamento Pedagógico 2023, que ocorreu entre os dias 06 a 10 de fevereiro, mostram que 29,5% das pessoas de 18 a 24 anos, não trabalham e nem estudam, esses números acendem um alerta sobre os quais podemos fazer algumas reflexões. Em primeiro lugar podemos questionar se esses jovens não trabalham e não estudam, apenas? Ou não trabalham, não estudam e nem se formaram? Também podemos questionar sobre quais motivos essas pessoas estão fora do mercado de trabalho.

Outro dado apresentado durante a Semana de Planejamento que também traz bastante preocupação, mostra que 99% dos alunos da 3ª série do ensino médio estão nos níveis de proficiência abaixo do básico ou básico**,** na disciplina Matemática, de acordo com o Sistema Paraense de Avaliação da Educação (SisPAE).

Nesse contexto é emergente refletirmos sobre esses números e sobre os fatores que podem estar relacionados a esse baixíssimo desempenho dos estudantes na disciplina durante a etapa final do ensino médio, bem como devemos buscar alternativas para tornar o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina mais satisfatório e os conteúdos relacionados mais atraentes para os discentes.

As motivações que nos levaram a pesquisar e escrever sobre essa temática têm três origens principais, a primeira, de caráter pessoal, está relacionada ao contato que tivemos durante anos de estudos, como alunos, no ensino básico e durante a graduação, onde despertamos a curiosidade, o interesse e a motivação em aprender mais sobre esse assunto.

A segunda, de caráter profissional, veio das experiências que tivemos lecionando a disciplina Matemática atuando a mais 10 anos no ensino básico, onde, podemos notar inúmeras dificuldades dos alunos ao resolverem problemas de conteúdos da disciplina, particularmente, envolvendo a Análise Combinatória, dificuldades essas principalmente relacionadas a erros de interpretação no processo de resolução dos problemas, dificuldade em realizar os cálculos e a não compreensão dos conceitos.

Com relação as dificuldades dos alunos, as mesmas situações que percebemos, também foram apontadas por alguns professores em uma pesquisa realizada por nós em maio de 2022, a investigação foi efetivada no decorrer da

disciplina Currículo e Avaliação da Aprendizagem em Matemática, ministrada pelas professoras Dra. Ana Kelly Martins e Dra. Maria de Lourdes, durante o curso de mestrado. 30 professores que atuam no estado do Pará participaram da pesquisa.

Como aspecto motivacional, em terceiro lugar, destacamos a importância que esse assunto tem em diversos outros ramos do conhecimento e na própria Matemática, com diferentes aplicações práticas, como nos jogos, jogos de azar, problemas de contagem e problemas combinatórios. Além do que, associado a probabilidade e a estatística, podem ser tornar um poderoso instrumento de previsão de extrema importância para ramos como a saúde e a meteorologia, por exemplo.

Nesse sentido, buscamos investigar sobre a seguinte questão: “Quais são os possíveis efeitos que a aplicação de uma Sequência Didática, fundamentada na resolução de problemas e no uso de atividades experimentais, podem ter sobre a compreensão e desempenho na resolução de questões sobre o assunto em estudantes do ensino médio?”

Com intuito de buscar respostas para essa questão, a realização da pesquisa, produção e análise dos resultados, teve o seguinte objetivo geral: analisar os possíveis efeitos que a aplicação de uma Sequência Didática, fundamentada na resolução de problemas e no uso de atividades experimentais, podem ter sobre a compreensão e desempenho na resolução de questões sobre o assunto em estudantes do ensino médio.

Nossos objetivos específicos na concretização desse trabalho, foram:

- Elaboramos uma Sequência Didática para o ensino de Análise Combinatória no ensino médio, fundamentada na resolução de problemas e no uso de atividades experimentais;
- Investigamos a eficiência da implementação da Sequência Didática no desenvolvimento de habilidades dos alunos relacionadas à resolução de problemas de Análise Combinatória, por meio da aferição de seu desempenho antes e após a implementação;
- Analisamos o nível de engajamento, as atitudes e motivações dos alunos durante o processo de aprendizagem, buscando identificar e compreender suas percepções em relação ao aprendizado de Análise Combinatória a partir da sequência implementada.

Nossa hipótese de pesquisa é que o desenvolvimento da Sequência Didática baseada na resolução de problemas e no uso de atividades experimentais, poderá trazer progressos significativos para o desenvolvimento intelectual dos discentes

com relação ao conteúdo Análise Combinatória. As atividades de conceituação e de redescoberta propostas, poderão permitir uma maior aproximação e maior engajamento dos discentes com os conteúdos, fazendo com que os mesmos, por si só, tenham a oportunidade de perceber as regularidades e padrões presentes, dessa maneira aproximando as atividades realizadas em sala de aula com o mundo acadêmico das pesquisas, onde a percepção de regularidades, de padrões e de relações fazem parte dos processos investigativos.

Como metodologia de pesquisa adotamos a Engenharia Didática, sistematizada por Michelle Artigue, e que tem se destacado como uma metodologia promissora para a condução de investigações na área da Educação Matemática. Basicamente essa metodologia baseia-se nas seguintes etapas: Análises Prévias, Concepção e Análise a Priore, Experimentação e Análise a Posteriore e Validação.

O trabalho está estruturado da seguinte maneira:

Seção 1: Fazemos uma breve introdução e fundamentação teórica sobre a Engenharia Didática, escrevendo sobre sua história, alguns trabalhos sobre o uso dessa metodologia em pesquisas na área da Educação Matemática e apresentamos brevemente sobre suas fases.

Seção 2: Nas análises prévias escrevemos sobre a história da Análise Combinatória, os aspectos matemáticos do tema, os aspectos curriculares, apresentamos os resultados de uma pesquisa onde investigamos como questões relacionadas a esse tema estão presentes em livros didáticos, apresentamos os resultados de uma investigação realizada com alguns docentes, no estado do Pará, sobre as dificuldades dos discentes ao estudarem o assunto Análise Combinatória e escrevemos sobre algumas misconceptions no estudo desse assunto.

Seção 3: Nessa seção escrevemos a concepção e análise a priore da pesquisa. Assim, escrevemos uma pequena introdução teórica sobre o ensino de matemática por meio de Atividades Experimentais. Com base na bibliografia consultada escrevemos sobre atividades de conceituação, de redescoberta**,** de demonstração e experimental. Apresentamos resumidamente os resultados de duas pesquisas realizadas sobre esse tema, e que fizeram uso de Atividades Experimentais, dentro do programa. Apresentamos um pequeno resumo sobre a resolução de problemas em aulas de matemática e apresentamos a Sequência Didática que será adotada em sala de aula.

Seção 4: Nessa seção escreveremos sobre a experimentação e a execução da Sequência Didática na escola. Apresentaremos um relatório sobre cada

encontro ocorrido na sala de aula, sistematizaremos os resultados do questionário socioeconômico e detalharemos sobre o panorama do contexto da pesquisa.

Seção 5: Seção destinada para a análise a posterio

re e validação da Sequência Didática com base nas informações coletadas e sistematizadas durante a experimentação.

Seção 6: Nessa seção apresentaremos os resultados finais e conclusões da pesquisa.

Essas seções encerram as primeiras duas fases da Engenharia Didática, e por meio delas esperamos estar suficientemente munidos de informações para a condução do trabalho em sala de aula. Em seguida faremos a experimentação, sistematização e análise dos resultados alcançados, que posteriormente escreveremos aqui e também irão compor essa dissertação.

1. ENGENHARIA DIDÁTICA

Nessa seção faremos uma breve introdução sobre a Engenharia Didática, metodologia de pesquisa que será utilizada nesse trabalho. Originada na década de 70 na França e posteriormente sistematizada por Michèlle Artigue, essa metodologia tem ganhado espaço no mundo acadêmico, particularmente em pesquisas na área da Educação Matemática.

Historicamente, com o aumento das discussões e ampliação das pesquisas na área da Educação Matemática emergiu a necessidade do desenvolvimento de métodos de investigação que fossem mais aceitáveis e que atendessem, de maneira mais eficiente e assertiva, as particularidades dessa área em expansão. Sobretudo porque as técnicas e métodos até então vigentes, isoladamente, não captavam, com efetividade, muitos fenômenos que ocorriam em sala de aula, deixando muitas variáveis importantes de lado.

Nesse sentido, Lopes e Sá (2021), propõe uma pesquisa bibliográfica, cujo objetivo foi:

> Diante disso, foi proposto realizar uma pesquisa bibliográfica cujo objetivo foi discutir a Engenharia Didática como um método de pesquisa acadêmica e profissional. Pois, as muitas técnicas tradicionais de pesquisa como entrevista, aplicação de questionário, observação, análise de livros, análise documental, análise do discurso, análise de conteúdo e análise estatística, entre outras, isoladamente não conseguem estudar os fenômenos acontecidos em sala de aula que estão relacionados com procedimentos didáticos.
> (Lopes e Sá, 2021, p. 3)

Segundo Burkhardt e Schoenfeld (apud Artigue, 2018) as pesquisas em Educação Matemática e na Educação de um modo geral, raramente produzem progressos ou avanços substanciais e práticos, e, portanto, a partir dessas constatações, propõem uma pesquisa que qualificam como Pesquisa de Engenharia, também com o intuito de melhorar a prática.

As intervenções educativas são elaboradas - ou pelo menos almeja-se que fossem - sobre uma base teórica explícita, o objetivo da intervenção é refinar a teoria. Dados colhidos antes, durante e após as intervenções, servem para testá-la, orientam a revisão a partir da observância das fraquezas e pontos fortes, assim, possibilitando seu refinamento. Ressaltamos também a importância dessas pesquisas para a tomada de decisões e para a formulação de Políticas Públicas.

Para Lopes e Sá (2021) o objetivo de Michèlle Artigue quando propôs a Engenharia Didática, foi aproximar a prática do cotidiano escolar com o conhecimento científico. A Engenharia Didática carrega também em seu cerne a

ambição de orientar o trabalho pedagógico, melhorar os resultados práticos do processo educativo e está entrelaçada em uma base teórica explícita.

Segundo Artigue (2018) desde a concepção da Educação Matemática como campo científico ouve preocupação em desenvolver metodologias de pesquisa que fossem mais facilmente reconhecidas como científicas. Nesse sentindo, a Engenharia Didática é tida por muitos pesquisadores em Educação Matemática tanto como Método de Ensino, quanto como um Método Privilegiado de Pesquisa.

De acordo Artigue (2018) a Engenharia Didática tem suas origens nos anos 70, na França. Nesse período diversos trabalhos foram desenvolvidos no ambiente do Instituto de Pesquisa Sobre o Ensino de Matemática – IREM e no Instituto Nacional da Pesquisa Pedagógica – INRP, nesses trabalhos, mesmo não existindo ainda uma organização formal, os trabalhos desenvolvidos apresentavam características do que posteriormente denominou-se Engenharia Didática.

Ainda segundo Artigue (2018) a partir dos anos 80, mais precisamente em 82, durante a 2ª Escola de Verão da Didática, na cidade de Orleans, na França, com cursos ministrados por Chevarlad, Brousseau e a exposição de outros wokshops conexos, levantou-se a primeira institucionalização sobre a Engenharia Didática, destacando-se duas teorias de grande amplitude sobre a extensão dos números inteiros.

Durante a escola de verão destacaram-se duas teorias: Brousseau com a Teoria das Situações Didáticas e Regina Douady com a Dialética Ferramenta Objeto, em diversos pontos dessas duas visões, fazendo paralelos, podemos observar muitos pontos de convergência entre a Engenharia Didática proposta posteriormente por Michèle Artigue. Essas duas visões carregam, entre outros, os seguintes pontos comuns: forte sensibilidade epistemológica, controlar e otimizar as trajetórias de aprendizagens dos alunos, porém, organizaram caminhos diferentes para a progressão dos saberes.

Durante a Escola de Verão da Didática, no ano de 1989, na Universidade Paris Diderot – Paris 7, na cidade de Paris, na França, com cursos ministrados por Michèle Artigue, ocorreu uma segunda institucionalização da Engenharia Didática. Nesses cursos apresentou-se a Engenharia Didática como metodologia privilegiada de pesquisa presente na cultura didática francesa. Como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática atua na concepção, na realização, na observação e na análise de práticas de ensino.

Para Artigue (2018) os fundamentos da Engenharia Didática carregam a ambição científica e da ação racional sobre os sistemas de ensino e pedagógicos. Ela afirma que o conhecimento científico não pode vir simplesmente da observação e identificação de fenômenos, o conhecimento se torna ciência quando é capaz de também produzir fenômenos didáticos.

Em um artigo de Almouloud e Silva (2012), os mesmos apresentam estudos sobre a evolução e usos da noção de Engenharia Didática expostos na Escola de Verão de Didática da Matemática, realizada em 2009 em Clermond-Ferrand, França. Ao analisar as pesquisas realizadas, em síntese, mostram que, ora essa metodologia é vista como metodologia de pesquisa científica, ora uma metodologia envolvendo vários processos e procedimentos para a formação profissional e/ou a elaboração de objetos de aprendizagem.

Segundo Chevallard (*apud* Almouloud e Silva, 2012)

> [...] O autor assevera que, em um caso, a engenharia didática está a serviço da pesquisa em didática, cujas necessidades impulsionam o desenvolvimento; no outro, a investigação em didática se coloca a serviço da engenharia didática, ela mesma a serviço de uma vontade diversificada de desenvolvimento institucional. [...]
> Chevallard (*apud* Almouloud e Silva, 2012, p. 25)

Lopes, Palma e Sá (2018) realizaram uma investigação com o objetivo de verificar as características dos trabalhos de pesquisas apresentados entre os anos 2014 e 2016, no encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM) que fazem uso da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, segundo esses autores, a análise dos dados indicou um panorama quantitativo sobre a utilização da Engenharia Didática como metodologia, e qualitativo sobre com quais finalidades se estuda fazendo uso dessa metodologia.

Lopes e Sá (2021) com o objetivo de discutir a Engenharia Didática como um método de pesquisa profissional e acadêmica, realizaram uma pesquisa bibliográfica. Com base no aporte teórico consultado, esses autores estabeleceram que a Engenharia Didática aproxima a escola da academia, pois, por meio da sua utilização, é possível validar pela prática do professor em ambiente escolar, as teorias concebidas na academia.

Tendo como fundamento diversos trabalhos desenvolvidos e publicados sobre Educação Matemática, Didática da Matemática e Engenharia Didática, Lopes e Sá (2021), confirmam e reforçam a importância da inserção da Engenharia Didática como método de pesquisa na Educação Matemática. Particularmente, sua importância na concepção, na realização, na observação e na análise de práticas de

ensino. Além disso, segundo esses autores, ela também se preocupa com o registro de estudos realizados sobre o objeto em foco e pela validação.

Chevarlad (apud Artigue, 2018) afirma que as pesquisas em Educação Matemática devem estudar o funcionamento de um sistema, não somente o funcionamento de um aluno, devendo privilegiar metodologias de pesquisa em que esses sistemas estejam presentes. Chevarlad sugere ações que serão levadas para os sistemas de ensino e ações que serão levadas para a necessidade da pesquisa.

Segundo Lopes e Sá (2021) por meio da pesquisa podemos constatar ou identificar as informações utilizadas na produção de algo, e o método de realização da pesquisa pode variar conforme o enquadramento das informações e a finalidade da pesquisa. Sobre o método esses autores afirmam:

> O método de pesquisa é o caminho a ser percorrido pelo investigador para a geração de conhecimentos acerca do objeto a ser estudado, em que consiste em ser um conceito mais amplo do que um conjunto de processos e procedimentos que se restringe à utilização das técnicas e instrumentos de pesquisa, pois também é composto por reflexões teóricas que são fundamentais no processo.
> (Lopes e Sá, 2021, p. 2)

A constatação que a multiplicidade dos fenômenos que ocorrem nas salas de aulas não podem ser estudados completamente pelas técnicas tradicionais de pesquisas, isoladamente, reforçam a importância da Engenharia Didática como método de pesquisa acadêmica e profissional, não só para a Educação Matemática, mas, também, para outras áreas do conhecimento científico.

Muitos são os argumentos favoráveis à inserção da Engenharia Didática como método de ensino e de pesquisa na Educação Matemática e seu uso já é uma realidade estando presente nos trabalhos de muitos pesquisadores dessa área do conhecimento. Entre os principais argumentos favoráveis e convergentes entre os diversos pontos de vista, está o que afirma que a Engenharia Didática aproxima os trabalhos desenvolvidos na academia com o trabalho do professor em sala de aula, assim, apresentando melhores resultados práticos para esses conhecimentos produzidos.

Os trabalhos desenvolvidos em que se usa a Engenharia Didática como método de pesquisa, passam, necessariamente, por algumas fases, de acordo com Lopes e Sá (2021), as fases são: 1) análises prévias; 2) concepção e análise a *priore*; c) experimentação; e 4) análise a *posteriore* e validação.

1. *Análises prévias ou preliminares:* nessa fase é realizado um estudo epistemológico sobre o tema a ser investigado; nessa etapa, busca-se também,

entender as dificuldade e potencialidade dos discentes com relação ao objeto de investigação; é realizado um levantamento, considerações sobre os conhecimentos e o quadro teórico didático geral do assunto em estudo.

2. *Concepção e análise a priori:* tendo como base as análises prévias, o pesquisador, destaca certo número de variáveis, denominadas, variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas), sobre as quais o ensino poderá atuar e que o investigador considera pertinentes. Segundo Almouloud e Silva (2012) nessa fase devem ser levados em consideração os seguintes pontos:

> - Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as relações globais) e as características da situação adidática desenvolvida;
> - Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação;
> - Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequências do desenvolvimento visado pela aprendizagem. (Almouloud e Silva, 2012, p. 27)

3. *Experimentação:* aplicação da Sequência didática, coleta, registro e análise dos resultados. Alguns autores recomendam, no caso da experimentação possuir mais de uma seção, confrontar os resultados, após um ou algumas seções, com as análises a priori feitas, realizando uma análise a posteriori local.
4. *Análise a posteriore e validação:* nessa fase ocorrerá (ou não) a validação das hipóteses que estão sendo investigadas, para isso deverá ser realizada uma confrontação das duas análises feitas, a priore e a posteriore. Nessa última fase, é imprescindível levar em consideração todos os dados coletados durante a experimentação.

1.1 ENGENHARIA DIDÁTICA E DESIGNER

Artigue (2018) ao estabelecer relações entre o conceito de Designe e a Educação Matemática afirma que o conceito de Designe é amplo, não se tratando apenas de elaborar pequena atividades. Designe na educação matemática vai da elaboração de situações a contribuições em currículos a nível de país, entre outras finalidades.

Ela considera que a Educação Matemática pode ser vista de modo produtivo como uma ciência do Designe, cuja missão coletiva implica o desenvolvimento, o teste e a revisão hipotética de Designers para favorecer os processos de aprendizagem que sem tem por objetivo.

Artigue (2018) afirma que as culturas didáticas nos diversos países são extremamente separadas. O Designe, para ser desenvolvido com qualidade, exige trabalho em equipe. O interesse por Designe em Educação Matemática se deu por razões internas e externas.

2. ANÁLISES PRÉVIAS

A seguir apresentaremos um breve levantamento sobre alguns tópicos relacionadas a Análise Combinatória. Nas próximas subseções escreveremos sobre os aspectos históricos, os aspectos matemáticos, os aspectos curriculares, sobre uma pesquisa onde realizamos uma análise de questões presentes em livros didáticos envolvendo o tema, sobre uma pesquisa onde consultamos alguns docentes sobre as dificuldades dos alunos com relação a Análise Combinatória e sobre algumas misconceptions presentes no estudo desse assunto.

Pesquisar e escrever sobre esses itens nos permitiu maior engajamento e aprofundamento dos conhecimentos sobre o objeto de estudo, o que é fundamental para entendermos melhor o contexto, justificarmos nossa pesquisa e propormos soluções mais assertivas para os problemas encontrados ao trabalharmos esse tema em sala de aula.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Apresentamos aqui um pequeno recorte de como se deu o desenvolvimento histórico, a compreensão e formalização da Análise Combinatória ao longo do surgimento das civilizações até os dias atuais. Buscamos, para elaboração deste texto, informações relacionadas em livros de história da matemática, teses, dissertações, artigos e publicações diversas que traziam informações sobre o assunto em tela. Alguns altores consultados foram Biggs (1979), Boyer (1974), Eves (2011) e Vazquez (2011), entre outros.

Inicialmente devemos destacar que não temos como afirmar, nem confirmar, com toda certeza absoluta a total veracidade dos aspetos e informações levantadas, podemos sim, a partir dos registros e informações que chegaram até nós, descrever a história com razoável confiabilidade dos fatos ocorridos. Também não existe a possibilidade de retratarmos, em sua totalidade, os acontecimentos e aspectos sociais que se deram nos momentos que aconteceram os fatos relatados. A própria história do desenvolvimento da humanidade e da matemática em si é, em muitos aspectos, obscura, sobretudo nos períodos pré-históricos onde a falta de registros

mais sistematizados não nos permite fazer afirmações sem pairar ainda diversas dúvidas e questionamentos.

Sobre a origem da Matemática e da Enumeração, Boyer (1974) escreve:

> Os milhares de anos que foram necessários para que o homem fizesse a distinção entre os conceitos abstratos e repetidas situações concretas mostram as dificuldades que devem ter sido experimentadas para se estabelecer uma base ainda que muito primitiva para a matemática. Além disso, há um grande número de perguntas não respondidas com relação a origem da matemática. Supõe-se usualmente que surgiu em resposta a necessidades práticas, mas estudos antropológicos sugerem a possibilidade de uma outra origem. Foi sugerido que a arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo.
> (Boyer, 1974, p. 4)

Com relação aos processos de ensino e de aprendizagem, conduzidos tendo como base aspectos históricos dos conteúdos explorados, vale destacar que esses processos fundamentados na história, podem permitir que os discentes entendam esses conhecimentos como necessários, fundamentais e frutos da imaginação e criatividade humana, não de seres especiais e iluminados, assim, passíveis de erros, correções e aperfeiçoamentos ao longo do tempo. Nesse sentido, o PCN (2001) defende:

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelos alunos, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a construção de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.
> (Brasil, 2001, p. 46)

Nas próximas subseções faremos uma breve introdução sobre o desenvolvimento da Análise Combinatória ao longo da história, de acordo com a bibliografia consultada.

2.1.1 Egito e Grécia

Não sabemos ao certo quais as origens da Análise Combinatória, no entanto, um dos problemas mais antigos que se tem registro e que nos remete a esse assunto, é encontrado no papiro egípcio Rhind (ou Ahmes), datado aproximadamente de 1650 a.C.. Papiro esse adquirido no Egito por Alexander Henry Rhind, egiptólogo escocês, e mais tarde comprado pelo Museu Britânico. Segundo Eves (2011), o problema 79 do papiro de Ahmes, diferentemente de uma grade parte dos problemas encontrados nesse papiro, não podia ser tão facilmente interpretado. Esse problema traz as seguintes informações:

Figura 1: Problema 79 do Papiro Ahmes

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2 401
Hecates de grãos	16 807
	19 607

Fonte: Eves (2011)

Podemos observar facilmente que a segunda coluna de números representa as 5 primeiras potências de 7, juntamente com sua soma, no entanto é impossível saber do que realmente se trata o problema, podemos apenas fazer suposições. Segundo Vazquez (2011) esse enigma permaneceu por muitos anos até que, Leon Rodet, em 1881, notou sua semelhança com um problema de Fibonacci datado de 1202, esse problema enuncia: “Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm 7 mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; para cada pão há sete facas; e para cada faca a sete bainhas. Qual o número total de coisas?”

Leonard Rodet sugeriu então a seguinte interpretação para o problema do papiro: “Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete medidas de grãos; quantos itens há ao todo?”. É impossível afirmar se essa é a interpretação correta, contudo a existência de problemas tão similares, não nos permite descartá-la.

Para Boyer (1974) o problema 79, também diferencia de grande parte dos outros problemas encontrados no papiro, visto que, aparentemente, esse parece trazer uma questão de matemática recreativa, enquanto boa parte dos outros problemas preocupavam-se em solucionar questões de natureza prática. Para Boyer (1974, p. 12): “O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma do número de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão.”

Um outro ponto que merece especial atenção é a existência de uma Poesia Infantil, ainda mais atual, datada aproximadamente de 1730 d.C. similar ao problema 79 do papiro de Rhind, segundo Vazquez (2011) pode ser encontrada em diferentes lugares, como no Dicionário Oxford de Citações e em contemporâneos livros infantis da editora *Ladybird Books*. Podemos questionar, entre outros pontos, o seguinte, qual a origem dessas similaridades em se tratando de situações temporalmente tão distantes? Vale também destacar que o próprio papiro de Rhind, aparentemente, é

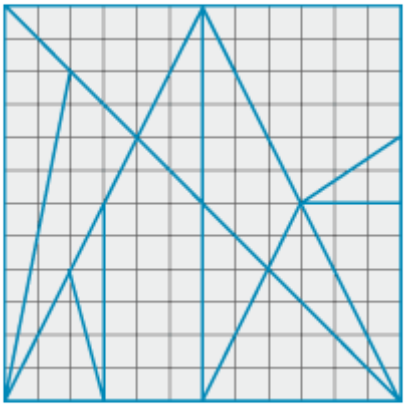
um compilado de problemas mais antigos e que a obra de Fibonacci foi, por muitos séculos, bastante utilizada. Ou seja, segundo Eves (2011) estamos diante de um problema que, aparentemente, preservou-se diante dos quebra-cabeças do folclore universal.

De acordo com Eves (2011):

> Vez ou outra surgem nas revistas atuais quebra-cabeças que derivam de outros que remontam aos tempos medievais. Em alguns casos é impossível determinar quanto é preciso recuar no tempo para alcançar suas origens. (Eves, 2011, p. 76)

Segundo Tavares e Brito (s. d.), no ano 2003, o jornal americano *The New York Times*, publicou um artigo sobre os resultados da pesquisa do historiador de Matemática Reviel Netz, onde o mesmo relatava que um enigmático “jogo” intitulado Stomachion, não se tratava de um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes (287 a.C. – 212 d.C.), um dos matemáticos mais brilhantes de todos os tempos, para fins da Análise Combinatória.

Figura 2: *Stomachion*



Fonte: Tavares e Brito (s. d.)

Esse jogo, semelhante ao Tangram, é composto por 14 peças que devem ser encaixadas convenientemente. Para Netz o objetivo de Arquimedes era determinar de quantas formas distintas as peças poderiam ser encaixadas com o intuito de formar um quadrado. Não sabemos ao certo como Arquimedes obteve essa resposta e nem se detinha algum conhecimento de Análise Combinatória, contudo, os conhecimentos sobre contagem necessários para solucionar esse problema, também fazem parte do bojo de conhecimentos desse assunto.

Segundo Biggs (1979) observamos poucas informações relevantes relacionadas a combinatória nos registros deixados na literatura grega, contudo suas contribuições devem ser avaliadas em qualquer discussão histórica. Segundo esse

autor uma passagem misteriosa e também interessante aparece em uma discussão onde pretende-se determinar o número de proposições compostas de dez proposições simples. Para esse autor como os termos exatos dos problemas não são conhecidos, é difícil interpretar as respostas numéricas ou inferir que conhecimento combinatórios foram utilizados para obtê-las.

2.1.2 China e Índia

Para Biggs (1979) a primeira ocorrência da combinatória pode estar nos 64 hexagramas do *I Ching*, um dos trabalhos chineses mais antigos, representado por um sistema constituído de dois símbolos que combinados segundo um conjunto de regras em uma determinada ordem poderiam investigar, prever e explicar presságios sobre o tempo, a vida e os homens. Contudo segundo Vazquez (2011) não há evidencias sobre a Matemática empregada nessa situação e apenas a ordenação dos símbolos está relacionada com a história da combinatória.

Combinação dos símbolos Yang (—) e Yin (- -), do sistema *I Ching*:

Figura 3: Sistema “I Ching” (*Tigramas*)

- Trigramas (conjunto de três símbolos):



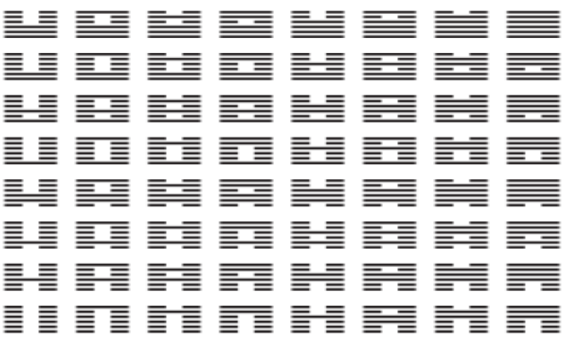
Fonte: Vazquez (2011)

Eves (2011) faz a seguinte consideração sobre esse sistema:

> Esses oitos símbolos, aos quais estão ligados vários atributos, passaram a ser usados em adivinhações. Embora não se possa garantir nada, pode-se vislumbrar nos *Pa-kua* um prenuncio do sistema de numeração binário. Pois tomando-se — como um e **- -** como zero, as sucessivas colunas de traços mostrados [...], representariam os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. No *I-King* encontra-se também o mais antigo exemplo de quadrado mágico.
> (Eves, 2011, p. 243)

Figura 4: Sistema “I Ching” (*Hexagramas*)

- Hexagramas (conjunto de seis símbolos):



Fonte: Vazquez (2011)

Segundo Eves (2011) por volta do século 450 d.C. até próximo do início do século XVI, o povo indiano sofreu diversão invasões em seus territórios. Nesse período destacaram-se alguns eminentes matemáticos, o mais famoso deles foi

Brahmagupta, que escreve, em 628, um trabalho denominado Brahmasphuta-sidd`bãnta, um trabalho de astronomia, mas que também tratava sobre matemática em alguns capítulos. O matemático indiano Bhaskara, que viveu posteriormente a Brahmagupta, também deixou contribuições em um livro que teve a parte matemática traduzida para o inglês por H. T. Colebrooke em 1817. Para Vazquez (2011) encontramos o *n!* em alguns problemas apresentados nesse livro, também, as repostas sugeridas, fazem crer que Bhaskara era conhecedor da fórmula para encontrar o número de combinações.

Vazques (2011) cita as contribuições dos povos hindus relacionadas a essa temática. Ele avalia que esse povo, há aparentemente muito tempo, já consideravam questões sobre permutação e combinação. Assim, descreve um exemplo encontrado no *tratado médico de Susruta*, datado aproximadamente do século VI a.C. Nesse tratado encontra-se uma listagem sistemática das combinações básicas entre: *doce*, *ácido*, *salino*, *pungente*, *amar*go e *adstringente*, o que nos leva a quantidade de combinação sem repetição, simplesmente chamadas de *combinações*.

Biggs (1979) também relata sobre determinado trabalho de Varahamihira (505, 587), matemático e astrônomo de Ujjain, nesse trabalho são mostrados alguns cálculos sobre o número de perfumes que podem ser produzidos a partir da escolha de 4 ou 5 dados ingredientes misturando-os em diversas proporções. Segundo Biggs o resultado é apresentado sem o fornecimento da listagem dos casos e sem qualquer comentário, para ele isso indica certo conhecimento e uso de um padrão. Nesse sentido, Biggs (apud Vazquez, 2011, p. 19) afirma que, “no campo da combinatória, a contribuição da Matemática do oriente foi de suma importância.”

2.1.3 Quadrados mágicos

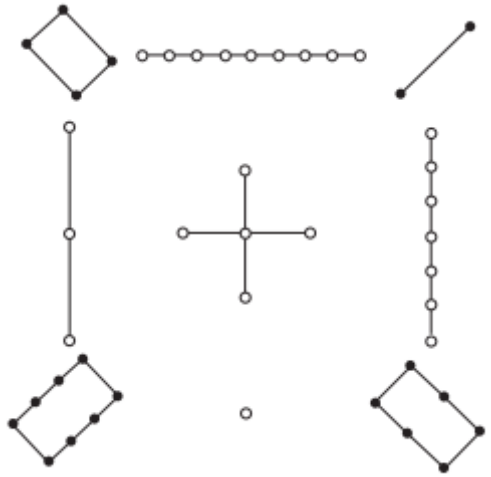
Para Wieleitner (apud Vazquez, 2011) o problema mais antigo relacionado a Análise Combinatória é o da formação de quadrados mágicos. Eves (2011) defini quadrado mágico de ondem *n* como:

> Um *quadrado mágico de ordem n* é um arranjo quadrado de n² inteiros distintos dispostos de maneira tal que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm mesma soma, chamada *constante mágica* do quadrado. O quadrado mágico se diz *normal* se os n^2 números que o formam são os n^2 primeiros números inteiros positivos.
> (Eves, 2011, p. 279)

Segundo Boyer (1974) o primeiro quadrado mágico que se tem registro surgiu na China, tem origem mística, sendo trazido para os homens durante o Império do

lendário Imperador Yii por uma tartaruga do Rio Lo. Para Eves (2011) não podemos deixar de citar esse quadrado em qualquer abordagem sobre a matemática chinesa antiga. Esse quadrado representa o diagrama *Lo Shu*, sendo de ordem 3 e cujas somas dos números de cada linha, cada coluna e da diagonal principal equivalem a 15. Esse diagrama foi registrado no *I Ching* (Livro das Permutações) sendo posteriormente desenhado, segundo Eves (2011), como na figura abaixo.

Figura 5: Quadrado Mágico *Lo Chu*



=

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Eves (2011)

Como podemos observar no quadrado os números pares são representados por nós pretos em cordas, enquanto os números ímpares são representados por nós brancos. Vazquez (2011) faz a seguinte afirmação sobre o quadrado mágico *Lo Chu*:

> Esse diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de *Ming Tang*, onde, diz-se, vários ritos eram realizados. A substituição dos símbolos utilizados por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado *Saturno*. Esse quadrado causava grande fascinação na maioria das pessoas, pois, nessa época, mesmo a mais simples aritmética era considerada ainda algo espantoso e os quadrados mágicos estavam associados a coisas místicas e misteriosas.
> (Vazquez, 2011, p. 20)

Além dos chineses encontramos na literatura relatos de trabalhos relacionados a formação de quadrados mágicos por diversos outros povos, e, também, sequndo Vazquez (2011) há diversos problemas que envolvem vagamente pensamentos combinatórios. Ele cita em seus trabalhos, por exemplo, um método de construção de quadrados de ordem ímpar descrito pelo matemático francês, De la Loubère, em 1961, que afirma ter aprendido com o povo Sião (atual Tailândia). Menciona também o velho problema do lobo, da cabra e do repolho (datado de aproximadamente de

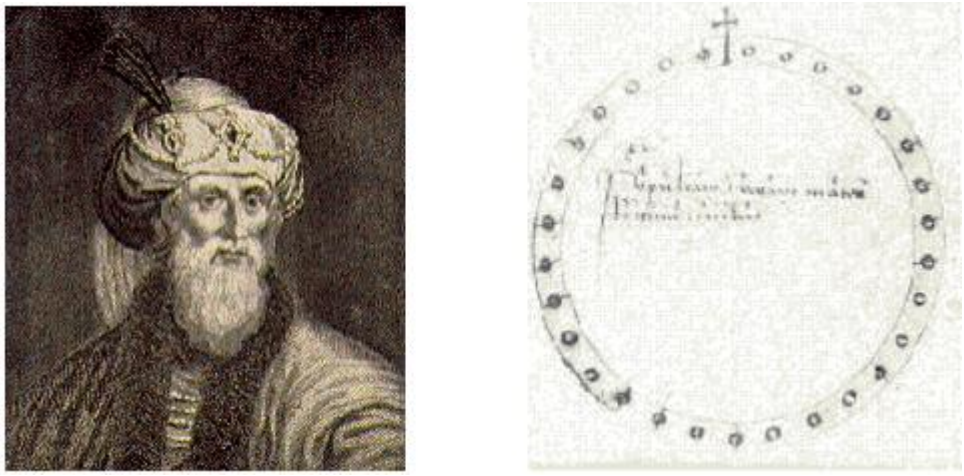
775 d.C.) atribuído ao erudito inglês Alcuíno de York e o problema de Josephus que está associado ao historiador judeu Josephus Flavius (século I d.C.).

A seguir apresentamos a transcrição do primeiro problema:

> “Certo homem tinha que transportar para o outro lado de um rio, um lobo, uma cabra e um repolho. O único barco que encontrou podia carregar somente duas coisas de cada vez. Por essa razão ele procurou um plano que pudesse levar todos para o outro lado totalmente ilesos. Diga a ele, quem é competente, como é possível transportá-los seguramente?” (Vazquez, 2011, p. 27)

O problema de Josephus, segundo Vazquez (2011, p.27), relata o seguinte: “A bordo de um navio estavam 15 turcos e 15 cristãos que se enfrentaram em mares violentos. A metade deles tem que ser sacrificada. Como isso poderia ser arranjado para que todos os cristãos fossem salvos? “

Figura 6: Josephus Flavius e a disposição de cristãos e turcos



Fonte: Vazquez (2011)

De acordo com a história um homem experiente em contas, presente entre os cristãos, organizo-os de tal forma que todos os cristãos ficaram vivos. A organização foi da seguinte forma: iniciando por 4 cristãos, a seguir 5 turcos, mais 2 cristãos, depois 1 turco, mais 3 cristãos, depois 1 turco, mais 1 cristão, depois 2 turcos, mais 2 cristãos, depois 3 turcos, mais 1 cristão, depois 2 turcos, mais 2 cristãos e finalmente mais 1 turco. Dessa forma, ficariam organizados sobre uma circunferência os 30 homens.

Começando a contar primeiramente pelos 4 cristãos em diante até chegar ao 9, esse seria arremessado ao mar, e assim sucessivamente de 9 em 9, todos os outros sem voltar atrás. Segundo Vazquez (2011) esse problema é creditado a Josephus Flavius, pois salvou sua vida em uma situação parecida.

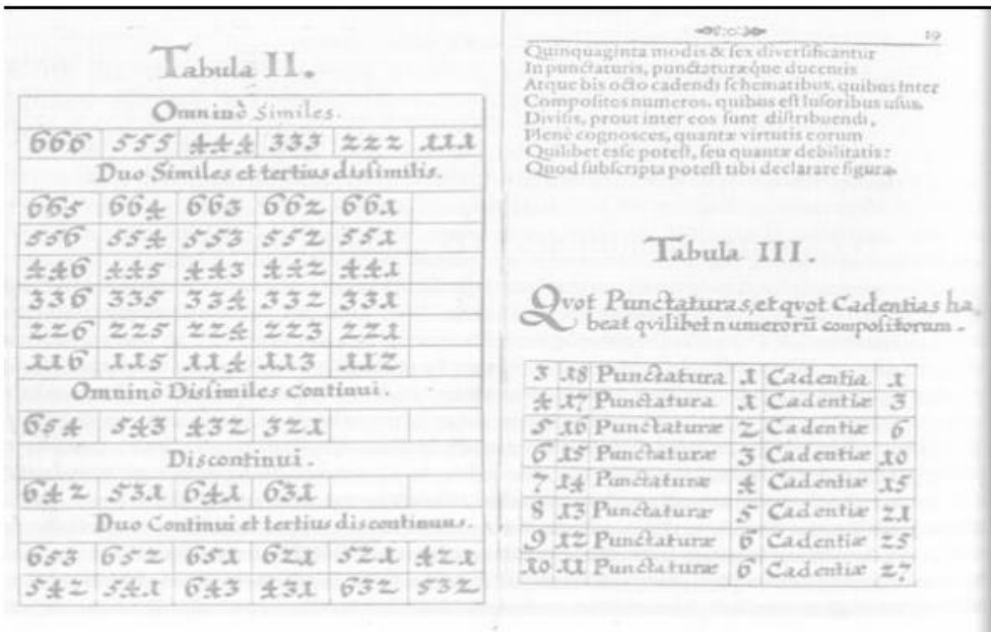
2.1.4 Probabilidade

Diversos estudos na área da estatística e da probabilidade, particularmente sobre jogos e jogos de azar, também foram fundamentais para o desenvolvimento e formalização da Análise Combinatória enquanto área de conhecimento. Sheynin (apud Vazquez, 2011) afirma que não sabemos ao certo qual a origem desses jogos, mas sabe-se que são muito antigos.

Vazquez (2011) cita o uso que se fazia, no antigo Egito, do osso *astragali* (liga a tíbia ao calcanhar) de alguns animais, para se determinar o número de movimentos nas jogadas. Utilizava-se também ossos do calcanhar, por volta de 1200 a.C., para se confeccionar dados, que também eram bastante empregados.

Um trabalho anônimo, e bastante famoso, sobre o jogo de dados encontra-se no poema latino “De Veluta”, escrito entre 1200 a 1400, supostamente usado a bastante tempo pelos hindus, nele são listados os resultados possíveis quando três dados são lançados. Katz (apud Vazquez, 2011, p. 29) afirma que o poema diz: “Se todos os três dados são iguais a somente um modo para cada número; se dois são iguais e outro diferente, há três modos; e se todos estão diferentes há seis modos”. É apresentado a seguinte figura:

Figura 7: Manuscrito do Poema “De Veluta”



Fonte: Vazquez (2011)

Vazquez (2011) faz a seguinte análise sobre a tabela:

> Observando a tabela do lado esquerdo, podemos perceber que no primeiro bloco temos as 6 possibilidades, no lançamento de 3 dados, de todos os números saírem iguais: 6 6 6; 5 5 5; 4 4 4; 3 3 3; 2 2 2 e 1 1 1. Logo abaixo, temos as 30 possibilidades de saírem dois números iguais e um diferente. Porém, não é considerado a ordem em que tais números aparecem. Como o poema diz “se dois estão iguais e outro diferente, há três modos”. Por exemplo, a primeira possibilidade é 6 6 5, que poderia ser também 5 6 6 ou 6 5 6. E então, teríamos 30 x 3, totalizando 90 possibilidades. Finalmente, os três últimos bloco indicam as possibilidades de todos os números saírem diferentes. No primeiro bloco temos três números sequenciais; no segundo bloco, temos três números não sequenciais; e, no terceiro, dois sequenciais e um não. Nesse caso, as 20 possibilidades restantes nos dão um total de 20 x 6 ou 120 possibilidades. No poema vemos “... e se todos estão diferentes há seis modos”, pois, novamente, considerando a ordem dos números, poderíamos escrever, por exemplo, 6 5 4 ou 6 4 5 ou 5 6 4 ou 5 4 6 ou 4 6 5 ou 4 5 6.
> (Vazquez, 2011, p. 30)

Na situação descrita observamos que o total de possibilidade, ao lançarmos três dados, levando-se em conta a ordem que os números aparecem, é de: 1 x 6 + 3 x 30 + 6 x 20, que dá igual a 216 resultados possíveis. Biggs apresenta uma tradução, da tabela do lado direito, onde relaciona o número de *partições* e de *arremessos* para mostrar os resultados possíveis. Dessa maneira, na literatura sobre o tema, são apresentadas diversas técnicas para se determinar os resultados possíveis no lançamento de dados, contudo, nesse período, ainda não foi apresentado um conceito claro e formal de probabilidade.

Katz (apud Vazquez, 2011) também afirma que existem evidências que foi atribuído significado místico e religioso aos resultados envolvendo lançamentos de dados, notoriamente pela igreja católica, com isso, maiores avanços de estudos nessa área não foram possíveis, pois, segundo essa filosofia, o incerto, o casual, o místico, o religioso, o sagrado etc., não deveriam ser investigados nem questionados, pois era de domínio exclusivo do Ser Supremo.

No decorrer do século XVI Girolamo Cardano, figura controversa, entretanto hábil matemático, nascido em Pávia (Itália), e que começou sua vida profissional como médico, dedicando-se paralelamente à matemática, deu os primeiros passos para a formalização do estudo das probabilidades, a partir de investigações sobre jogos de dados e eventos equiprováveis. Sua obra mais famosa foi *Ars magna* (A arte maior), onde fornece procedimentos verbais com soluções gerais sobre equações de grau 3 e 4.

Sobre a obra de Cardano, Hazzan (2013) escreve:

> Mas, apesar do sucesso de *Ars Magna*, um pequeno manual, intitulado *Liber de ludo aleae* (“O livro dos jogos de azar”), escrito por volta de 1550, descoberto entre seus escritos em 1576, mas só publicado em 1663, pode ter sido a contribuição mais inovadora de Cardano à Matemática. Nessa obra, pela primeira vez na história da matemática, foi introduzida a noção de probabilidade (em jogos de azar) com aceitável objetividade. E, com o mesmo grau de objetividade, Cardano estabeleceu também resultados como o que segue: “A probabilidade de que um evento cuja probabilidade é *p* ocorra independentemente *n* vezes é p^n “. Por exemplo, como no lançamento de uma moeda a probabilidade de dar coroa é $\frac{1}{2}$, em *n* lançamentos consecutivos da mesma moeda é $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$.
> (Hazzan, 2013, p. 57)

Contudo, segundo Vazquez (2011) as ideias de Cardano sobre probabilidade não foram levadas adiante por outros estudiosos na sua época e foram esquecidas. Foi somente cerca de 100 anos depois, em uma troca de correspondências entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat, em que discutiam sobre um problema antigo relacionado a jogos, resgatado e proposto por Chevalier de Méré, amigo de Pascal, que a Teoria das Probabilidades tomou corpo e força. Esses estudiosos encontraram corretamente e de formas diferentes, uma solução para o problema. Nesse sentido, o ano de 1654, é considerado por muitos estudiosos, o ano de nascimento da Teoria das Probabilidades.

Nesse sentido, sobre o desenvolvimento da Análise Combinatória como campo de estudos, Vazquez (2011) considera que

> Hoje, a Análise Combinatória é definida como um ramo da Matemática que permite resolver problemas em que, é necessário “escolher”, “arrumar” e, principalmente, “contar” os objetos de um conjunto. Tal conteúdo quando explorado em forma de problemas traz certa dificuldade em relação à formulação e à interpretação de seus enunciados, pois exige flexibilidade de pensamento, ou seja, para resolvê-los é necessário parar, concentrar, discutir e pensar.
> (Vazquez, 2011, p. 35)

Segundo o exposto, podemos encontrar resquícios de situações que envolviam contagem e formação de agrupamentos desde as épocas mais remotas da história da humanidade ainda que não existisse uma organização teórica formal dessa área de estudos. Nos dias atuais os estudos relacionados a Análise Combinatória e ao seu ensino, estão em pleno desenvolvimento e em franca expansão.

2.2 ASPECTOS MATEMÁTICOS

Segundo Silva et al. (2014) o Raciocínio Combinatório permite levantar diferentes possibilidades e analisar combinações entre essas possibilidades, auxilia na resolução de diversos tipos de problemas, matemáticos ou não matemáticos, e auxilia os alunos no desenvolvimento do raciocínio lógico. Além disso, acreditamos

que o Raciocínio Combinatório pode ajuda a desenvolver o pensamento hipotético-dedutivo.

De acordo com Rosas (2018):

> A análise Combinatória tem como objetivo principal definir de quantos modos uma decisão pode ser tomada ou qual é o número de elementos de um conjunto, sendo que esses elementos possuem pelo menos uma característica em comum.
> (Rosas, 2018, p.49)

Nessa seção apresentaremos alguns dos principais conceitos e definições quando estudamos Análise Combinatória, bem como os respectivos modelos matemáticos de cada fórmula. O estudo desse objeto é imprescindível tanto para auxiliar na resolução de problemas internos da Matemática, quanto para a compreensão de problemas externos à essa área do conhecimento, sendo os conhecimentos aplicados em diversas situações. Estudiosos como o matemático italiano Niccolo Fontana (1500-1557), e os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662) foram fundamentais no desenvolvimento de estudos sobre o tema.

Os assuntos abordados serão: Princípio Fundamental da Contagem (PFC); Permutação Simples; Fatorial; Permutação Circular; Arranjo Simples e Combinação Simples. Esses também são os assuntos de Análise Combinatória que serão tratados na Sequência Didática. Salientamos que o estudo da Análise Combinatória não se restringe, de maneira alguma, a esses assuntos, contudo esses serão os que irão compor a nossa Sequência, como já dito.

2.2.1 Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é uma ferramenta essencial na Análise Combinatória, que nos permite calcular o número total de resultados possíveis quando temos várias etapas ou escolhas a serem feitas de forma independente. O domínio desse princípio é fundamental para os alunos resolverem problemas em que seja necessário determinar o número de elementos de um conjunto, sem, necessariamente, enumerá-los um a um, e para compreenderem todo o restante do conteúdo.

Em suma esse princípio afirma que se uma situação “*A*” consiste em certo número de etapas independentes, sendo que a primeira etapa pode ser realizada de "a_n" maneiras diferentes, a segunda de "$a_{(n-1)}$" maneiras, a terceira "$a_{(n-2)}$", e assim

por diante até "a_1" opções para a última escolha, então o número total de resultados possíveis é o produto de todas essas escolhas, ou seja:

$$n(A) = a_n \times a_{(n-1)} \times a_{(n-2)} \times \ldots \times a_1$$

Na literatura sobre o tema, como em Hazzan (2013), podemos encontrar algumas demonstrações desse princípio, sendo esse fundamental para calcular o número de elementos de um dado conjunto em situações em que as escolhas são independentes.

2.2.2 Permutação Simples

A Permutação Simples é um tipo de agrupamento ordenado e sem repetição dos elementos de um dado conjunto, sendo o número de elementos considerados para compor o agrupamento, é igual ao número de elementos do conjunto. Ou seja, na Permutação Simples todos os elementos do conjunto devem compor o agrupamento.

Algumas situações problemas envolvendo Permutação Simples são, por exemplo: formar **anagramas** de palavras, distribuir 5 pessoas em um banco de 5 lugares, organizar pessoas lado a lado para tirar uma foto etc., podemos observar nesses exemplos que todos os elementos do conjunto devem fazer parte do agrupamento sendo que cada agrupamento difere do outro apenas pela ordem ocupada pelos elementos.

O número de Permutações Simples dos “n” elementos de um conjunto, pode ser representado matematicamente por $\boldsymbol{P_n = n!}$, onde “n!” (lê-se “n fatorial”) é o produto de todos os números inteiros positivos de 1 a “n”. Ressaltamos que todos os problemas envolvendo Permutações Simples podem ser resolvidos diretamente pelo Princípio Fundamental da Contagem.

2.2.3 Fatorial

O símbolo do fatorial é bastante utilizado no estudo da Análise Combinatória e por meio do seu uso muitos cálculos e expressões que poderiam se tornar demasiadamente grandes podem ser simplificados, sendo essa a principal finalidade da sua inserção. O fatorial indica um produto de sucessivos números naturais, sua utilização também é importante em outros assuntos como em Probabilidade e Binômio de Newton. O **Fatoria**l de um número “n”, representado por “*n*!”, é o produto de todos os números naturais de 1 a “n”. Matematicamente, é representado como:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 2 \times 1$$

O fatorial tem uma função importante na Análise Combinatória e é usado, entre outras, para calcular o número de Permutações, Arranjos e Combinações.

Definimos ainda: 0! = 1 e 1! = 1

2.2.4 Permutação Circular

Uma **Permutação Circular** é uma disposição dos elementos de um conjunto em um círculo de forma que a ordem relativa dos elementos seja importante. Podemos representar o número de permutações circulares de “n” elementos por $Pc_{(n)}$ e podemos calcular por meio da fórmula abaixo.

$$Pc_{(n)} = (n-1)!$$

Permutações circulares são frequentemente aplicadas em problemas que envolvem arranjos de pessoas ou objetos em uma roda ou ciclo.

2.2.5 Arranjo Simples

Um **Arranjo Simples** é uma disposição ordenada de “p” elementos distintos escolhidos de um conjunto de “n” elementos, onde a ordem é importante e um elemento não pode ser escolhido mais de uma vez. O número de Arranjos Simples é representado por $A_{n,p}$ e é calculado da seguinte forma:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arranjos Simples são úteis em situações em que é necessário calcular a ordenação de elementos, mas sem repetição. Assim como na Permutação Simples todos os problemas envolvendo Arranjo Simples podem ser resolvidos diretamente aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, a própria fórmula do Arranjo Simples é obtida diretamente desse princípio, nesse sentido podemos afirmar que decorar a fórmula não é o mais importante nesses tipos de problemas, aliás, defendemos que o mero decoreba das fórmulas não é o mais importante no estudo de **nenhum objeto matemático**, mas o uso dessas ferramentas podem auxiliar significativamente na resolução de diversos tipos de problemas.

2.2.6 Combinação Simples

Uma **Combinação Simples** é uma seleção não ordenada de “p” elementos distintos escolhidos a partir de um conjunto de “n” elementos, onde a ordem não é

importante. O número de Combinações Simples é representado por $C_{n,p}$ e é calculada da seguinte maneira:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Fazemos uso da Combinação Simples em problemas que envolvem a escolha de grupos de elementos, independente da ordem. A Combinação Simples está relacionada com a ideia de formar subconjuntos.

Esses conceitos matemáticos formam a base da Análise Combinatória e são cruciais para resolver uma ampla variedade de problemas que envolvem contagens e disposições de elementos. Eles são ferramentas valiosas para matemáticos, cientistas da computação, estatísticos e muitos outros profissionais que enfrentam desafios de contagem em suas áreas de atuação.

2.3 ASPECTOS CURRICULARES

O quê? Porque? E para que ensinar matemática? São perguntas que em algum momento no decurso de suas carreiras a grande maioria dos profissionais que atuam nessa área já fizeram, se fazem ou ainda irão fazer. Segundo Rico (*apud* Godoy e Santos, 2012), o debate sobre os fins da Educação Matemática no Sistema Educativo, crucial para o currículo de Matemática, envolvem várias dimensões, são elas culturais, políticas, educativas e sociais.

As questões que se desenvolvem nesse debate não são recentes nem tampouco triviais. Existem muitas divergências e convergências, quanto aos fins da Educação Matemática, e, de fato, para que sejam melhores compreendidas, será necessário refletir sobre outra questão: Porque ensinar Matemática? Questão essa, de igual interesse e relevância, para todos os entes envolvidos no processo educacional.

Segundo Mello (2014, p.1) “currículo é tudo aquilo que uma sociedade considera necessário que os alunos aprendam ao longo de sua escolaridade.” Nas discussões e decisões sobre currículo sempre está intrínseco fatores culturais, mas, sobretudo, teorias do conhecimento, sobre sua produção, reprodução e distribuição. Para essa autora, segundo certas características, podemos classificar os currículos educacionais em dois grandes grupos: o currículo centrado no conhecimento e o currículo centrado no aluno.

Na vertente do currículo escolar centrado no conhecimento privilegia-se a exposição e a observação, a didática é frontal e expositiva, o avanço sobre novas

fronteiras científicas e descobertas, dar lugar a assimilação do patrimônio cultural científico acumulado. Por outro lado, na vertente do currículo centrado no aluno, entende-se que a reconstrução do conhecimento pelo aluno deve constituir o currículo, deve ser levado em conta suas referências próprias individuais e culturais.

Entendemos que as duas vertentes são de igual importância e devem ser vistas como complementares e não excludentes. Nesse sentido, nas últimas décadas do século XX, segundo Mello (2014), surgiu uma nova concepção de currículo com capacidade de romper a dicotomia entre as duas vertentes mencionadas, o currículo referenciado em competências. Algumas de suas características são: Leva em conta o legado e conhecimento historicamente construído; O conhecimento é visto como o melhor conhecimento que se construiu até determinado momento histórico, não como verdade absoluta, infalível e inflexível; O conhecimento é visto como emancipador; É Centrado na aprendizagem e no resultado.

Ainda segundo Rico (*apud* Godoy e Santos, 2012), as justificativas apresentadas por muitos especialistas, sobre a inclusão da Matemática no currículo escolar, são inadequadas, frequentemente superficiais e díspares entre as práticas e os fundamentos, não refletindo as relações entre as raízes socioculturais e formalizações de procedimentos matemáticos.

Rico reforça ainda que o currículo, de maneira geral, pela sua intencionalidade propositiva concreta, permite estabelecer dimensões culturais, formativas ou cognitivas, política e social, dimensões essas prioritárias, que não assinalam seu conteúdo explícito, mas fundamentais para organizar a reflexão curricular. Essas categorias possibilitam a estruturação dos fins da Educação Matemática.

Nesse contexto temos o ensino e aprendizagem do assunto Análise Combinatória, que faz parte do currículo de Matemática, apesar de sua importância e aplicações na vida prática, o ensino do assunto é permeado por diversas barreiras e dificuldades, muitas dessas dificuldades relacionadas às interpretações erradas e falta de entendimento dos alunos ao resolverem questões sobre essa disciplina.

Durante nossas experiências como professores no ensino básico, podemos notar grande dificuldade e um baixo estímulo dos discentes, ao resolverem problemas de Análise Combinatória, que exigem maior capacidade de interpretação e mais pensamento lógico, intuitivo e dedutivo.

2.3.1 Análise Combinatória nos Documentos Oficiais

Podemos encontrar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendações ao se trabalhar a combinatória nos anos iniciais e finais do ensino fundamental. Nesse documento, em se tratando aos anos finais desse nível de ensino, encontramos o seguinte:

> Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.
> (Brasil, 1998, p. 52)

Na BNCC do ensino médio o assunto Análise Combinatória está relacionado a competência geral 01 (CG01) e a competência geral 03 (CG03), cujos textos dessas competências, omitiremos nesse trabalho. De acordo com a competência específica de matemática número 03 (CEMAT03) espera-se que o aluno seja capaz de:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> (Brasil, 2018, p. 531)

Considerando o expresso no texto dessa competência almeja-se que o aluno seja capaz de, muito mais que decorar e fazer um mero uso das fórmulas, é preciso, antes de tudo, entender de fato os procedimentos, assim, melhorando também sua capacidade de argumentação.

Ainda tendo como fundamento a BNCC, relativos à competência específica 03 mencionada no parágrafo anterior, podemos associar o estudo do assunto Análise Combinatória às habilidades EM13MAT310 e EM13MAT311, cujos textos, respectivamente, determinam:

> Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> (Brasil, 2018, p. 537)

> Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
> (Brasil, 2018, p. 537)

O texto da habilidade EM13MAT310 é abrangente, compreendendo, fundamentalmente, todos os casos de contagem de agrupamentos, ordenáveis ou não ordenáveis. Identificamos na habilidade EM13MAT311 uma associação entre o

estudo de Análise Combinatória e o estudo de probabilidade, como também é recomendado em diferentes documentos curriculares oficiais.

Para Bataner, Godino e Navarro-Pelayo (1996), além de sua importância para o desenvolvimento e resolução de questões relacionadas ao estudo das probabilidades, a capacidade combinatória é um componente fundamental para o desenvolvimento do pensamento formal. Esses autores afirmam que “A combinatória não é simplesmente uma ferramenta de cálculo para a probabilidade.” Segundo Piaget e Inhelder (apud Bataner, Godino e Navarro-Pelayo, 1996, p. 1), “Se o sujeito não possui capacidade combinatória, não é capaz de usar a ideia de probabilidade salvo em casos de experimentos aleatórios muito elementares.”

O desenvolvimento de habilidades relacionadas ao assunto Análise Combinatória também está presente na matriz de referência do Sistema de Avaliações da Educação Básica (Saeb), pertencendo a unidade temática Números e Operações. Segundo o descritor 32 na matriz de referência da 3ª séria do Ensino Médio, espera-se que o aluno seja capaz de “Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples”.

Percebemos que, segundo esse descritor, deverá ser avaliado o desempenho do aluno ao resolver problemas envolvendo métodos simples de contagem, não necessariamente, sendo exigido que o aluno seja capaz de solucionar questões que exigem procedimentos mais sofisticados.

Além dos documentos mencionados, o estudo do assunto Análise Combinatória, bem como o desenvolvimento de competências e habilidades sobre esse conteúdo, também está presente nos documentos oficiais dos sistemas de ensino das diversas redes estaduais e municipais, trazendo orientações curriculares aos diferentes níveis de escolaridade.

O processo de formulação e organização curricular, particularmente da matemática, é fortemente influenciado pelos acontecimentos e transformações sociais. O professor deve estar sempre atento a esses acontecimentos, refletir criticamente e estar sempre aberto às mudanças que venham melhorar o processo de ensino e aprendizagem.

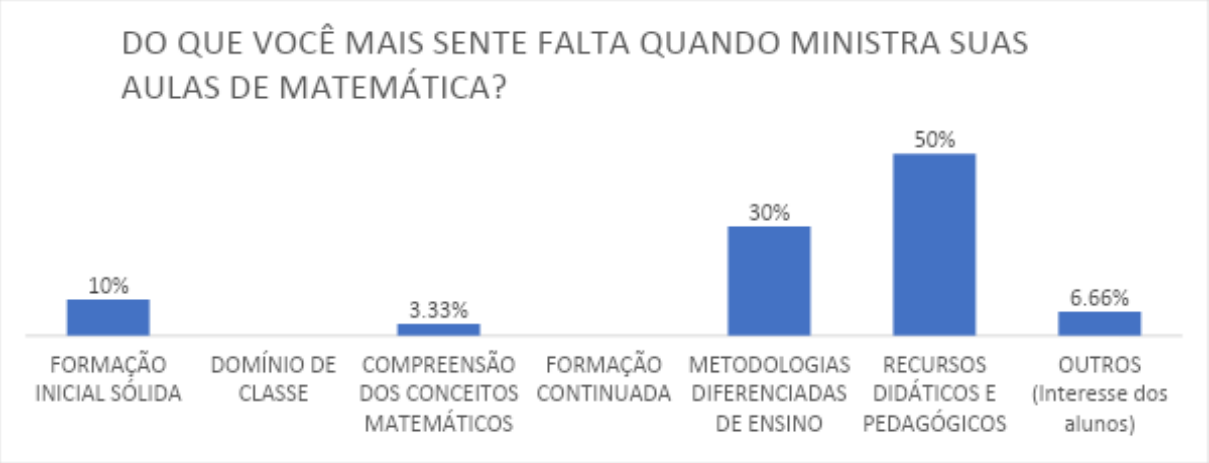
2.4 ANÁLISE DE QUESTÕES PRESENTES EM LIVROS DIDÁTICOS

O processo de ensino aprendizagem da disciplina Matemática no Brasil vem passando nas últimas décadas por inúmeras dificuldades. Essas dificuldades são

frequentemente apontadas e relatadas em diversas pesquisas realizadas por pesquisadores da área da Educação Matemática, professores que lecionam a disciplina e estudantes. Resultados de avaliações nacionais e internacionais também têm corroborado com esse entendimento.

A falta de estrutura física de muitas escolas públicas, número insuficiente de trabalhadores, deficiência na formação inicial e continuada de professores, carência de matérias e recursos pedagógicos etc., também têm dificultado o desenvolvimento do trabalho com essa disciplina. Em uma pesquisa realizada por Silva, Silva e Silva (2022), com 30 professores da rede pública de ensino do estado do Pará, foi perguntado do que mais sentiam falta quando ministravam suas aulas de matemática, cujo gráfico com as respostas apresentamos a seguir.

Gráfico 1 - Necessidades sentidas pelos professores



Fonte: Silva, Silva e Silva (2022)

Nesse contexto, ao longo dos anos, o livro didático vem se consolidando como um recurso essencial e fundamental ao trabalho docente. Em diversas comunidades mais carentes esse instrumento tem sido, até mesmo, a única ferramenta didática adotada pelo professor em sua prática pedagógica, tornando-se indispensável. Programas governamentais como o PNLD têm reforçado seu uso e inserção nas escolas. Depois de aprovados em avaliações pedagógicas coordenadas pelo Ministério da Educação, cada rede de ensino tem autonomia na escolha dos livros e essa escolha pode ser realizada de diversas maneiras, o ideal é que seja feita com a participação ativa dos docentes de cada componente curricular.

Segundo o site do Ministério da Educação o Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017 instituiu o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) unificando o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE). O objetivo desse programa é avaliar, disponibilizar

periodicamente e gratuitamente, para as escolas públicas de ensino básico, entre outras, nos âmbitos municipais, estaduais e federais, matérias de suporte à prática educativa.

Durante os anos de estudos no ensino básico, no decorrer e após a graduação, fizemos uso constante do livro didático para estudar e reforçar o conhecimento em diversos assuntos. Em nossa experiência docente, ao longo de mais de 10 anos de atuação no ensino básico, participamos de vários momentos de seleção dos livros que seriam utilizados em sala de aula, esses momentos foram fundamentais em nossa carreira e para nossa experiência docente, possibilitando diversos momentos de reflexão, debate e aprendizado. Na carreira profissional tem sido um instrumento essencial para dar suporte ao trabalho em sala de aula. Salientamos que a seleção dos livros didáticos é um momento fundamental e deve ser feita com muita responsabilidade pelos docentes.

No decorrer da disciplina Resolução de Problemas em Aulas de Matemática, sob orientação do Prof. Doutor Pedro Franco de Sá, realizamos a análise de questões de 10 livros didáticos do 2º ano do ensino médio, do programa PNLD do Ministério da Educação - MEC, sobre o conteúdo Análise Combinatória, à luz da Taxonomia de Bloom. As obras analisadas foram distribuídas entre os anos 2010 e 2020, sendo que entre as que foram analisados, cinco são do ano 2016. Nessa análise tivemos como objetivo: “**investigar como estão organizadas nos livros didáticos, as questões envolvendo o conteúdo Análise Combinatória”**.

Como embasamento teórico, na busca de trabalhos que fundamentassem e servissem como suporte para a realização desse relatório, foram consultados alguns artigos com relatos de pesquisas já realizadas sobre análise de livros didáticos, entre os quais destacamos: Sá, Santos e Ribeiro (2020), que realizaram uma pesquisa com o seguinte tema: “SAEB E PNLD: DISSONÂNCIAS E IMPLICAÇÕES DAS AVALIAÇÕES DE LARGA ESCALA NO CONTEXTO EDUCACIONAL BRASILEIRO”; Quartieri *et al*. (2013), que produziram um artigo com a seguinte temática: “ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL UTILIZANDO TEMAS ABORDADOS NA PROVA BRASIL”, entre outros.

A primeira versão da taxonomia dos objetivos educacionais, popularmente conhecida como Taxonomia de Bloom, foi desenvolvida nos Estados Unidos na década de 1950 por profissionais de diferentes áreas do conhecimento liderados pelo psicólogo e pedagogo Benjamin S. Bloom. Apesar de termos consciência da não

linearidade do pensamento, no âmbito educacional, o entendimento e o uso da taxonomia podem auxiliar bastante no planejamento e condução do trabalho docente, por exemplo, na definição de competências e na seleção de habilidades.

A Taxonomia de Bloom apresenta de maneira linear e estrutura, seis subcategorias de domínio cognitivo (lembrar, compreender, aplicar, analisar, avaliar e criar). Essa categorização pode auxiliar o professor em sala de aula, no planejamento e na condução das atividades pedagógicas. Acreditamos que trabalhar questões classificadas nos diferentes níveis da taxonomia, de forma linear, podem facilitar o aprendizado dos alunos, na medida em que apresentam progressivo grau de dificuldades, exijam diferentes competências e habilidades. A inserção e compreensão da taxonomia podem também auxiliar no processo de avaliação.

2.4.1 Metodologia

Nessa subseção apresentamos o resultado de uma pesquisa realizada no decorrer da disciplina Resolução de Problemas em Aulas de Matemática, em que fizemos a análise de 10 livros didáticos do 2º ano do ensino médio acerca do objeto matemática Análise Combinatória. Foram analisadas em 237 páginas, 781 questões sobre o assunto, nosso objetivo foi: “**investigar como estão organizadas nos livros didáticos, as questões envolvendo o conteúdo Análise Combinatória”**. As questões foram analisadas sobre diferentes aspectos, entre os quais: quantidade de questões de acordo com os níveis da Taxonomia de Bloom, quantidade de questões de contexto matemático e não matemático, quantidade de questões de múltipla escolha, etc.

Para análise das obras o professor orientador disponibilizou uma ficha com critérios pré-estabelecidos que deveriam ser levados em consideração. Os livros analisados foram: Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade); Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único; Matemática: Padrões e Relações; Matemática: Interação e Tecnologia; Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade; Matemática Paiva 2; Matemática: Ciência e Aplicações; Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade; Matemática: Contexto & Aplicações e Matemática: #Contato. Dos livros analisados, 4 tivemos acesso no formato impresso e 6 em PDF.

Na última fase do trabalho, após a verificação e enquadramento das questões, passamos para a escrita do relatório, sistematização, discussão e análise dos resultados encontrados, tendo em vista a literatura examinada. É importante

salientar que na fase de verificação das questões nos livros didáticos, optamos por responder uma a uma as questões, com esse procedimento, demandamos bastante tempo nessa fase, no entanto esse momento e o procedimento adotado nos permitiu maior envolvimento com o objeto matemático em estudo. Com essa ação podemos sanar antigas dúvidas sobre esse assunto e percebemos conexões e relações com outros objetos matemáticos até então não percebidos, logo, esse procedimento foi de fundamental importância, apesar da maior demanda de tempo gasto.

2.4.2 Resultados e Análises

Passaremos agora a apresentar e discutir os resultados encontrados fazendo algumas análises e considerações. Os resultados estão organizados em quadros, a intenção é possibilitar uma melhor visualização, compreensão e interpretação. Dos livros analisados, um é do ano 2010, cinco são do ano 2016, três do ano 2020 e um deles não tem o ano de publicação identificado. No quadro 1 apresentamos o título de cada livro, com seus respectivos autores, editora responsável e ano de publicação.

Quadro 1 – Lista dos livros didáticos analisados

Título do Livro	Autor	Editora	Ano
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	Fabio Martins de Leonardo	Moderna	2020
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	Manoel Paiva	Moderna	(?)
Matemática: Padrões e Relações	Adilson Longen	Editora do Brasil	2016
Matemática: Interação e Tecnologia	Rodrigo Balestri	Leya	2016
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa	FTD	2020
Matemática Paiva 2	Manoel Paiva	Moderna	2010
Matemática: Ciência e Aplicações	Gelsson Iezzi, Osvaldo Dolce; David Degenszajn, Roberto Perigo e Nieze de Almeida	Saraiva	2016
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	Obs. Editora Responsável: Thais Marcelle de Andrade	Scipione	2020
Matemática: Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	2016
Matemática: #Contato	Joamir Souza e Jacqueline Garcia	FTD	2016

Fonte: Autor, 2022

Nos quadros 2 a 7 a seguir apresentamos a sistematização e enquadramento das questões de acordo com a Taxonomia. Sá (2021) defende que:

> A adoção de uma ferramenta como a Taxonomia de Bloom para a elaboração e do planejamento, execução e avaliação do ensino auxiliará em muito o professor e evitará que certos equívocos que comentaremos ao longo do texto sejam cometidos. Principalmente os equívocos relacionados a avaliação da aprendizagem de conteúdos trabalhados didaticamente. (Sá, 2021, p. 33)

No quadro 2 apresentamos, sob a nossa ótica e interpretação, a quantidade de questões classificadas no nível 1 da Taxonomia de Bloom. No primeiro nível, os alunos são estimulados a resolver questões, onde é necessário apenas recordar informações, ideias, princípios e conceitos da forma mais aproximada possível como foram estudados, sem necessariamente estabelecer nenhuma conexão com outros conceitos dentro ou fora do campo de conhecimento do objeto em estudo, reconhecer em outras linguagens, nem é necessário aplicar o conceito na resolução de questões ou problemas, esse é o nível mais básico da classificação dos objetivos educacionais.

Quadro 2 – Questões classificadas no nível 1 da Taxonomia de Bloom

Título do Livro	**Quantidade de Questões no Nível 1 (Lembrar)**
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	01
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	08
Matemática: Padrões e Relações	0
Matemática: Interação e Tecnologia	0
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	0
Matemática Paiva 2	01
Matemática: Ciência e Aplicações	0
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	01
Matemática: Contexto e Aplicações	0
Matemática: #Contato	0

Fonte: Autor, 2022

Notamos que questões nesse nível, praticamente quase não são propostas nos livros didáticos examinados, na maioria, são inexistentes. Salientamos a importância de serem apresentadas e resolvidas questões nesse nível pelos alunos, pois terão a oportunidade de relembrar conceitos e aprofundá-los, acreditamos que isso poderá auxiliar na interpretação, aplicação e resolução de problemas mais complexos sobre o conteúdo Análise Combinatória e em outros campos conceituais.

No quadro 3 abaixo são expostas a quantidade de questões identificadas nos livros didáticos, do nível 2 da Taxonomia. Nesse nível espera-se que os discentes sejam capazes de traduzir, compreender ou interpretar informações em diferentes linguagens, com base nos conhecimentos que já possui. Por exemplo, traduzir informações da linguagem gráfica para a linguagem escrita, e vice versa.

Quadro 3 – Questões classificadas no nível 2 da Taxonomia de Bloom

Título do Livro	**Quantidade de Questões no Nível 2 (Compreensão)**
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	03
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	07
Matemática: Padrões e Relações	02
Matemática: Interação e Tecnologia	10
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	01
Matemática Paiva 2	10
Matemática: Ciência e Aplicações	02
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	05
Matemática: Contexto e Aplicações	06
Matemática: #Contato	09

Fonte: Autor, 2022

Podemos notar que, apesar de questões nesse nível estarem mais presentes nos livros didáticos do que as do nível 1, ainda estão presentes em pequena quantidade, os livros que encontramos mais questões são: “Matemática: Interação e Tecnologia” e “Matemática Paiva 2”, ambos com 10 questões, esse número é pequeno se compararmos ao total de questões.

Também consideramos serem do segundo nível questões onde fosse necessário apenas fazer a substituição de valores numéricos, nas fórmulas algébricas, sem nenhum contexto, isto é, apenas aprendendo usar a fórmula, pois no nosso modo de interpretar os alunos estão traduzindo informações em diferentes simbologias e representações, no caso, da linguagem algébrica para a aritmética.

No quadro 4 a seguir, temos as questões classificadas no nível 3. No nível da aplicação os alunos devem ser capazes de lembrar as ideias e conceitos já estudados, compreender e aplicar essas ideias e conceitos na resolução de questões e problemas sobre o conteúdo Análise Combinatória, e em outras áreas do conhecimento, usando as ideias e conceitos da análise, porém sem relacionar essas áreas, devem ser capazes de desenvolver essas ações com mínima supervisão.

Quadro 4 - Questões classificadas no nível 3 da Taxonomia de Bloom

Título do Livro	Quantidade de Questões no Nível 3 (Aplicação)
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	39
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	35
Matemática: Padrões e Relações	40
Matemática: Interação e Tecnologia	14
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	24
Matemática Paiva 2	21
Matemática: Ciência e Aplicações	35
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	22
Matemática: Contexto e Aplicações	49
Matemática: #Contato	47

Fonte: Autor, 2022

Essas questões foram encontradas em maior número do que as dos outros níveis praticamente em todas as obras analisadas, com exceção de duas, em que o número de questões no nível “análise” foi maior. Isso também ratifica o entendimento que a maioria dos livros didáticos, ainda seguem o roteiro, apresentação das ideias e conceitos, exemplos, atividades resolvidas e exercícios de aplicação propostos. Não entraremos no mérito aqui se esse é o método mais eficiente para o processo de ensino e aprendizagem ou não, porém, ainda é o mais utilizado.

Abaixo, no quadro 5, encontramos a quantidade de questões no nível 4 em cada livro, nível da “análise”. Para analisar, segundo a Taxonomia de Bloom, os alunos devem ser capazes de relacionar, classificar e distinguir estruturas, evidências, hipóteses e pressupostos de uma questão ou declaração. Questões no nível quatro foram encontradas em segundo maior número, com relação às questões dos outros níveis.

Quadro 5 – Questões classificadas no nível 4 da Taxonomia de Bloom (Continua)

Título do Livro	Quantidade de Questões no Nível 4 (Análise)
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	34
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	42
Matemática: Padrões e Relações	28
Matemática: Interação e Tecnologia	09
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	17
Matemática Paiva 2	37

Matemática: Ciência e Aplicações	28
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	16
Matemática: Contexto e Aplicações	08
Matemática: #Contato	12

Fonte: Autor, 2022

Consideramos estarem localizadas nesse nível, questões que ao serem resolvidas, aplicando-se determinadas fórmulas da Análise Combinatória, recaíam em outros objetos de estudo da Matemática, exigindo também outros conhecimentos e habilidades. Por exemplo, ao resolvermos questões que peçam para simplificarmos expressões do tipo**:** $\frac{C_{n-1,p-1}}{C_{n-2,p-2}}$, precisamos mobilizar, além de conhecimentos e habilidades relacionadas com a fórmula da combinação, também habilidades relativas à simplificação de expressões algébricas, estabelecendo conexões entre esses assuntos.

No nível 5, com base em estruturas, padrões e critérios preestabelecidos, os alunos devem ser capazes de avaliar a adequação de determinadas soluções encontradas, apreciando, criticando e fazendo ajustes quando necessário. No quadro 6 a seguir apresentamos o número de questões que classificamos serem desse nível.

Quadro 6 - Questões classificadas no nível 5 da Taxonomia de Bloom

Título do Livro	**Quantidade de Questões no Nível 5 (Avaliação)**
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	21
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	25
Matemática: Padrões e Relações	13
Matemática: Interação e Tecnologia	05
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	13
Matemática Paiva 2	24
Matemática: Ciência e Aplicações	19
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	14
Matemática: Contexto e Aplicações	02
Matemática: #Contato	02

Fonte: Autor, 2022

Por exemplo, ao resolvermos questões que peçam para encontrarmos o valor de **x** em: $C_{x+3,\ 2}$ **= 15**, recairemos em uma equação do 2º grau, que ao ser solucionada, devemos avaliar a adequação do valor encontrado, isto é, precisamos mobilizar, além de conhecimentos e habilidades sobre a fórmula da combinação,

também habilidades relativas à resolução de equações do 2º grau, que ao serem resolvidas, devemos avaliar se o valor encontrado satisfaz a igualdade tornando-a verdadeira.

No último nível da Taxonomia dos objetivos educacionais, temos as questões onde é necessário criar. Nesse nível consideramos as questões onde os alunos deveriam exprimir suas ideias e pensamentos sobre determinados assuntos, também enquadramos as questões que solicitavam que os discentes criassem determinados problemas envolvendo alguma ideia ou conceito visto. O quadro 7 abaixo apresenta a quantidade dessas questões.

Quadro 7 - Questões classificadas no nível 6 da Taxonomia de Bloom

Título do Livro	**Quantidade de Questões no Nível 6 (Criação ou Síntese)**
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	07
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	0
Matemática: Padrões e Relações	01
Matemática: Interação e Tecnologia	01
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	03
Matemática Paiva 2	01
Matemática: Ciência e Aplicações	0
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	07
Matemática: Contexto e Aplicações	0
Matemática: #Contato	0

Fonte: Autor, 2022

Podemos observar que a quantidade de questões nesse nível, encontradas nos livros didáticos consultados, também caíram drasticamente. Com isso podemos notar que assim como a quantidade de questões no nível 1 e no nível 2, a presença de questões nesse nível são quase irrelevantes se comparado com a quantidade de questões enquadradas no nível 3 e nível 4.

Nos dois próximos quadros apresentamos temos a quantidade de questões enquadradas como sendo de contexto matemático e de contexto não matemático. Em nosso ponto de vista, as questões de contexto matemático têm o objetivo de treinar e aprofundar conhecimentos, técnicas, algoritmos e conceitos próprios da matemática, não se preocupando com conhecimentos de outra natureza e outras áreas. Já as questões de contexto não matemático envolvem a aplicação de ideias e conceitos matemáticos, para a compreensão, interpretação e aprofundamento de conceitos próprios de outras áreas de estudo.

Quadro 8 - Questões de contexto matemático

Título do Livro	Quantidade de Questões de Contexto Matemático
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	105
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	117
Matemática: Padrões e Relações	80
Matemática: Interação e Tecnologia	35
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	54
Matemática Paiva 2	93
Matemática: Ciência e Aplicações	84
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	61
Matemática: Contexto e Aplicações	65
Matemática: #Contato	66

Fonte: Autor, 2022

Quadro 9 - Questões de contexto não matemático

Título do Livro	Quantidade de Questões de Contexto Não Matemático
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	0
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	0
Matemática: Padrões e Relações	04
Matemática: Interação e Tecnologia	04
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	04
Matemática Paiva 2	01
Matemática: Ciência e Aplicações	0
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	04
Matemática: Contexto e Aplicações	0
Matemática: #Contato	4

Fonte: Autor, 2022

Nesses dois quadros observamos que as questões de contexto matemático, são predominantes em todas as obras analisadas, sendo as de contexto não matemático praticamente inexistentes. Ressaltamos a importância de se propor questões relativas a conhecimentos próprios de outras áreas do saber, onde se possa usar ferramental matemática para melhor compreender e interpretar as situações, a esse respeito os objetivos gerais presentes nos PCN para o ensino fundamental, estabelecem, entre outros, os seguintes aspectos:

> - Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório e probabilístico);
> - Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares. (Brasil, 1998, p. 48)

Nas avaliações ditas externas, tanto as nacionais quanto as internacionais, como a **Prova Brasil** e **Pisa**, as questões são do tipo múltipla escolha, esse é o formato das questões adotadas também na grande maioria dos vestibulares e concursos públicos, onde são apresentadas alternativas em que os candidatos devem marcar as que julgarem corretas em um gabarito. Nesse contexto, é muito importante que esse tipo de questão já seja trabalhado desde os anos iniciais de escolaridade, bem como o treinamento para o preenchimento de gabaritos.

Em um artigo publicado por Quartieri *et al*. (2013), que teve como tema: "ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL UTILIZANDO TEMAS ABORDADOS NA PROVA BRASIL", durante o VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, onde foram analisados 3 livros didático distribuídos pelo programa PNLD no ano 2019, em escolas públicas participantes de um dos Observatórios da Educação do Centro Universitário UNIVATES, após a análise dos livros, concluíram que as atividades presentes nas obras, em sua maioria, não continham questões de múltipla escolha. No entanto, concluíram que os livros traziam atividades semelhantes com os tipos de questões presentes na Prova Brasil.

Por outro lado, em um artigo mais recente, publicado por Sá, Santos e Ribeiro (2020), na Revista Prática Docente, intitulado: "SAEB E PNLD: DISSONÂNCIAS E IMPLICAÇÕES DAS AVALIAÇÕES DE LARGA ESCALA NO CONTEXTO EDUCACIONAL BRASILEIRO", os autores por meio da análise de documentos do SAEB, busca de referências sobre o PNLD e na consulta de documentos do PNLD buscando referências ao SAEB, concluíram que o diálogo entre essas duas políticas é praticamente inexistente. Para esses autores esse fator tem afetado drasticamente os resultados das avaliações educacionais brasileira.

Nesse sentido podemos levantar os seguintes questionamentos: "Seriam os resultados encontrados nas duas pesquisas citadas anteriormente, contraditórios?", "Trabalhar questões de múltipla escolha em sala de aula e inseri-las nos livros didáticos causariam resultados mais positivos nas avaliações externas?" e "Trabalhar questões do tipo Prova Brasil em nossas aulas refletiriam em melhores resultados nas avaliações de larga escala?", essas e outras questões merecem melhor investigação.

No próximo quadro, expomos a quantidade de questões de múltipla escolha sobre o objeto Análise Combinatória em cada uma das obras analisadas. Podemos perceber que questões nesse formato, são relativamente presentes nos livros,

ressaltamos que muitas são questões de provas de vestibulares de diversas universidades.

Quadro 10 - Questões de múltipla escolha nas obras

Título do Livro	Quantidade de Questões de Múltipla Escolha
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	19
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	50
Matemática: Padrões e Relações	13
Matemática: Interação e Tecnologia	07
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	13
Matemática Paiva 2	20
Matemática: Ciência e Aplicações	04
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	09
Matemática: Contexto e Aplicações	0
Matemática: #Contato	04

Fonte: Autor, 2022

Outros itens observados nos livros didáticos foram: quantidade de questões com informações desnecessárias, quantidade de questões com excesso de informações, quantidade de questões com falta de informações, quantidade de questões com possibilidade de mais de uma solução, quantidade de questões sem solução, quantidade de questões de olimpíadas, quantidade de questões de matemática recreativa, quantidade de questões de concurso, quantidade de questões do tipo Escola Militar, quantidade de questões que podem ser resolvidas por métodos diversos além do algoritmo, quantidade de questões com linguagem imperativa adotada no enunciado das questões e quantidade de questões com linguagem não imperativa adotada no enunciado das questões.

Frisamos a importância de serem trabalhados problemas relacionados aos aspectos levantados, esses tipos de problemas estão mais presentes na rotina dos discentes, por exemplo, muitos problemas reais não têm uma solução imediata ou ainda, não raramente, os problemas reais apresentam mais de uma solução. Muitas questões também são configuradas com excesso de informações, informações desnecessárias que podem ser suprimidas no momento da resolução ou falta de informações. Também muitos desses problemas apresentam mais de um método para serem resolvidos. Problemas diversos podem despertar a motivação, a curiosidade e a criatividade dos alunos, características essas essenciais para um cidadão crítico na sociedade contemporânea.

Nos próximos quadros, apresentamos o número de questões relativos aos itens: quantidade de questões que podem ser resolvidas por métodos diversos além do algoritmo, quantidade de questões com linguagem imperativa adotada no enunciado das questões e quantidade de questões com linguagem não imperativa adotada no enunciado das questões, questões enquadradas nesses itens apresentaram-se mais frequentemente nos livros analisados.

Quadro 11 - Questões que permitem métodos diversos na resolução

Título do Livro	**Quantidade de Questões que Podem ser Resolvidas por Métodos Diversos Além do Algoritmo**
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	15
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	12
Matemática: Padrões e Relações	15
Matemática: Interação e Tecnologia	14
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	15
Matemática Paiva 2	05
Matemática: Ciência e Aplicações	16
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	17
Matemática: Contexto e Aplicações	36
Matemática: #Contato	30

Fonte: Autor, 2022

Quadro 12 - Questões com linguagem imperativa no enunciado (Continua)

Título do Livro	**Quantidade de Questões com Linguagem Imperativa Adotada no Enunciado**
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	19
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	18
Matemática: Padrões e Relações	24
Matemática: Interação e Tecnologia	10
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	10

(Conclusão)

Título do Livro	Quantidade de Questões com Linguagem Imperativa Adotada no Enunciado
Matemática Paiva 2	14
Matemática: Ciência e Aplicações	14
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	13
Matemática: Contexto e Aplicações	10
Matemática: #Contato	13

Fonte: Autor, 2022

Quadro 13 - Questões com linguagem não imperativa no enunciado

Título do Livro	Quantidade de Questões com Linguagem Não Imperativa Adotada no Enunciado
Conexões: Matemática e Suas Tecnologias (Estatística e Probabilidade)	86
Matemática: M (Coleção: Base) – Volume Único	99
Matemática: Padrões e Relações	60
Matemática: Interação e Tecnologia	29
Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade	48
Matemática Paiva 2	80
Matemática: Ciência e Aplicações	70
Matemática Interligada: Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade	52
Matemática: Contexto e Aplicações	55
Matemática: #Contato	57

Fonte: Autor, 2022

Entendemos que a resolução de questões e problemas por métodos diversos além do algoritmo poderá despertar a criatividade e a motivação dos estudantes. Também podemos perceber a presença de questões com linguagem imperativa adotada no enunciado, acreditamos que questões com essa formatação podem ser reduzidas.

2.4.3 Considerações Sobre o Trabalho

As dificuldades para elaborar o trabalho foram diversas. Podemos dizer que a dificuldade mais pertinente era relacionar cada uma das questões do objeto matemático em estudo com os níveis da taxonomia, visto que não encontramos nenhum trabalho em que pudéssemos nos orientar. Também apresentamos incertezas para compreender alguns itens que seriam usados para classificar as questões, por exemplo: o que vem a ser uma questão de contexto matemático e não matemático? O que quer dizer questão de matemática recreativa?

A partir da análise das obras podemos perceber que questões de **aplicações** de acordo com a Taxonomia de Bloom são as mais presentes, muitas vezes negligenciando questões dos outros níveis da taxonomia. Trabalhar questões e problemas nos outros níveis também é de fundamental importância, pois permitirá desenvolver outras habilidades e competências. Percebemos uma estruturação que se baseia no seguinte roteiro: apresentação dos conceitos, resolução de exemplos e a prática de exercícios de aplicação, mas não entramos na discussão sobre a eficiência ou não desse método de trabalho.

A resolução uma a uma das questões, também fez com que ampliássemos nossos horizontes com relação ao objeto puro matemático, em si, percebemos relações e aplicações até então não notadas apesar do tempo de atuação como docente. Essa experiência foi fascinante e nos alegrou muito.

Acreditamos que o nosso objetivo inicial foi alcançado, pois a realização desse trabalho permitiu uma maior aproximação com o tema e percebemos como as questões sobre o objeto matemático estão estruturadas nos livros analisados, logo a concretização desse trabalho, foi de fundamental importância.

2.5 CONSULTA A DOCENTES

No ano 2022, no decorrer do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UEPA, realizamos uma pesquisa onde foram consultados alguns docentes que atuavam como professores do ensino médio na rede pública no estado do Pará. Nosso objetivo principal com a realização da pesquisa e escrita do artigo, foi diagnosticar, sob a óptica desses docentes, as dificuldades de aprendizagem que alunos do 2º ano do ensino médio apresentam ao estudar o assunto Análise Combinatória. Também buscou-se compreender como os professores ensinam, os recursos que utilizam e como avaliam esse assunto.

Como técnica metodológica realizamos uma consulta bibliográfica sobre o objeto, e no trabalho de campo foram entrevistados no decorrer do mês de maio do ano 2022, 30 professores de matemática que atuavam no ensino médio da rede pública no estado do Pará, sendo destes, 23 professores lotados no município de Parauapebas, 2 em Conceição do Araguaia, 1 em Abaetetuba, 1 em Ananindeua, 1 em Canaã dos Carajás, 1 em Eldorado dos Carajás e 1 em Floresta do Araguaia. Como o instrumento utilizado para coletar os dados foi o Google Forms, facilitou que professores de diferentes regiões participassem da pesquisa respondendo o questionário.

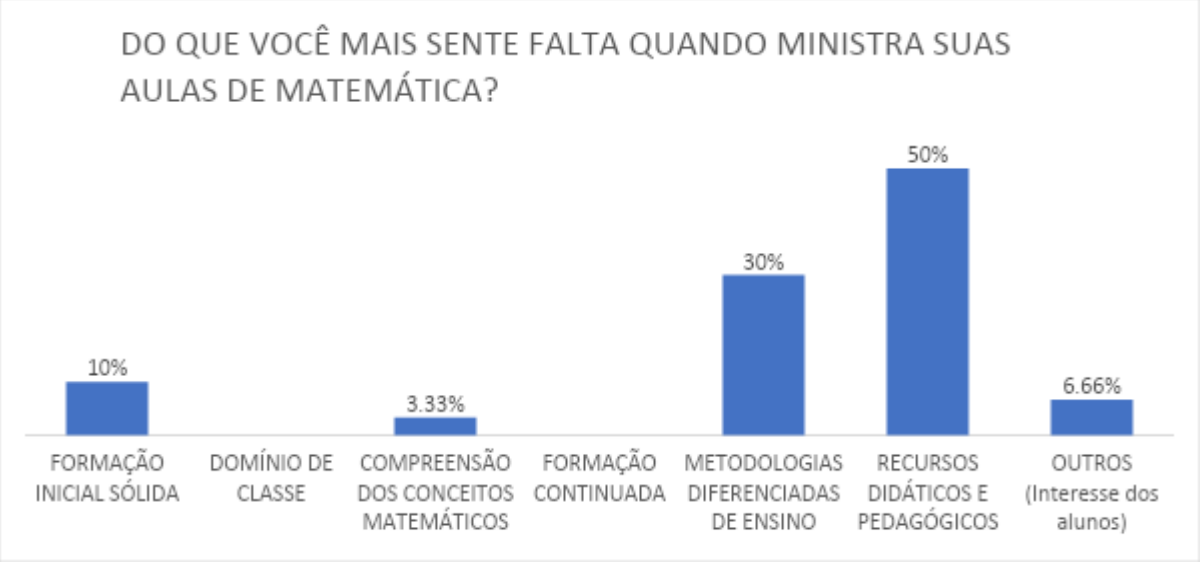
2.5.1 Perfil dos Docentes

Dentre os professores consultados 21 eram do sexo masculino e 9 do sexo feminino. A grande maioria estava na faixa etária entre 31 a 45 anos, representando 73,33% da amostra. Todos tinham o ensino médio completo, sendo que entre esses 73,33% estudaram o ensino médio regular e 16,66% magistério. Todos também tinham o ensino superior completo com habilitação em matemática. Entre os 30 professores que responderam ao questionário, 26 tinham curso de especialização, dos quais 23 deles fizeram especialização em educação matemática ou áreas afins. 5 dos professores entrevistados tinham mestrado na área de educação matemática ou áreas afins, e 3 estavam com mestrado em curso. Nenhum professor tinha doutorado ou estava cursando.

Sobre o tempo de atuação como professor, 60% dos entrevistados, afirmaram ter entre 6 a 15 anos de efetivo trabalho docente, já tendo uma boa experiência na área, esses conhecimentos acumulados são de fundamental importância na carreira, sendo que com o passar do tempo a experiência acumulada acaba influenciando diretamente na ação em sala de aula, sobretudo quando o profissional assume uma postura reflexiva sobre a própria prática. Comparando o tempo de atuação com a idade dos professores, podemos inferir que boa parcela dos mesmos começou a trabalhar assim que concluíram a graduação.

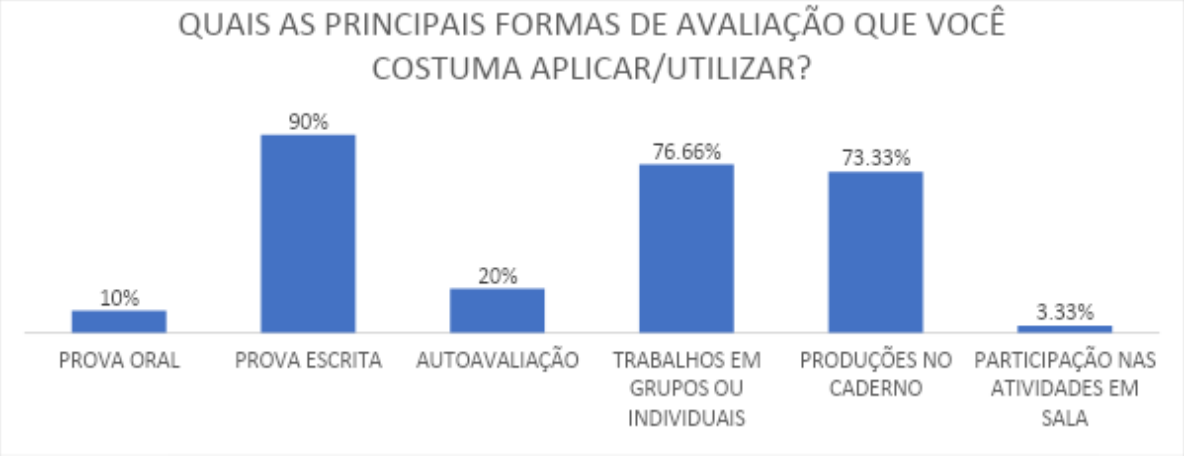
Nos gráficos abaixo expomos o resultado quando foi questionado aos professores do que mais sentiam falta ao ministrar suas aulas de matemática, quais as principais formas de avaliação que costumavam aplicar/utilizar e quais ações costumavam fazer para fixar o conteúdo ministrado. A partir da observação e análise dos gráficos podemos levantar algumas discussões e fazer algumas considerações.

Gráfico 2 - Necessidades sentidas pelos professores.



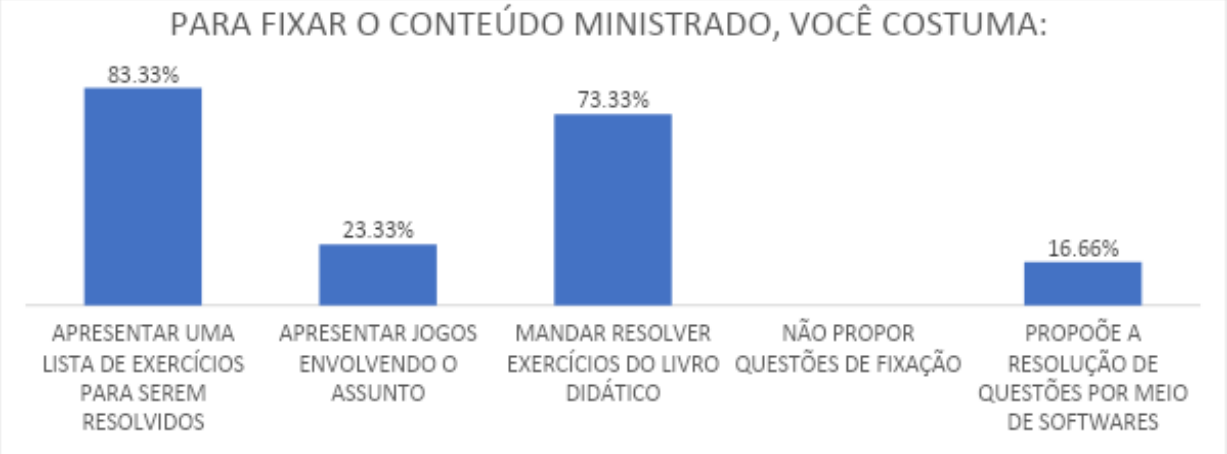
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 202

Gráfico 3 - Principais formas de avaliação utilizadas pelos professores.



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 202

Gráfico 4 - Práticas realizadas pelos professores para fixar o conteúdo.



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2022.

No gráfico 2 podemos notar que 50% dos professores entrevistados afirmaram que o que mais sentem falta ao ministrar suas aulas, é de recursos didáticos e pedagógicos, e 30% deles sentem falta de metodologias diferenciadas de ensino. Acreditamos que o resultado apresentado no gráfico 2, têm ligações com os resultados do gráfico 4, onde podemos notar que a grande maioria dos docentes, para fixar os conteúdos, apresentam uma lista de exercícios para serem resolvidos (83,33%) ou mandam resolver exercícios do livro didático (73,33%). Uma parcela bem menor dos professores, para ajudar na fixação dos conteúdos, faz uso de jogos envolvendo os assuntos estudados (23,33%) ou propõe a resolução de questões por meio de softwares (16,66%).

De acordo com os resultados apresentados, no ensino de Análise Combinatória, por Jacinto (2015), onde apresentou e avaliou os efeitos da manipulação de materiais concretos pelos alunos, por Rosas (2018), que adotou e desenvolveu uma sequência didática tendo como fundamento a Teoria das Situações Didáticas, o Ensino de Matemática por Atividades e o uso de jogos, e por Conceição (2019), onde aplicou uma sequência didática alicerçada na resolução de problemas e no uso de jogos, os resultados em ambos os trabalhos mostraram-se muito satisfatórios. Contudo podemos notar que o uso de jogos e/ou de softwares em sala de aula pelos docentes pesquisados, ainda é relativamente pouco explorado. Acreditamos que a inserção desses no ensino, poderia trazer mais dinamismo para as aulas e interferir positivamente nos resultados.

Na avaliação, podemos observar, de acordo com o gráfico 3, que 90% dos docentes pesquisados afirmaram usar a prova escrita como critério avaliativo, 76,66% utilizam trabalhos em grupos ou individuais e 73,33% avaliam também pela produção no caderno. Com isso podemos perceber certo esforço em avaliar de forma diferente do que predominou por muitos anos, no ensino tradicional. Estão sendo levados também em conta as produções individuais no caderno e os trabalhos em grupos. Vale ressaltar também que muitos professores estão submetidos a uma carga excessiva de atividades e trabalhos, não dispondo de tempo para se aperfeiçoarem melhor, muitas das nossas escolas ainda são muito carentes de estrutura e pessoal, e falta ainda treinamento para lidar com muitas tecnologias, todos esses fatos podem dificultar o uso de certos recursos no ambiente escolar.

Quando perguntado aos professores qual a frequência que a rede onde atuavam oferecia formação continuada, 40% responderam que muito raramente ou que não oferecia. Quando questionado qual a frequência que participavam dos

cursos de formação continuada ofertados pela rede onde trabalhavam, ou mesmo outras instituições, todos responderam que participavam frequentemente ou sempre.

Um fato curioso é que 70% dos professores não consideram a matemática uma disciplina difícil de ser ensinada, porém 86,66% afirmaram que apenas uma minoria dos seus alunos, gostam de matemática. 56,66% dos docentes consideram Números, o bloco de conteúdos mais importante nas aulas de matemática, a maioria desses afirmou que esse bloco representa a base para os demais blocos ou porque é o assunto mais presente na vida dos alunos, justificando assim sua importância. O segundo bloco de conteúdos mais importante, segundo 23,33% dos professores, é a Álgebra.

2.5.2 Dificuldades dos Alunos Sob a Óptica dos Professores

A tabela a seguir representa o grau de dificuldade que os alunos apresentam com relação à aprendizagem de conteúdos relacionados à Análise Combinatória, segundo a ótica dos 30 professores.

Tabela 1 - Grau de dificuldade apresentada pelos alunos quanto a aprendizagem dos conteúdos listados. (Continua)

Grau de Dificuldade / **Conteúdos**	Muito Fácil	Fácil	Difícil	Muito Difícil	Não Costumo Ensinar
História da Análise Combinatória	30%	36,66%	6,66%	3,33%	23,33%
Princípio Aditivo	16,66%	73,33%	10%	0%	0%
Princípio Multiplicativo	10%	66,66%	23,33%	0%	0%
Princípio Fundamental da Contagem	3,33%	70%	26,66%	0%	0%
Definição de Fatorial	6,66%	80%	13,33%	0%	0%
Propriedade Fundamental dos Fatoriais	3,33%	36,66%	56,66%	0%	3,33%
Definição de Permutação Simples	6,66%	76,66%	16,66%	0%	0%
Cálculo de Permutação Simples	6,66%	60%	33,3%	0%	0%
Definição de Permutação com Repetição	6,66%	40%	46,66%	3,33%	3,33%

Grau de Dificuldade / Conteúdos	Muito Fácil	Fácil	Difícil	Muito Difícil	Não Costumo Ensinar
Cálculo de Permutação com Repetição	3,33%	30%	63,33%	3,33%	0%
Definição de Permutação Circular	0%	16,66%	60%	6,66%	16,66%
Cálculo de Permutação Circular	0%	13,33%	60%	10%	16,66%
Definição de Arranjo Simples	3,33%	60%	33,33%	3,33%	0%
Cálculo de Arranjo Simples	0%	43,33%	50%	6,66%	0%
Definição de Combinação Simples	3,33%	50%	43,33%	3,33%	0%
Cálculo de Combinação Simples	0%	36,66%	60%	3,33%	0%
Distinção Entre Arranjo e Combinação	0%	16,66%	63,33%	20%	0%
Situações Problemas Sobre o Princípio Aditivo	0%	33,33%	56,66%	10%	0%
Situações Problemas Sobre o Princípio Multiplicativo	0%	30%	63,33%	6,66%	0%
Situações Problemas Sobre o Princípio Fundamental da Contagem	0%	30%	60%	10%	0%
Situações Problemas Sobre Permutação Simples	3,33%	23,33%	66,66%	6,66%	0%
Situações Problemas Sobre Permutação com Repetição	0%	23,33%	66,66%	10%	0%
Situações Problemas Sobre Permutação Circular	0%	6,66%	60%	16,66%	16,66%
Situações Problemas Sobre Arranjo Simples	0%	16,66%	70%	13,33%	0%
Situações Problemas Sobre Combinação Simples	0%	16,66%	73,33%	10%	0%
Situações Problemas Envolvendo Situações do Cotidiano que Aplicam os Conceitos de Análise	0%	13,33%	50%	33,33%	3,33%

Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2022.

A maioria dos conteúdos listados costuma ser ensinado pelos professores, sendo que, entre os que não costumam ser ensinados, estão, Definição de Permutação Circular (16,66%), Cálculo de Permutação Circular (16,66%), Situações Problemas Sobre Permutação Circular (16,66%) e a História da Análise Combinatória, que apresenta maior percentual (23,33%).

A experiência também tem nos mostrado que situações problemas envolvendo contagem circular, bem como seus conceitos e definições, representam um dos assuntos que os alunos têm mais dificuldade quando estudam Análise Combinatória, sendo também um dos assuntos que os professores menos trabalham.

A abordagem histórica no ensino dos conteúdos matemáticos pode despertar a curiosidade dos alunos, a motivação e dar sentido aos conteúdos, dessa maneira o seu uso pode potencializar o processo de ensino e aprendizagem, justificando assim, o uso dessa ferramenta didática. Bastos, Lopes, Victer (2020) apontam que:

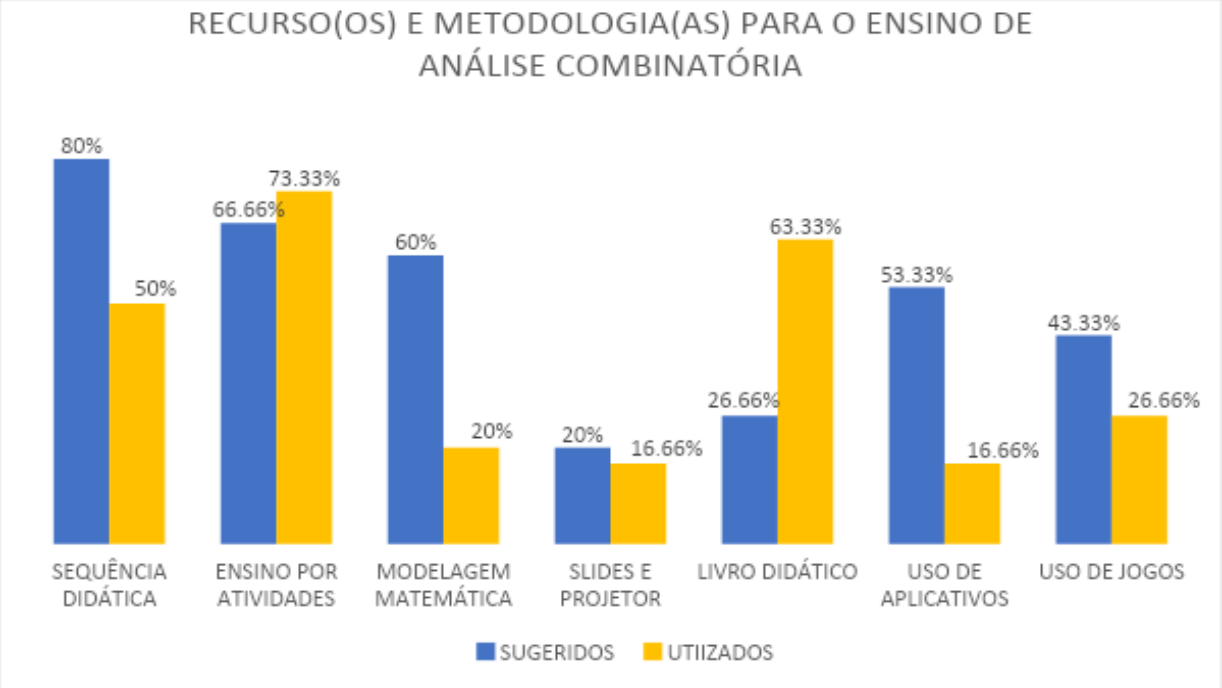
> Pensa-se que o ensino de Análise Combinatória associada a história pode contribuir para melhor aprendizagem. Contar a história da matemática não é só trazer fatos de forma mecânica para sala de aula, mas desenvolver a matemática com esses acontecimentos, relacionar a matemática com fatos sociais, culturais e políticos, uma matemática como criação humana, de fato, essencial para o desenvolvimento das sociedades.
> (Bastos, Lopes e Victer, 2020, p. 332)

Os Resultados apresentados na tabela, mostram que, segundo os professores, existe um equilíbrio entre os alunos que consideram a aprendizagem dos conteúdos “**Fácil”** ou “**Difícil”**, ou seja, os alunos que consideram a aprendizagem dos conteúdos, nos extremos, “**Muito Fácil”** ou “**Muito Difícil”**, representam uma minoria.

Entre os conteúdos considerados “**Fácil**” de ser aprendido, com percentual maior ou igual a 50%, destacamos: Princípio Aditivo, Princípio Multiplicativo, Princípio Fundamental da Contagem, Definição de Fatorial, Definição de Permutação Simples, Cálculo de Permutação Simples, Definição de Arranjo Simples e Definição de Combinação Simples. Entre os conteúdos classificados como “**Difícil**” pelos alunos, segundo a ótica dos professores, destacamos: Resolução de Situações Problemas Sobre Arranjo Simples (70%) e a Resolução de Situações Problemas Sobre Combinação Simples (73,33%). Resultados semelhantes já haviam sido encontrados por Rosas (2018) e Conceição (2019) em seus trabalhos e publicações.

O gráfico abaixo estabelece uma comparação quando foi perguntado aos professores sugestões de recurso(os) e metodologia(as), para tornar o ensino mais significativo, ao ensinar Análise Combinatória no 2º ano do ensino médio, e o(os) recurso(os) e metodologia(as) que os mesmos fazem uso, quando ensinavam esse assunto.

Gráfico 5 - Recurso(os)/metodologia(as) para tornar mais significativo, o ensino de Análise Combinatória



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2022

De acordo com o gráfico podemos notar que o recurso mais sugerido pelos professores para tornar o ensino de Análise Combinatória mais significativo é o uso de Sequências Didáticas, e a metodologia mais indicada é o Ensino por Atividades. Podemos notar também que a metodologia que mais fazem uso é o Ensino por Atividades, e o recurso predominante, é o livro didático. Observamos que esse último está entre os menos indicados pelos docentes, no entanto se desponta como o recurso mais empregado. A Modelagem Matemática e o uso de Aplicativos, apesar de serem bastante indicados pelos professores, ainda são relativamente pouco utilizados pelos mesmos, o mesmo acontece com o uso de Jogos.

A partir dessas análises percebemos certas distorções entre o que boa parte dos docentes consideram estimulante para o ensino de Análise Combinatória, e a prática dos mesmos. Contudo, devemos, mais uma vez ressaltar, que existem muitas limitações que fogem a alçada dos docentes, e que talvez possam impedir a

utilização de muitos recursos e metodologias diferenciadas no ensino. Essas questões merecem melhor investigação, cujo não faremos aqui, pois além de estarmos limitados temporalmente, fogem aos objetivos do trabalho.

2.6 MISCONCEPTIONS NO ESTUDO DO ASSUNTO ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nessa subseção apresentamos reflexões sobre alguns dos possíveis fatores que podem estar relacionados as dificuldades dos alunos ao estudarem o conteúdo Análise Combinatória no ensino básico, conteúdo esse inicialmente trabalhado nas séries iniciais do ensino fundamental, com as noções de princípio aditivo e princípio multiplicativo, e aprofundado no 2º ano do ensino médio com a apresentação de outras técnicas e procedimentos de contagem.

A palavra **misconception**, em inglês, traduzida para a língua portuguesa, significa **equívoco**, ou seja, apresentaremos alguns equívocos (ou conceitos errôneos) cometidos pelos alunos ao estudarem o assunto Análise Combinatória, refletindo sobre as possíveis causas desses equívocos e seus efeitos.

Cury (2007), no livro “Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos”, apresenta a importância da análise dos erros cometidos pelos discentes, tanto como abordagem de pesquisa, como metodologia de ensino. Excetuando-se os erros cometidos por desatenção ou descuido, muitas vezes, os erros cometidos refletem concepções e crenças adquiridos ao longo da vida, nessa ótica, a análise dos erros constitui-se em um importante instrumento pedagógico para o professor.

Nesse sentido, destacamos a importância pedagógica dos erros cometidos pelos alunos - e da reflexão acerca desses - durante o processo de ensino e aprendizagem. Inserindo nesse contexto, reforçando essa ideia, trazemos a afirmação de Cortella (2017):

> Só seres que arriscam erram. Não confunda erro com negligência, desatenção e descuido. Ser capaz de arriscar é uma das coisas mais inteligentes para mudar. Você não tem de temer o erro. Tem de temer a negligência, a desatenção e o descuido. Erro é para ser corrigido, não para ser punido. O que se pune é negligência, desatenção e descuido. [...] (Cortella, 2017, p. 27)

Assim, o objetivo, nessa subseção, é apresentar, por meio da nossa experiência e tendo também como base a consulta de trabalhos sobre análise de erros, alguns equívocos identificados no estudo do assunto Análise Combinatória, buscaremos também identificar suas possíveis causas.

Encontramos nos trabalhos de Bataner, Godino e Navarro-Pelayo (1996), relatos sobre uma pesquisa realizada na Espanha, com 720 alunos com idades entre 14 a 15 anos, em que 352 haviam recebido instruções em combinatória e 368 não haviam recebido, onde, por meio da aplicação de um questionário com 13 questões, tinham como um dos objetivos do trabalho avaliar fatores com potencial influenciador no processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Na análise das respostas, os autores identificaram que os principais erros cometidos pelos discentes estavam relacionados a: trocar o modelo matemático na resolução dos problemas; erro no ordenamento, ou seja, não considerar a ordem dos elementos quando essa é importante, e vice versa; erros relacionados a repetição dos elementos (não repete quando é permitido e repete quando não é permitido); confundir os tipos de objetos; enumeração não sistemática; erros relacionados a intuição; identificar qual modelo usar (fórmula), mas errar na configuração da mesma; não associar corretamente os números que aparecem nos problemas com os parâmetros das fórmulas usadas nas resoluções; erro na interpretação e/ou construção do diagrama de árvore; confusão entre os tipos de subconjuntos e erro na quantidade de partições dos subconjuntos formados.

No quadro a seguir apresentamos, sob o nosso ponto de vista, algumas misconceptions observadas ao ser trabalhado o assunto Análise Combinatória e algumas das possíveis causas.

Quadro 14 – Misconceptions no Estudo de Análise Combinatória

Equívocos Cometidos no Estudo do Assunto Análise Combinatória	**Possível Origem das Misconceptions**
Dificuldades na compreensão dos conceitos.	Introdução Inadequada e Acesso Empobrecido do Assunto.
Na resolução de questões envolvendo o PFC, somar as etapas dos acontecimentos distintos, em vez de multiplicar.	Introdução Inadequada do Assunto e Interpretação Aligeirada.
Não saber diferenciar questões que devem ser resolvidas usando arranjo ou combinação.	Introdução Inadequada do Assunto, Apresentação Errônea e Interpretação Aligeirada.
Dificuldades na interpretação e resolução das questões.	Interpretação Aligeirada e Falta de Domínio da Língua Portuguesa.
Erro no uso das fórmulas e ao desenvolver os cálculos.	Acesso Empobrecido do Assunto e Não Domínio de Conteúdos Estudados em Anos Anteriores.

Fonte: Autor, 2023

Para compreender melhor algumas das possíveis causas das misconceptions apresentadas, podemos recorrer aos resultados do trabalho apresentado por Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), onde os mesmos concluíram, ao estudar resoluções de questões relacionadas a combinatória de alunos de licenciatura em matemática de quatro universidades baianas, que muitos ainda apresentavam diversas dificuldades ao responderem questões envolvendo o assunto análise combinatória.

Considerando que muitos professores tentem a utilizar no processo de ensino as mesmas técnicas e procedimentos a que foram expostos quando eram alunos, e também levando em conta que muitos docentes tendem a abandonar, e não trabalhar, ou trabalhar de maneira resumida, os conteúdos que os mesmos têm mais dificuldades, podemos considerar que essa pode ser uma das possíveis causas das misconceptions apresentadas pelos alunos aos estudar o conteúdo Análise Combinatória.

Também podemos considerar que muitas das misconceptions apresentadas pelos alunos ao estudar o assunto Análise Combinatória têm a ver com o que diz Sá (2019), ao afirmar que em grande parte da vida estudantil, principalmente durante o ensino básico, os discentes constroem ideias a partir de ações, diversas pesquisas têm mostrado que não é esse o movimento que acontece nas salas de aulas, tendo em vista que o método tradicional de ensino, onde privilegia-se a construção de ideias a partir de ideias, ainda é muito utilizado por uma grande parte dos professores.

Corroborando com esse pensamento Bataner, Godino e Navarro-Pelayo (1996), analisando os resultados de trabalhos realizados por Fischbein (1975), afirmam que a capacidade de resolver problemas combinatórios, nem sempre são alcançados no nível das operações formais, se não houver um processo de ensino específico. Afirmamos assim, que essa pode ser uma das causas das interpretações errôneas e fonte de diversas dificuldades apresentadas pelos discentes.

Nas próximas subseções, apresentaremos alguns resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória usando diferente recursos, metodologias, técnicas e instrumentos, escrevemos sobre resolução de problemas e apresentamos nossa Sequência Didática.

3. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORE

Nessa seção, correspondente a segunda fase da Engenharia Didática, escreveremos sobre as teorias que dão sustentação à Sequência Didática elaborada para o ensino do assunto Análise Combinatória. Também detalharemos cada um dos componentes da sequência, as atividades e o teste que será aplicado antes e após o trabalho com as atividades, as Análises Prévias contribuíram para a fundamentação dessa seção.

3.1 PESQUISAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Em um trabalho realizado por Silva (2016), em que buscou analisar a abordagem da combinatória em documentos oficiais, a saber, PCN dos anos iniciais e finais do ensino fundamental (BRASIL, 1997 e 1998) e Parâmetros Curriculares de Matemática para Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), analisar resultados de pesquisas sobre o tema e a apresentação do assunto em coleções de livros didáticos do ensino fundamental, entre os resultados encontrados, a autora constatou que existem consonâncias, em diversos aspectos, entre as orientações nos documentos oficiais analisados e a apresentação dos conteúdos sobre o tema nas coleções de livros avaliados.

Outro fator observado por Silva (2016), foi que os documentos oficiais trazem orientações de abordagens ao se trabalhar esse assunto, com ideias preliminares, desde os anos iniciais do ensino fundamental. Nesse sentido orientam que sejam trabalhadas diferentes estratégias de resolução, tendo em vista que o aprendiz possa usar, nos anos finais do ensino fundamental, o Princípio Fundamental da Contagem, sem necessariamente que haja apego ao uso de fórmulas.

Apesar da importância do conhecimento desse tema e da variedade de problemas que podem ser solucionados por meio do domínio e do uso de diferentes técnicas e métodos de contagem de agrupamentos, ainda é perceptível muitas dificuldades ao serem apresentados e trabalhados os conteúdos relacionados a esse objeto matemático. Muitos equívocos e interpretações errôneas ainda são bastante notáveis, antes, durante e após ser trabalhado esse assunto em sala de aula. Esses equívocos existem, até mesmo, entre estudantes universitários de cursos de Licenciatura em Matemática.

Em um artigo de Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), onde os mesmos, tendo como base teórica a Taxonomia dos Objetivos Educacionais e trabalhos de

análise de erros, buscaram identificar, por meio da análise de resoluções relacionadas a Análise Combinatória de 198 estudantes de quatro universidades baianas, o que eles compreendiam de conceitos de combinatória, se sabiam diferenciar arranjo de combinação, que estratégias de resolução empregaram e os erros cometidos. Concluíram que estudantes universitários de 3º e 8º semestres ainda apresentavam dificuldades conceituais e procedimentais com respeito à combinatória.

Analisando pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, Silva (2016), constatou que alunos, desde cedo, utilizando desenhos, listagem das possibilidades e diagramas de árvores, são capazes de resolver problemas relacionados a esse assunto. No entanto, também foi constatado que alguns obstáculos de resolução relacionados à compreensão dos invariantes operatórios, precisam ser superados. A utilização de metodologias que explicitem sistematicamente esses invariantes, o esgotamento de possibilidades e a organização e entendimento de estratégias de resolução, precisam ser estimulados.

Com base na nossa experiência ao trabalhar esse conteúdo e observações feitas em pesquisas sobre o tema, com relação aos alunos, os equívocos podem ter origens diversas. A incompreensão dos invariantes, a dificuldade em interpretar os problemas relacionados, extrair as informações necessárias, montar uma estratégia de resolução e validar as respostas encontradas, podem ser considerados grandes desafios para os discentes.

Jacinto (2015) apresenta e avalia uma proposta de trabalho onde utiliza a produção e o manuseio de matérias concretos para o estudo do conteúdo Análise Combinatória. Utiliza em seus fundamentos, a teoria Construtivista, onde é valorizado a interação entre o ser que aprende, o ambiente, o meio social e o objeto estudado. Com o objetivo de investigar os efeitos da implantação do procedimento de ensino, foram analisados os resultados alcançados em três turmas do 2º ano do Ensino Médio diferentes, sendo que a proposta diferenciada foi executada em apenas uma delas.

Na pesquisa de Jacinto (2015), os alunos que participaram da pesquisa estavam situados dentro da faixa etária esperada para o ano escolar, foi aplicado o mesmo questionário em todas as turmas, tinham o mesmo professor e foi executado o mesmo planejamento, ou seja, uma das diferenças fundamentais foi na estratégia de ensino adotada. Ao final do trabalho foi possível constatar, por meio da aplicação de questionários e análise dos resultados, a viabilidade da proposta.

Até o surgimento nos anos 60 do Movimento da Matemática Moderna, o ensino de Matemática esteve centrado fortemente nos conteúdos, a partir desse movimento fatores psicológicos e individuais passaram a ser levados em conta e os objetivos gerais desse ensino foram reformulados. Contudo, apesar desse movimento representar um importante marco, ainda alguns fatores foram negligenciados, e as reformas posteiros tentaram (e tentam) sanar essas dificuldades.

3.2 PESQUISAS SOBRE O USO DE ATIVIDADES EXPERIMENTAIS NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ÂMBITO DA UEPA

Rosas (2018) desenvolveu um estudo onde buscou avaliar os resultados da implementação de uma Sequência Didática diferente da tradicional sobre o desempenho e participação dos discentes na resolução de questões de Análise Combinatória. Para tal, teve como base a Teoria das Situações Didáticas de Brosseau (1996), o Ensino de Matemática por Atividade segundo Sá (2009) e o uso de jogos. Como metodologia de pesquisa adotou a Engenharia Didática, onde, na fase da experimentação, foi realizada uma consulta a 32 alunos, do 1º ano do ensino médio, no município de Nazaré-PA.

Ao final da sua experiência é relatado por Rosas (2018) que houve uma melhora muito significativa se comparados os resultados iniciais com os do Pós-teste, onde, 62,5% dos discentes que participaram ativamente da pesquisa obtiveram percentual de acertos maior ou igual a 60% das questões, sendo que no Pré-teste apenas dois alunos, ou seja, 6,25%, identificados como A_9 e A_{10}, acertaram 3 questões e 1 questão, respectivamente, de um total de 10 questões.

Outro fator destacado pelo autor, e que, segundo ele, pode ter influenciado nos resultados finais do Pós-teste foram as faltas de alguns alunos nas atividades, essas faltas fizeram com que o resultado final de alguns não fosse tão bom quanto o da maioria da turma. No entanto, no geral, os resultados do Pós-teste foram muito satisfatórios se levarmos em conta os resultados atingidos no Pré-teste.

Em sua conclusão também é evidenciado por Rosas (2018), que fatores como gostar de matemática, dificuldade na disciplina, distrações durante as aulas, frequência e regularidade de estudos, se alguém os ajuda nas tarefas de matemática e nível de escolaridade dos responsáveis, pouco influenciaram nos resultados dos testes, indicando as correlações fraca ou ínfima, essa conclusão foi possível devido

os testes estatísticos de correlação realizados. Assim, o resultado satisfatório pode ser atribuído destacadamente à metodologia de ensino adotada.

Para esse autor, o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina é um dos que mais causam dificuldades, tanto para os alunos quanto para muitos professores. Nessa ótica, afirmamos que é necessário e urgente buscar alternativas educacionais, particularmente, sobre o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, visando auxiliar os professores e melhorar o desempenho dos alunos no estudo desse conteúdo, extremamente necessário e com muitas aplicações, tanto na vida prática, quanto na própria matemática. Durante sua experiência docente é relatado por Rosas (2018):

> Durante minha experiência profissional em sala de aula, pude perceber que o educando não desenvolve habilidade nos processos que dizem respeito à percepção, não mostram interesse por questões que não fazem parte do seu dia a dia e com isso não consegue compreender o processo de contagem em sua total plenitude, ou seja, não constrói um conhecimento significativo para desenvolver as atividades combinatórias. Outro motivo que me levou a investigar o ensino de Análise Combinatória, com mais intensidade, é o fato de muitos professores de Matemática relatar que têm antipatia pela disciplina.
> (Rosas, 2018, p. 18)

Dessa maneira, o Ensino de Matemática e o papel do Professor de Matemática, também precisam ser ressignificados, como afirma Rosas (2018):

> Hoje os alunos são bem diferentes dos de antigamente, e o bom professor também. Explicar bem, manter a disciplina, avaliar com correção, eram e continuam sendo importantes, mas é mais importante que o professor permita que seus alunos construam, eles próprios, o seu saber. Na concepção atual, o professor orienta seus alunos em suas descobertas, estimulando-os em suas conclusões e sugerindo passos futuros. Nada de só explicar tudo bem direitinho ou dar tudo pronto e acabado.
> (Rosas, 2018, p. 27)

Para Conceição (2019) ainda é baixa a produção acadêmica de pesquisas voltadas para o desenvolvimento de métodos de ensino de Análise Combinatória nas escolas. Em sua dissertação intitulada: “O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Atividades”, é apresentada uma sequência didática no qual a resolução de situações-problemas e o uso de jogos são tidos como ponto de partida, analisando os possíveis efeitos que essa vertente pode acarretar.

Nesse sentido além de fornecer um panorama geral sobre a educação, currículo, ensino de Análise Combinatória e interpretações metodológicas, o autor proporciona reflexões acerca dos resultados de uma pesquisa realizada com 82 alunos em 3 turmas do Ensino Médio, em uma escola de periferia no município de

Ananindeua-PA. A metodologia de pesquisa adotada foi a Engenharia Didática. Para Conceição (2019):

> A Análise Combinatória, enquanto componente curricular do Ensino Médio, tem se configurado como um tema de grande obstáculo para os alunos. A maneira como são abordados os conteúdos de Análise Combinatória é o maior causador de dúvidas nos alunos, não se encaixando perfeitamente nos parâmetros das propostas curriculares.
> (Conceição, 2019, p. 33)

Ainda segundo Conceição (2019) a forma mecânica como são ensinados os conteúdos, onde é muito valorizado a memorização e aplicação de fórmulas, além de estar levando os discentes a resolverem os problemas sem entenderem os processos, têm feito com que os mesmos também apresentem insegurança no processo de resolução. Para ele é preciso estimular no aluno o uso da contagem para a resolução de problemas, nesse sentido o uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é uma alternativa eficaz que poderá aproximar a matemática do aluno.

Em suas considerações finais Conceição (2019) aponta um avanço e uma melhora significativa dos alunos com relação a aprendizagem do conteúdo Análise Combinatória, podemos também chegar a essa conclusão ao analisar e comparar os resultados alcançados na resolução dos problemas durante o pré-teste e o pós-teste. Contudo, ele também destaca que a maioria das questões foi solucionada pelos alunos sem o uso de fórmulas, e afirma que a utilização dos jogos e das atividades também está ligada ao aumento na porcentagem dos acertos.

No estudo de Conceição (2019), também é preciso ponderar, que durante a realização do Pós-teste, foi requerido aos alunos que não deixassem questões em branco, pois poderia ser usado algo que estivesse na resolução, na avaliação bimestral da escola, esse fato pode ter influenciado para que a porcentagem de questões deixadas em branco caísse para 0%, um resultado extremamente acima da média se comparado com os resultados do Pré-teste.

3.3 ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Diante das dificuldades encontradas, e frequentemente relatadas, tanto por professores quanto por alunos durante o processo de ensino e aprendizagem da disciplina Matemática, bem como dos resultados muitas vezes frustrantes nas avaliações internas e externas, faz-se necessário refletir sobre esses processos

numa busca constante de aperfeiçoa-los, tendo em vista sempre a melhora nos resultados.

Nesse sentido, alguns estudos vêm sendo desenvolvidos sobre o ensino e aprendizagem de Matemática por meio de Atividades Experimentais, e também sobre o uso de diferentes metodologias, diferentes estratégias, recursos e instrumentos, e seus efeitos nesses processos. Iremos tratar nessa seção sobre o ensino do assunto Análise Combinatória por meio de Atividades Experimentais.

Nas pesquisas desenvolvidas por Rosas (2018) e Conceição (2019) onde eles analisaram os efeitos da inserção de uma sequência didática diferente da tradicional, por meio de um conjunto de Atividades Experimentais e do uso de jogos, para o ensino do assunto Análise Combinatória no ensino médio, ambos concluíram que as sequências de atividades traziam consideráveis resultados positivos. Esses resultados reforçam a inclusão de Atividades Experimentais no ensino de matemática.

Diversos e importantes estudos têm revelado que o ensino de Matemática por meio de Atividades Experimentais vem se mostrando bastante promissor, particularmente sobre o conteúdo Análise Combinatória. Para Sá (2019, p. 11) “o processo pedagógico será muito beneficiado sempre que ações precederem as ideias”. Nesse sentindo, podemos conjecturar que grande parte dos resultados negativos revelados nos resultados de avaliações internas e externas, podem estar relacionados aos métodos de ensino adotados, visto que o método: apresentação das ideias e conceitos, exemplos, teoremas/propriedades e questões de fixação, ainda é o mais presente nos livros didáticos e predominante na interação pedagógica nas salas de aulas entre professores e alunos.

3.3.1 Considerações Teóricas Sobre o Ensino de Matemática Por Atividades Experimentais

Em uma palestra proferida no ano 2022 durante a I Semana de Matemática promovida pelo Centro de Formação de Profissionais de Educação Básica do Estado do Pará (CEFOR-PA), onde foi abordado sobre “As tendências do Ensino de Matemática na Sala de Aula”, Sá destacou as seguintes vantagens do ensino por Atividade Experimentais:

> *A ação precede a ideia;
> *Permite a vivência do método científico;
> *O aluno aumenta sua autoestima com relação à matemática;
> *As regras são o final da História;
> *A interação entre os discentes é maior.
> (Sá, 2022)

No ensino de matemática por meio de Atividades Experimentais o aluno assume um papel de protagonista, enquanto o professor, na maior parte do tempo, deverá organizar o processo e assumir a função de instigar as ações de exploração a serem realizadas pelos próprios alunos. Para Fossa (2020) a construção e consolidação dos esquemas mentais do aprendiz são potencializados em face às atividades pedagógicas centradas nos próprios alunos e em suas próprias iniciativas.

Segundo Sá, Mafra e Fossa (2022) existem diferentes perspectivas quanto ao enfoque do ensino por Atividades Experimentais, eles mencionam as seguintes: **redescoberta**, **conceituação**, **experimento** e **demonstração**; para eles cada aspecto apresenta características próprias, no entanto, estão intrinsecamente ligados. Para Sá (2019) quanto ao objetivo temos as atividades de **redescoberta** ou **conceituação**, e quanto ao modo de desenvolvimento temos as atividades de **demonstração** ou **experimental**. Refletir sobre esses pontos é fundamental para traçar os objetivos específicos de cada atividade.

Com relação as atividades de conceituação, Sá (2019) escreve que:

> Uma atividade de conceituação tem como objetivo levar o estudante a perceber a ocorrência de determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático. A definição deste objeto percebido é o objetivo da atividade de conceituação.
> (Sá, 2019, p. 17)

Sá, Mafra e Fossa (2022, p. 3) referindo-se às atividades de conceituação afirmam que “esse tipo de atividade geralmente procura levar o estudante a reconhecer um determinado conceito matemático numa situação vivenciada”. Para que o estudante obtenha um entendimento mais profundo do conceito identificado, a partir de suas observações, o professor poderá sintetiza-lo e esclarece-lo procurando induzir o estudante a organizar suas constatações e relacionar os novos conceitos adquiridos com os já existentes em sua base cognitiva.

Em se tratando das atividades de redescoberta, Sá (2019) afirma que:

> Uma atividade de redescoberta tem como objetivo levar o estudante a descobrir uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática. Uma atividade de redescoberta não corresponde a uma demonstração de um resultado matemático, mas sim ao momento de exploração do objeto que antecede a demonstração do resultado.
> (Sá, 2019, p. 17)

Sobre o ensino por Atividades Experimentais e a técnica da redescoberta Sá, Mafra e Fossa (2022) escrevem o seguinte:

> De fato, a técnica da redescoberta é intimamente relacionada ao ensino por Atividades Experimentais e a junção das duas perspectivas pode potencializar tanto a compreensão dos conceitos matemáticos, quanto o desenvolvimento de habilidades de expressão gráfica e/ou simbólica desses conceitos.
> (Sá, Mafra e Fossa, 2022, p. 3)

Ainda segundo Sá (2019), na condução de uma atividade de **demonstração**, o discente deve registrar os resultados enquanto o professor realiza as ações, a partir desses registros os estudantes devem refletir sobre esses resultados e espera-se que chegue ao objetivo previamente planejado pelo professor para a atividade. É aconselhável que a condução de atividades nessa perspectiva, seja realizada quando envolver a manipulação de materiais muito caros, matérias que possam ser danificados, que possam machucar ou molhar os participantes.

No desenvolvimento de uma atividade **experimental** o docente organiza as atividades e elabora o experimento que deve ser realizado pelos próprios alunos. Para Sá (2019) tanto as atividades de **demonstração** quanto **experimental** podem servir como base para a **conceituação** ou **redescoberta**.

O desenvolvimento de uma aula por meio de atividades deve permitir discussões sobre a busca de respostas e a produção do conhecimento matemático, não apenas sobre o conhecimento matemático em questão. Nesse sentido é importante que as situações propostas a serem realizadas pelos aprendizes, estimulem a reflexão, a compreensão e a análise, e estejam organizadas dentro de um gradativo grau de dificuldade.

Na condução de uma aula na perspectiva do ensino por Atividades Experimentais devem ser incluídos elementos que potencializem o refinamento e o desenvolvimento de hipóteses, bem como podem despertar a atenção dos discentes às relações encontradas entre os conceitos que estão sendo trabalhados. Assim, elementos como a demonstração, a simulação, a experimentação e a visualização, podem, e devem, ser incluídos.

3.3.2 Descrição Resumida dos Momentos da Aula Conduzida na Perspectiva de Atividades Experimentais

Na literatura sobre o tema podemos encontrar também recomendações para o planejamento de uma aula de Matemática que será conduzida a partir de Atividades Experimentais. Assim, por exemplo, na organização de uma aula desenvolvida por uma atividade de conceituação ou redescoberta, em Sá (2019) e em Sá, Mafra e Fossa (2022), encontramos orientações sobre os seguintes

momentos durante a aula: **organização**, **apresentação**, **execução**, **registro**, **análise** e **institucionalização**.

* **Organização:** Deve ser feita preferencialmente em grupos de 2 a 4 alunos. Entre outras vantagens, esse tipo de organização permitirá maior interação e engajamento entre os discentes;

* **Apresentação:** O professor distribui, ou apresenta na lousa, as orientações para o desenvolvimento das atividades;

* **Execução:** Corresponde a etapa da experimentação na pesquisa científica. Nesse momento as atividades devem ser executadas pelos alunos. Nesse instante recomenda-se que o professor deixe os alunos desenvolverem livremente as atividades, fique atento a possíveis distrações e tire cuidadosamente as dúvidas dos alunos quando solicitado por eles;

* **Registro:** Equivale a sistematização das informações nos espaços que devem ser previamente destinados pelos professores;

* **Análise:** Os alunos devem analisar as informações registradas; espera-se que nesse momento cheguem a uma relação válida e desejada;

* **Institucionalização:** Etapa primordial, onde devem ser elaboradas as observações e conclusões das atividades pelos alunos, com o auxílio e participação do professor.

Além dos momentos relacionados acima, assim como no desenvolvimento de toda e qualquer atividade pedagógica, um outro cuidado que se deve ter, é com o planejamento cuidadoso da aula e das atividades que serão executadas.

Sá, Mafra e Fossa (2022) destacam os seguintes instantes no planejamento de uma atividade de conceituação de acordo com os momentos descritos anteriormente: **determinação ou seleção dos conceitos**; **elaboração do objetivo da atividade**; **elaboração dos procedimentos da atividade**; **seleção do material**; **elaboração do espaço de registro**; **previsão de observações**; **previsão de institucionalização**; **elaboração de um roteiro**; **verificação se o roteiro permite chegar à observação desejada**; e a **finalização**.

O planejamento de uma atividade de redescoberta segundo Sá, Mafra e Fossa (2022), devem passar pelos seguintes instantes: **determinação do resultado desejado**; **construção do objetivo**; **a produção do material**; **elaboração do procedimento**; **elaboração do espaço de registro**; **elaboração do desafio**; **verificação**; **previsão da institucionalização**; e **elaboração do roteiro**.

De acordo com Sá (2022) deve-se evitar que o desenvolvimento de uma atividade ultrapasse duas aulas consecutivas, é importante que o professor trabalhe com os alunos a elaboração da primeira conclusão e recomenda-se que o professor tenha mais de uma atividade além da prevista para aquela aula em virtude das peculiaridades de cada turma e dos imprevistos que podem acontecer.

3.4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas em aulas de matemática é uma vertente que tem se mostrado bastante eficiente para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina. Ela vai além da simples memorização de fórmulas, aplicação de algoritmos e cálculos mecânicos, podendo permitir que os alunos desenvolvam habilidades cognitivas essenciais, como o raciocínio lógico, o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de aplicar conceitos matemáticos em situações do mundo real.

Inicialmente precisamos refletir sobre o que significa um Problema e o que seria a Resolução de Problemas em Aulas de Matemática. Sá (2021) fazendo uma análise de diferentes significados atribuídos por pesquisadores da área educacional para esses termos, considera que:

> Como vimos a palavra problema é devidamente associada a uma situação que uma pessoa ou um grupo de pessoas se sentem incomodadas e buscam encontrar uma maneira de superar a situação estabelecida e não conhecem como alcançar o resultado desejado. Desse modo, uma dada questão poderá ser um problema para uma pessoa ou um grupo de pessoas e não ser um problema para as pessoas que não se sentem incomodados com a situação ou não desejam encontrar uma solução para a mesma. (Sá, 2021, p. 13)

Podemos sugerir que Sá (2021), não restringi um problema a uma situação matemática e que uma dada situação para ser considerada um problema deve apresentar duas características fundamentais. Em primeiro lugar a situação **não deve ainda possuir um caminho pré-definido conhecido para o processo de resolução** e, em segundo lugar, quem se depara com a situação **deve sentir-se inclinado para resolve-la**, ou seja, deve se sentir provocado.

Os PCN estabelecem que o desenvolvimento da capacidade para Resolver Problemas seja um dos objetivos a serem alcançados quanto ao trabalho com a disciplina matemática. Segundo Sá (2021) esse documento faz menção, em vários pontos dos seus Objetivos Gerais de Matemática Para o Ensino Fundamental, de maneira direta ou indireta, à Resolução de Problemas. Segundo esse autor essa expressão aparece com pelo menos dois significados no documento, **como uma**

alternativa para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem e **como uma habilidade a ser desenvolvida**.

Encontramos nos PCN quando estabelece os Objetivos Gerias do Ensino Fundamental, um desses Objetivos estabelece o seguinte:

> questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.
> (Brasil, 2001, p. 8)

Sobre os Objetivos Gerais de Matemática Para o Ensino Fundamental, nos PCN, três desses objetivos estabelecem:

> - Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas; [...]
> - Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis; [...]
> - Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.
> (Brasil, 2001, p. 51 e 52)

Nos objetivos destacados percebemos explicitamente menções à Resolução de Problemas como um dos objetivos almejados quando se ensina matemática, tanto com uma alternativa metodológica como uma habilidade a ser desenvolvida. Nos objetivos destacados também percebemos a importância dada a interação, a cooperação, ao respeito a diversidade de pensamentos e ao desenvolvimento de trabalhos em grupos.

Sobre a diferença entre um Problema e Problema Matemático Dante (apud Sá, 2021) escreve o seguinte.

> - **Problema:** é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la;
> - **Problema Matemático:** é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la. Dante (apud Sá, 2021, p. 11)

No contexto da sala de aula, sobre a diferença entre Exercício e Problema, de acordo com Sá (2021), um Exercício é caracterizado por uma situação em que já se tem um (alguns) caminho(os), por mais trabalhoso que seja, para solucioná-lo, essa característica ajuda a diferenciar um Exercício de um Problema. Portanto, uma dada

situação pode ser considerada um Problema ou um Exercício, dependendo somente de quem o esteja respondendo, isso é, dos conhecimentos existentes em sua base cognitiva.

Quando propomos uma dada situação para que os nossos alunos possam responder em sala de aula, não temos como saber, inicialmente, se os discentes dominam um procedimento ou técnica que leve a solução da mesma. Pode acontecer também que alguns alunos dominem determinados procedimentos que levem a solução, nesse caso, para esses alunos, a situação proposta se constitui em um Exercício, e outros alunos podem não saber ainda nenhum procedimento que leve a solução, nesse caso, para esses alunos, a situação proposta representa um Problema. Portanto, para romper essa dicotomia, podemos denominar cada situação proposta simplesmente como **Questão**, visto que, independentemente de possuir o ferramental necessário para solucionar ou não, quer seja um Problema ou um Exercício, o enunciado das situações propostas, sempre terão a forma de Questões.

Nesse sentido, segundo Sá (2021), o ideal é que todas a situações propostas representem meramente exercícios para o professor durante todo o processo pedagógico. Por outro lado, no início do trabalho pedagógico de um determinado conteúdo, espera-se que as questões propostas para a maioria dos estudantes, representem problemas, e, no final, os alunos tenham adquirido competências para solucioná-los, portanto, para a maioria dos estudantes, no final do trabalho pedagógico, espera-se que as questões propostas representem apenas exercícios.

Nas aulas de matemática, a Resolução de Problemas desempenha um papel essencial ao conectar conceitos abstratos da disciplina com aplicações práticas no mundo real. Através da exploração ativa de desafios matemáticos, os alunos não apenas adquirem um entendimento mais profundo dos princípios matemáticos, mas também aprendem a aplica-los de maneira mais eficaz para resolver uma variedade de situações da vida cotidiana. Quando os alunos são desafiados a Resolver Problemas, eles não apenas aplicam fórmulas, mas também desenvolvem a capacidade de modelar situações complexas, identificar padrões, construir argumentos lógicos e buscar soluções criativas.

Sobre a condução do trabalho em sala de aula com foco na Resolução de Problemas, os PCN trazem a orientação que Resolver um Problema não se trata apenas de compreender o que foi proposto e dar uma resposta aplicando procedimentos adequados, apesar de ser importante, precisamos destacar que, isso

somente, não garante que o conhecimento envolvido foi apropriado. Segundo esse documento:

> Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testas seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução.
> (Brasil, 2001, p. 45)

Baseando-se em trabalhos já realizados sobre o tema, Sá (2021) destaca que ao trabalhar utilizando a Resolução de Problemas em sala de aula podemos adotar diferentes concepções para embasar o processo, entre os quais destaca: A Resolução de Questões Como Objetivo, a Resolução de Questões Como Processo e a Resolução de Questões Como Ponto de Partida. Faremos a seguir um breve resumo sobre cada uma dessa perspectivas.

- **Resolução de Questões Como Objetivo**

Nessa concepção entende-se que desenvolver a capacidade para resolver problemas é um dos principais objetivos do processo de ensino e aprendizagem da disciplina matemática. Na condução do trabalho compreende-se ser suficiente ao processo de ensino e aprendizagem, expor a teoria e, em seguida, sugerir questões sobre o assunto estudado de maneira mais ou menos engenhosa.

Segundo Sá (2021), nessa perspectiva, foram realizadas pesquisas com o objetivo de responder questões, por exemplo, do tipo: “quais são os fatores que tornam uma questão mais fácil ou mais difícil durante o processo de aprendizagem?” Problemas sobre as quatro operações foram os mais estudados pelos pesquisadores acerca dessas variáveis, sendo essas agrupadas em dois grandes grupos: **variáveis intrapessoais** e **variáveis de situação**.

Sá (2021) também apresenta algumas recomendações quanto a condução do trabalho pedagógico nessa perspectiva. As recomendações apresentadas são: decompor uma questão mais elaborada numa sequência de questões mais simples; utilizar as listas de questões propostas como referência para elaboração de testes avaliativos; propor questões com mais de uma solução; propor questões sem solução; propor questões de processos seletivos; e propor questões com aplicações na vida real.

- **Resolução de Questões Como Processo**

Nessa concepção valoriza-se o caminho percorrido pelos alunos ao resolverem os problemas propostos, ou seja, analisa-se as estratégias adotadas. Segundo Polya (1995) de forma geral, podemos considerar os seguintes passos ao

resolvermos um problema: Compreensão do Problema; Estabelecimento de um Plano; Execução do Plano e Retrospecto. Para esse autor, seguindo essas fases, os alunos poderão ter mais facilidade, e ter melhor compreensão, ao serem submetidos a determinadas situações problemas, o autor também apresenta algumas orientações, recomendações e exemplos em cada uma dessas fases. Sá (2021) também destaca que:

> Na interpretação da resolução de problemas como processo o objetivo é avaliar e/ou munir os educandos de técnicas ou heurísticas para resolução de problemas, o que é um objetivo louvável, pois na vida em muitas situações que enfrentamos as mesmas nem sempre precisam ser resolvidas através do uso de algoritmos ou fórmulas. Assim, quanto mais maneiras de resolver problemas um aluno for exposto ao longo da vida escolar mais preparado para a vida ele estará.
> (Sá, 2021, p. 72)

Algumas técnicas que poderão ser usadas na Resolução de Problemas são sugeridas por Musser e Shaughnessy (apud Sá, 2021), entre as quais destacamos: Tentativa e Erro; Padrões; Resolver um Problema mais Simples; Trabalhar em Sentido Inverso e Simulação. Para Sá, a inserção, em sala de aula, de questões que podem ser resolvidas por meio dessas técnicas podem favorecer o processo de ensino e aprendizagem e tornar o ambiente da sala de aula mais agradável para todos os entes envolvidos no processo.

Algumas recomendações Sugeridas Por Sá (2021) tendo como base a consulta da literatura sobre a resolução de questões como processo e as suas próprias concepções, são: use perguntas para focalizar a atenção do aluno na informação pertinente dada no problema; sempre que possível, planeje dentro de cada conteúdo ou unidade trabalhada sessões de resolução de problemas na interpretação de processos; estimule os alunos a resolverem e/ou apresentarem problemas criativos dentro de cada assunto estudado; não subestime a capacidade dos seus alunos em propor e/ou resolver problemas; realize seções de resolução de problemas estimulando o trabalho em grupo; e, para cada unidade desenvolvida do seu planejamento, realize uma sessão de Resolução de Problemas não padrões.

- **Resolução de Questões Como Ponto de Partida**

Na Resolução de Questões Como Ponto de Partida os problemas são usados objetivando introduzir determinados conhecimentos matemáticos selecionados previamente pelo professor, ou seja, o ensino inicia-se com a apresentação de um problema que permitirá desencadear o processo de aprendizagem.

É importante salientar que, para o docente, conduzir o processo de ensino segundo essa perspectiva, vai de encontro com a forma que os assuntos normalmente são trabalhados, grande parte das vezes, nas salas de aula, ou seja, apresentação de conceitos, definições e propriedades, exemplos de fixação e aplicações. Em muitos livros didáticos também encontramos essa formatação na apresentação dos conteúdos. A esse respeito Sá (2021) salienta que:

> Entretanto, a História da Matemática mostra que essa sequência não é compatível com a construção do conhecimento matemático que quase sempre é consequência da tentativa de resolver um problema, onde normalmente são identificados invariantes que posteriormente são estudadas suas propriedades e finalmente dão origem à definição de uma operação ou estrutura matemática.
> (Sá, 2021, p. 94)

A Resolução de Questões Como Ponto de Partida, muito tem a ver com o ensino de matemática por meio de Atividades Experimentais, visto que, nessa vertente, procura-se levar o aluno a perceber determinadas regularidades e identificar padrões a partir da resolução de situações propostas planejadas previamente pelo professor. Sá (2021, p. 95) também afirma que, nessa concepção "**o professor deve antes de tudo acreditar que é possível, dentro de certos limites, serem resolvidos problemas sem o domínio de certas operações e conceitos matemáticos**." (grifo do autor)

Algumas recomendações para o trabalho em sala de aula nessa perspectiva apresentadas por Sá (2021) são: não tente fazer uma aula desse modo de maneira improvisada; determine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solucionar; descubra um processo de resolver o problema sem o uso da operação; proponha a situação-problema em sala e disponibilize um pouco de tempo para a turma pensar numa solução; solicite que a turma apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem; faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma; analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema; solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado; sistematize o conceito o conteúdo que você tinha como objetivo trabalhar; mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado; e proponha outras questões envolvendo o assunto sistematizado.

Precisamos ter clareza da complexidade e diversidade conceitual que envolve essa discussão e o entendimento dessa temática. Ressaltamos que, sem nenhuma

dúvida, esse debate não se encerra aqui, muito menos esse texto tem a ingênua pretensão de trazer verdades absolutas. Nessa seção tivemos o tímido objetivo de trazer reflexões inicias, provocações e uma discussão preliminar sobre a importância da Resolução de Problemas em aulas de matemática. Para um estudo e entendimento mais aprofundado sugerimos a leitura de Sá (2021) e a consulta e análise de outros trabalhos, assim, sendo possível fazer análises sobre diferentes pontos de vista e perspectivas, o que enriqueceria a amplitude da discussão.

3.5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Para Artigue (2018), atrair a atenção do aluno no que é importante matemática ao resolver questões, não é uma tarefa fácil, pelo contrário, é uma tarefa vaga e incerta. As questões propostas devem traduzir e expressar, de alguma forma, o conhecimento matemático que se pretende que o aluno perceba, devem estimular os discentes a chegar no objetivo pretendido. Sendo esse um dos objetivos dos estudos da Engenharia Didática.

Nesse sentido, concordamos que elaborar questões de modo a evidenciar relações, propriedades e conceitos matemáticos, é uma tarefa que apresenta muitas dificuldades, constituindo-se em um grande desafio para o professor/pesquisador. Nem sempre a reposta dada pelos alunos a uma dada questão matemática é a esperada pelo professor/pesquisador, devemos ter clareza que o conhecimento mobilizado tem a ver com os conhecimentos existentes em sua base cognitiva, contudo, a resposta do aluno deve ser analisada, mesmo não sendo a almejada pelo docente.

Para Cabral (2017) o ato-processo de ensinar e aprender matemática, não é uma tarefa fácil, constituindo-se em um verdadeiro desafio para o professor desse componente curricular e os demais envolvidos nesses processos. Por um lado, esses processos estão envolvidos em um emaranhado de subjetividade que entrelaça as interações sociais e nas capacidades dos discursos comunicacionais existentes entre os humanos. E por outro lado, os interesses dos aprendizes estão, de certo modo, sempre em desiquilíbrio, com os interesses da matemática como ciência formal. Nesse sentido, Cabral (2017) afirma que:

> Se, *por um lado*, o professor em suas ações pedagógicas valorizar sobremodo os conceitos matemáticos enquanto ciência formal, certamente vai ferir os interesses do aprendiz que, em geral, resiste ao ambiente mais abstrato, rigoroso. *Por outro lado*, se o professor valorizar, sobremodo, os interesses dos aprendizes escolares, certamente vai ferir, de igual modo, os interesses da Matemática enquanto ciência formal.
> (Cabral, 2017, p. 9)

Ainda de acordo com Cabral (2017) além das questões epistemológicas de natureza disciplinar e das dificuldades de natureza social da comunicação humana, é preciso reconhecer a importância das investigações das contribuições de *modelos metodológico alternativos* que procuram diminuir as dificuldades de aprendizagem em matemática, amplamente relatadas pelas pesquisas. Os resultados das pesquisas têm, em comum, evidenciado a importância de uma mudança de postura dos alunos, onde os mesmos saiam de uma postura passiva, e adote uma postura mais participativa, colaborativa e ativa, sendo o professor um agente mais experiente, provocador e organizador das ideias.

As atividades do Produto Educacional envolvem o conteúdo Análise Combinatória, conteúdo esse cujas ideias preliminares são apresentadas em muitos livros didáticos e em muitas escolas, nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, com o desenvolvimento de ideias sobre o princípio aditivo, princípio multiplicativo e princípio fundamental da contagem. As ideias apresentadas preliminarmente nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, são aprofundadas continuamente no 2º ano do ensino médio em muitos sistemas estaduais de ensino.

Para compor o banco das **questões de aprofundamento** foram consultados trabalhos desenvolvidos anteriormente sobre o objeto, livros didáticos, provas de vestibulares de diferentes universidades e provas do ENEM dos 10 últimos anos. Nas questões de aprofundamento nosso principal objetivo é que os discentes tenham a oportunidade de rever os assuntos abordados nas Atividades Experimentais de forma mais aprofundada e aplicada, inclusive tendo a oportunidade de resolver questões que foram abordadas na prova do ENEM dos últimos anos, esperamos também com isso, reforçar a importância desses assuntos.

Procuramos organizar as questões de aprofundamento em um progressivo grau de dificuldade, e, em cada bloco, buscamos agrupar as questões em “tipos”, ou seja, cada bloco apresenta questões do “tipo”: formar senhas, formar agrupamentos, anagramas, etc. Cada bloco das questões de aprofundamento apresenta pelo menos 3 questões de cada “tipo” e algumas questões que não se enquadram em nenhum tipo definido.

Durante o trabalho com a sequência em sala de aula, recomendamos que o professor, após a resolução da Atividade Experimental pelos discentes, responda, inicialmente, uma questão de cada tipo no quadro, em seguida, solicite que os alunos tentem responder uma questão do mesmo tipo, e as outras questões deverão ser respondidas em casa como atividade de revisão e aprofundamento. Organizando dessa maneira, acreditamos que o tempo de cada aula será suficiente para resolver as questões de aprofundamento de acordo com o cronograma pré-definido.

Como embasamento teórico para elaborar a Sequência de Atividades nos fundamentamos nos trabalhos de Rosas (2018), Conceição (2019) e Sá (2019). No plano de ação para as aulas, que será apresentado na seção 4, em um primeiro momento, iremos aplicar um pré-teste, com isso pretendemos entender melhor os conhecimentos prévios que os alunos já possuem sobre o conteúdo Análise Combinatória, traçando um perfil dos estudantes. Após desenvolvermos o trabalho em sala de aula com a Sequência Didática, que é composta por 9 atividades e questões de aprofundamento sobre essas atividades, aplicaremos novamente o mesmo teste que foi aplicada inicialmente, com isso, temos por objetivo avaliar a eficiência do método, sendo esse o nosso principal objetivo nesse trabalho.

3.5.1 Termo de Autorização do Responsável Pela Unidade Escolar, Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e Questionário Socioeducacional

Antes de iniciar a aplicação da Sequência Didática foi necessário esclarecer sobre a intenção de realização da pesquisa, o desenvolvimento, a confidencialidade e pedir autorização para o responsável da unidade escolar, esse consentimento foi formalizado por meio do preenchimento e assinatura de um **Termo de Autorização** que se encontra em anexo nesse trabalho (Anexo I).

A pesquisa será aplicada em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública no município de Parauapebas-PA. Mais detalhes sobre a escola, o perfil da turma e dos alunos serão apresentados posteriormente, na próxima seção, onde apresentaremos de forma mais pormenorizada cada um desses pontos.

Antes de iniciarmos, de fato, a implementação da sequência também será necessário o preenchimento de um **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido** (TCLE) pelos responsáveis dos discentes menores de idade, onde, nesse termo, também será esclarecido sobre o objetivo, o desenvolvimento, sobre a análise, a divulgação e a confidencialidade da pesquisa. O preenchimento desse termo é necessário por questões éticas e também porque a grande maioria dos alunos são

menores de idade. O modelo do TCLE que deverá ser preenchido pelos responsáveis legais também se encontra no final desse trabalho (Anexo II).

Também, antes da aplicação da Sequência Didática, os alunos deverão preencher um **Questionário Socioeducacional** onde buscaremos compreender um pouco mais sobre a realidade didática, pedagógica e abordaremos algumas questões socioculturais sobre a turma e os discentes.

Por meio da aplicação, tabulação e análise do Questionário buscaremos compreender, por exemplo, sobre as impressões dos discentes a respeito da disciplina, sobre as sensações dos discentes nos momentos das avaliações, procuraremos compreender um pouco mais sobre as ações pedagógicas do professor em sala de aula e em como se dá (se acontecer) os momentos de estudos extra classe dos alunos. Posteriormente, apesar da complexidade e quantidade de variáveis presentes nessas situações, buscaremos compreender melhor sobre a influência de alguns desses fatores na aprendizagem dos discentes. Mais detalhes sobre as respostas e análise do Questionário também serão apresentadas nas próximas seções. O modelo do Questionário que será aplicado na turma se encontra em anexo nesse trabalho (Anexo III).

3.5.2 Pré-Teste e Pós-Teste

Em um primeiro momento no desenvolvimento da Sequência Didática os alunos resolverão um Pré-teste composto por 10 questões. Um dos objetivos é verificar os conhecimentos prévios que os alunos já possuem sobre o conteúdo Análise Combinatória, também temos como objetivo produzir informações, para, posteriormente, após concluirmos o desenvolvimento das atividades, avaliarmos de que maneira a aplicação da sequência favoreceu o surgimento de habilidades nos discentes para resolver questões relacionadas a Análise Combinatória. A comparação será possível pois iremos checar os resultados do Pré-teste confrontando-os com os do Pós-teste.

O Pré-teste e o Pós-teste serão compostos por 10 questões. As questões podem ser mais facilmente compreendidas e solucionadas, se quem tiver resolvendo possuir algum conhecimento envolvendo os seguintes assuntos: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Fatorial, Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Circular. Todas as questões do Pré-teste podem ser solucionadas diretamente aplicando o PFC, fazendo os ajustes necessários, no

entanto, acreditamos que as 4 últimas, se o discente não possuir nenhum conhecimento prévio sobre o assunto, serão um pouco mais trabalhosas.

Acreditamos que a maioria dos discentes, no Pré-teste, apresentarão bastante dificuldade para resolver as questões propostas. Essas dificuldades advêm, em primeiro lugar, da falta de familiaridade com o tema, visto que a maioria dos alunos estarão estudando o assunto pela primeira vez, e também devido o desconhecimento de alguns termos utilizados nos enunciados das questões. Nossa hipótese é que os mesmos tentarão resolvê-las montando algum esquema de contagem, como, por exemplo, algo similar a árvore de possiblidades, ou tentando fazer uma enumeração sistemática das possibilidades.

Apesar que a maioria das questões podem ser facilmente resolvidas utilizando o PFC, no Pré-teste, os alunos ainda não dominarão essa técnica de contagem, devido a isso acreditamos que apresentarão muitas dificuldades. A partir da segunda questão a enumeração sistemática das possibilidades, será bastante trabalhosa, e o risco de esquecer algum elemento é grande. Esperamos que, após o desenvolvimento da sequência de ensino, muitas dificuldades dos alunos sejam superadas e o conhecimento de novas técnicas de contagem, sobretudo do PFC, possa facilitar a resolução das questões pelos discentes.

A seguir temos a 10 questões que irão compor o Pré-teste e o Pós-teste. Em seguida faremos as análises das possíveis dificuldades que poderão aparecer na resolução das questões, como também a análise de onde acreditamos que os discentes terão mais facilidade.

QUESTÕES DO PRÉ-TESTE (DIAGNÓSTICO) E DO PÓS-TESTE

01. Ao chegar em um restaurante Pedro foi informado que o cliente poderia escolher entre arroz branco ou arroz temperado; feijão preto ou feijão branco; carne de frango, carne de gado ou peixe. De quantas maneiras diferentes Pedro poderá fazer uma refeição escolhendo um tipo de arroz, um tipo de feijão e um tipo de carne?

02. Para compor uma senha de acesso a uma plataforma digital Marcos deverá escolher primeiramente 2 algarismos, escolhidos entre os 10 algarismos de 0 a 9, sem repeti-los. E, em seguida, 2 caracteres especiais entre os 4 símbolos: _ , @, ***** ou #, podendo ou não repetir o símbolo. Nessas condições, quantas senhas diferentes Marcos poderá compor?

03. Qualquer “palavra” (com ou sem sentido) obtida trocando-se as letras de uma palavra de posição, chama-se anagrama. Dessa forma, quantos são os anagramas da palavra ALUNO?

04. Dispondo os anagramas formados na questão anterior em ordem alfabética, como disposto em um dicionário, que “palavra” ocupa a 25ª posição?

05. Doze pessoas estão disputando a última etapa de uma maratona de corrida de rua. Serão premiados os três primeiros colocados. Sabendo que Bruno foi o primeiro a cruzar a linha de chegada, de quantas formas diferentes poderá ser composto o pódio?

06. De uma turma de 20 alunos de quantas formas poderão ser escolhidos um presidente, um vice e um secretário para representar a turma em uma comissão?

07. De quantas maneiras poderão ser escolhidos três representantes para compor uma comissão em uma turma de 20 alunos?

08. No final de uma festa de aniversário todos os presentes se cumprimentaram com um aperto de mão. Quantos apertos de mãos foram trocados se haviam 12 pessoas na festa?

09. Seis amigos ao chegarem em um restaurante ocuparam uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa?

10. De quantas maneiras 7 crianças podem formar uma roda?

3.5.2.1 *Análise a Priori das Questões do Pré-Teste*

Como já dito, todas as questões podem ser resolvidas utilizando-se o PFC, fazendo os ajustes necessários. Acreditamos que a principal estratégia que os discentes utilizarão, no Pré-teste, para resolver as questões, será tentar enumerar todas as possibilidades de agrupamentos possíveis em cada uma delas, contudo, a partir da segunda, a enumeração sistemática será muito trabalhosa.

Uma dificuldade que também acreditamos que será bastante presente, será com relação a compreensão dos significados dos termos e em diferenciar agrupamentos onde a ordem dos elementos importa (como por exemplo na criação de senhas e na formação de anagramas) dos agrupamentos onde a ordem ocupada pelos elementos não é importante. Esperamos que a maioria dessas dificuldades sejam superadas a partir do desenvolvimento da Sequência de Didática.

3.5.2.2 *Análise a Priori das Questões do Pós-Teste*

Esperamos que os discentes, no geral, tenham mais facilidade para solucionar as questões do Pós-teste. Nossa hipótese é que a maioria dos alunos passem a utilizar o PFC no processo de resolução, no entanto ainda alguns discentes devem

recorrer a algum método sistemático de contagem, como a enumeração das possibilidades. Acreditamos que as 4 últimas questões, que envolvem Combinação Simples e Permutação Circular, sejam as questões onde os discentes devem apresentar mais dificuldade, tanto no Pré-teste como no Pós-teste, mas acreditamos que o índice de respostas erradas será menor no Pós-teste.

4. EXPERIMENTAÇÃO

Nessa seção descreveremos o passo a passo como ocorreu a etapa da experimentação, as características da escola onde aplicamos a Sequência Didática, as características da turma e dos discentes. Por meio da aplicação do questionário Socioeducacional, buscamos informações sobre o apoio das famílias e a rotina de estudos dos alunos fora da escola. Posteriormente, em posse do questionário Socioeducacional respondido pelos discentes, dos resultados das Atividades Experimentais e dos resultados do Pré-teste e do Pós-teste, faremos a análise dos dados e a validação da sequência.

No início da pesquisa entramos em contato com a direção e a coordenação da escola, explicamos sobre os objetivos da mesma, esclarecemos sobre a confidencialidade e obtivemos as autorizações necessárias para a sua realização. Também conversamos com os alunos da turma onde aplicamos a Sequência Didática para esclarecer sobre a realização da pesquisa e encaminhamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para que os responsáveis pudessem ler e assinar, autorizando suas participações.

O lócus da pesquisa foi uma escola periférica do Ensino Médio localizada no município de Parauapebas-PA, a escola é de grande porte, funciona nos três turnos e conta com aproximadamente 1915 alunos matriculados, com turmas do 1º ao 3º ano. A turma escolhida para a realização da pesquisa foi uma turma do 2º ano do Ensino Médio que tinha 37 alunos matriculados, no entanto os alunos frequentes, que participaram ativamente das etapas da pesquisa, da realização das atividades e cujos responsáveis consentiram a participação, foram apenas 30 alunos.

A escolha dessa turma se deu por dois motivos principais: em primeiro lugar, nessa turma, o autor da pesquisa também era o professor regente da disciplina, o que facilitou o acesso e a obtenção das autorizações. O outro motivo é que, nesse ano escolar, costumeiramente costuma-se trabalhar esse conteúdo, dessa forma não tivemos problemas com a questão de incompatibilidade com o currículo interno

da escola que é definido por meio de planejamento com a participação de todos os professores da disciplina.

O registro dos encontros se deu por meio da escrita de um relatório de observação de cada aula, também fizemos registros fotográficos, gravamos vídeos e conversas com os alunos sobre suas impressões com relação as atividades, a metodologia e a sequência adotada. Ao final de cada atividade, que em sua maioria foram realizadas em grupos, os alunos escreveram suas observações e conclusões.

Na etapa da institucionalização, que ocorria sempre no final de cada atividade, fazíamos esclarecimentos sobre os conceitos, as relações matemáticas, as propriedades, as regularidades e tirávamos as dúvidas que surgiam. Dessa forma também estávamos seguindo orientações de Sá (2022), onde afirma que, na condução de aulas por meio de Atividades Experimentais as regras devem ser o final do processo, é que, em seu entendimento, os processos de ensino e aprendizagem poderão apresentar resultados mais satisfatórios sempre que ação precederem as ideias.

O questionário Socioeducacional que se encontra em anexo nesse trabalho é composto por 17 perguntas, respondê-lo foi a primeira tarefa realizada pelos alunos. Para facilitar a tabulação e análise das questões utilizamos o Google Forms em sua aplicação, visto que a grande maioria dos alunos dessa turma possuíam aparelho celular e acesso à internet, para os alunos que não tinham acesso, também disponibilizamos o questionário impresso. Por meio do preenchimento do questionário buscamos compreender melhor sobre a rotina de estudos dos discentes dentro e fora do ambiente escolar, dessa maneira, realizando as análises adequadas, nos possibilitou buscar relações sobre a rotina de estudos e as dificuldades (ou não) dos alunos na compreensão dos conteúdos.

Após a aplicação do questionário Socioeducacional, aplicamos o Pré-teste, com questões sobre o conteúdo em tela, que deu suporte, posteriormente, ao finalizarmos o trabalho com a sequência, e após a aplicação do Pós-teste, cruzarmos os resultados com os do Pré-teste, analisando o desenvolvimento e a evolução dos alunos com relação a compreensão e o entendimento do assunto. Posteriormente à aplicação do Pré-teste iniciamos o trabalho com a Sequência Didática. Inicialmente estava previsto a aplicação de 9 atividades e questões de aprofundamento sobre essas atividades. No entanto, devido alguns contratempos que ocorreram, só tivemos tempo de aplicar 8 atividades, suprimimos a atividade 5 sobre a diferença entre arranjo e combinação.

A aplicação da sequência na turma, ocorreu no decorrer dos meses de maio e junho do ano 2024, no mês de junho, mês que antecede as férias escolares nessa rede de ensino, encerramos a aplicação das atividades. No próximo quadro temos o cronograma de aplicação de cada atividade, o assunto que foi abordado em cada aula, a forma de organização da turma (grupo ou individual), a quantidade de questões e os objetivos de cada aula. Devido alguns imprevistos, ajustes tiveram que ser realizados com relação ao cronograma que estava previsto inicialmente.

Quadro 15 – Organização das atividades de ensino

Tema da aula e data	**Organização dos alunos na sala**	**Quantidade de questões**	**Tempo destinado**	**Objetivos**
Aplicação do questionário Socioeducacional e Pré-teste 30/04/2024	Individual	17 e 10	90’	Traçar um perfil Socioeducacional e identificar conhecimentos prévios dos alunos sobre o assunto
Princípio Fundamental da Contagem PFC 02/05/2024	Grupos	7	90’	Introduzir o conceito de Princípio Fundamental da Contagem
Questões de aprofundamento 07/05/2024	Grupos	20	90’	Desenvolver a habilidade de resolver envolvendo PFC
Questões de aprofundamento 09/05/2024	Grupos	20	90’	Desenvolver a habilidade de resolver envolvendo PFC
Cálculo de permutação simples 14/05/2024	Grupos	7	90’	Introduzir o conceito de permutação simples e a noção de fatorial
Questões de aprofundamento 21/05/2024	Individual	11	90’	Desenvolver a habilidade de resolver problemas envolvendo PFC e permutação simples
Questões de aprofundamento 23/05/2024	Individual	11	90’	Desenvolver a habilidade de resolver problemas envolvendo PFC e permutação simples
Fatorial 28/05/2024	Grupos	6	90’	Introduzir o conceito de fatorial
Uma importante relação envolvendo fatorial 28/05/2024	Grupos	5	45’	Fazer o aluno perceber que **n! : n = (n – 1)!**
Questões de aprofundamento Fatorial (Extraclasse)	Individual	9	Livre	Resolver diferentes questões envolvendo fatoriais
Cálculo de arranjo simples 11/06/2024	Grupos	6	90’	Fazer o aluno perceber que $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
Cálculo de combinação simples 13/06/2024	Grupos	6	90’	Fazer o aluno perceber que $C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$
Questões de aprofundamento (Extraclasse)	Individual	20	Livre	Desenvolver a habilidade de resolver problemas que envolvam arranjo simples ou combinação simples

Definição de permutação circular 20/06/2024	Grupos	5	45’	Introduzir o conceito de permutação circular
Cálculo das permutações circulares 20/06/2024	Grupos	5	90’	Fazer o aluno perceber que PC_n = (n – 1)!
Questões de aprofundamento (Extraclasse)	Grupos	5	Livre	Desenvolver a habilidade de resolver problemas envolvendo permutação circular
Aplicação do Pós-teste 25/06/2024	Individual	10	90’	Avaliar a eficiência do método

Fonte: autor, 2024

Nas próximas subseções descreveremos como se deram os encontros onde foram realizadas atividades, destacando os principais pontos, acontecimentos e imprevistos que ocorreram.

4.1 ENCONTRO DO DIA 30/04/2024

No dia 30/04/2024 ocorreu o encontro onde aplicamos o questionário Socioeducacional e também o Pré-teste. Foi destinado 30 minutos para os alunos responderem o questionário e 1h para resolverem as questões do Pré-teste. Para aplicarmos o questionário, como já relatado anteriormente, fizemos uso do Google Forms, visto que a grande maioria dos alunos possuíam aparelho celular, dessa maneira o processo de tabulação dos dados também foi facilitado. Os alunos que não possuíam aparelho, ou não haviam trazido os mesmos para a aula, utilizaram o aparelho dos colegas para resolver o questionário, dessa maneira também incentivamos o trabalho em grupo e colaborativo.

A respeito do uso do Google Forms em pesquisas acadêmicas destacamos que, durante e após a pandemia global causada pelo vírus SARS–CoV–2, o Coronavírus, com as necessidades provocadas pelo isolamento social, é notável o surgimento, difusão e adoção de novas técnicas e instrumentos nos ambientes escolares e nas pesquisas acadêmicas. Nesse rol um instrumento que se destacou e seu uso foi bastante incorporado nas pesquisas e nas atividades universitárias, particularmente no âmbito das universidades paraenses, foi o Google Forms. Vale salientar que ainda existem poucos trabalhos sobre as consequências e influências do uso desse instrumento nas pesquisas acadêmicas, apresentando ainda, muitos pesquisadores, diversas dificuldades no manuseio dessa ferramenta.

Contudo, podemos previamente destacar que existem muitas vantagens no seu uso, como: a) Permite alcançar um bom público em pouco tempo; b) Facilita a organização estatística dos dados; c) Podemos fazer restrições nas respostas

fazendo com que somente um público específico consiga responder o questionário; d) Fácil manuseio pelo pesquisador; e) Fácil preenchimento e envio das respostas pelo entrevistado; f) Baixo custo; etc. No entanto, notamos também o surgimento de algumas dificuldades no uso desse instrumento, como: a) Dificuldades na formatação do formulário pelo pesquisador; b) Resultados das pesquisas podem apresentar inconsistências, ocasionadas sobretudo, pela configuração inadequada dos formulários; c) De maneira mais ampla, pesquisas adotando o Google Forms como instrumento, pode excluir determinados públicos mais carentes; etc.

Sobre a resolução do Pré-teste, a maioria dos alunos utilizaram todo o tempo disponível para resolver as questões, contudo, três alunos, (A_1, A_2 e A_3), gastaram menos de 30 minutos, e um aluno (A_{18}) não conseguiu concluir a resolução das questões dentro do tempo destinado, conseguindo resolver apenas as três primeiras. Alguns alunos (A_5, A_6 e A_7) também estavam dispersos e demonstraram pouco interesse em resolver as questões. Três alunos "mataram" aula esse dia, dessa forma, não participaram das atividades.

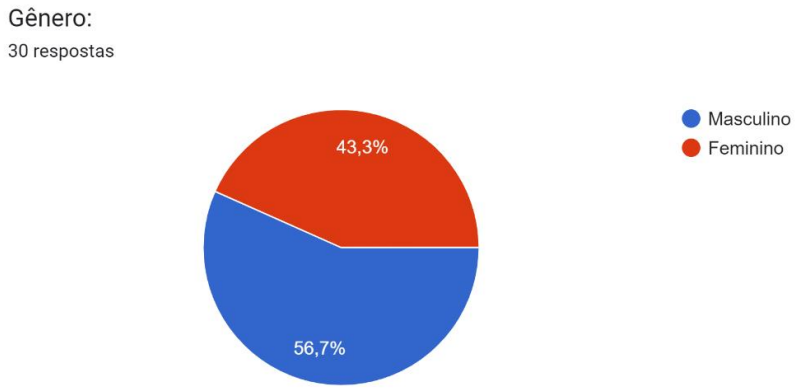
No processo de resolução observamos que os alunos montaram estratégias diversas, alguns já tinham noções básicas sobre o assunto, inclusive tentaram utilizar o Princípio Fundamental da Contagem para resolver algumas questões. No entanto observamos alguns equívocos, como por exemplo, teve aluno que tentou usar MMC para resolver as questões. Acreditamos que esse fato ocorreu porque nas aulas anteriores foram resolvidas algumas questões sobre esse assunto.

A seguir, a partir das respostas do questionário Socioeducacional, passamos para a descrição do perfil dos alunos pesquisados.

4.1.1 Perfil dos Alunos

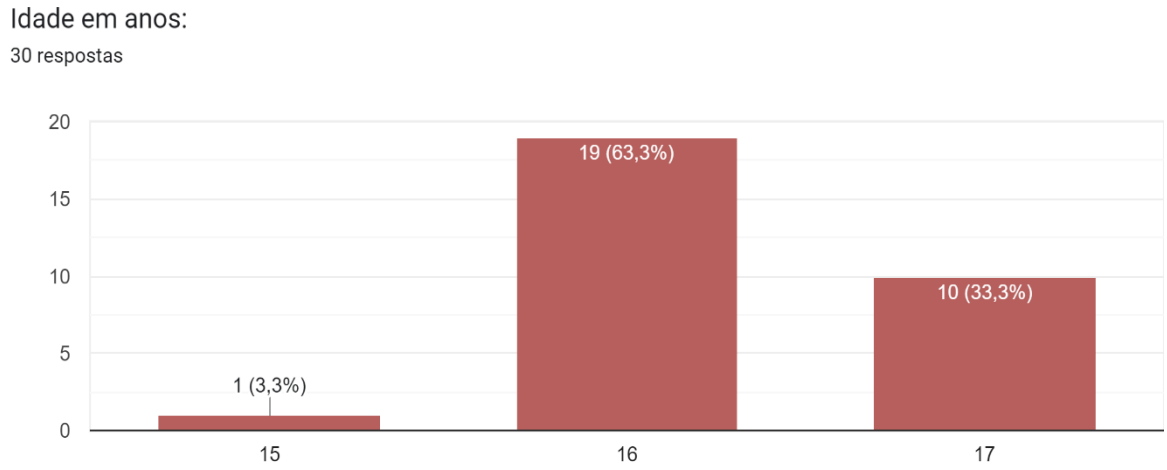
No questionário Socioeducacional investigamos fatores relacionados ao gênero, idade, rotina de estudos, afinidade com a disciplina, metodologias usadas pelos professores, formas de avaliação, entre outros. Por meio das respostas dos alunos, e fazendo as análises adequadas, buscaremos compreender de que maneira esses fatores estão relacionais, e de que forma podem interferir, ou não, nos processos de ensino e aprendizagem dos alunos com relação a disciplina e ao conteúdo em tela. No gráfico 6 e no gráfico 7 abaixo temos a distribuição percentual dos alunos que participaram da investigação com relação ao gênero e a idade.

Gráfico 6 – Gênero dos alunos



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 7 – Idade dos alunos



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Como podemos observar nos gráficos, a porcentagem dos discentes, com relação ao gênero, está praticamente uniforme, com uma pequena quantidade a mais de alunos do sexo masculino. Nas pesquisas desenvolvidas por Rosas (2018) e Conceição (2019), também notamos esse equilíbrio com relação ao gênero dos alunos. Com relação a idade, podemos notar que, na turma onde desenvolvemos a pesquisa praticamente não existia distorção idade-série, visto que todos os alunos estavam dentro da faixa etária esperada para o ano escolar. Considera-se que existe distorção idade-série quando o aluno tem dois ou mais anos de atraso escolar.

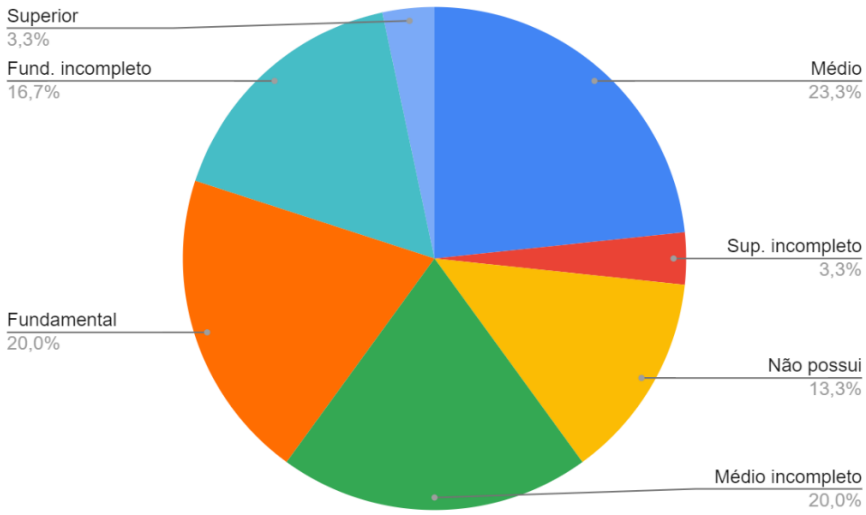
Segundo informações encontradas no portal QEdu, no ano 2023 no Brasil, aproximadamente 19,5% dos estudantes do ensino médio estavam com atraso nos estudos de 2 anos ou mais, no estado do Pará esse número chegava a cerca 32,3%,

estando entre um dos maiores do Brasil. Esses números incluíam o total de alunos da rede pública em suas esferas municipais, estaduais e federais, tanto nas zonas urbanas quanto rurais.

Analisando os dados encontrados nas mais variadas fontes, notamos que, apesar que houve diminuição com relação a distorção idade-série no decorrer dos anos desde que esse índice começou a ser observado, nos dias atuais esse número ainda é bastante expressivo. Essa questão precisa ser cuidada com muita atenção pela sociedade, pelos nossos governantes e pelos profissionais envolvidos nos processos educacionais. Não se trata de aprovar sem que os alunos tenham o mínimo de condições ou desenvolvido competências e habilidades básicas esperadas para cada ano escolar, mas de buscar alternativas que visem garantir os direitos fundamentais e o incentivo a práticas de metodologias inovadoras que garantam aprendizado efetivo e correção desses números.

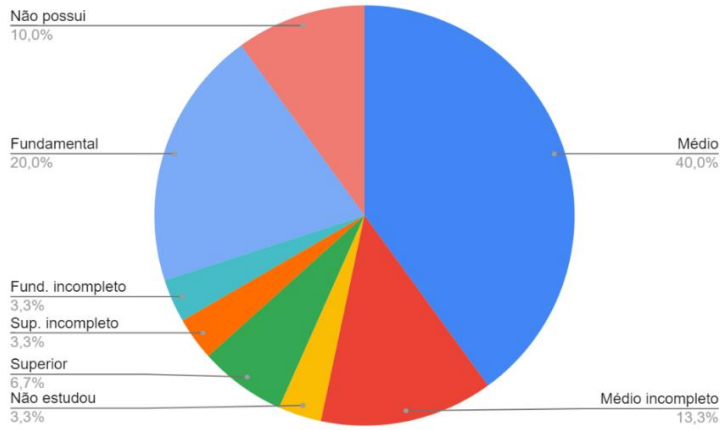
Outros aspectos investigados no questionário Socioeducacional foram: a escolaridade do responsável masculino, a escolaridade do responsável feminino, se alguém os ajudavam nas tarefas de matemática (para casa) e a frequência que estudavam matemática fora da escola, cujos gráficos com os percentuais de respostas apresentamos a seguir.

Gráfico 8 – Escolaridade do responsável masculino



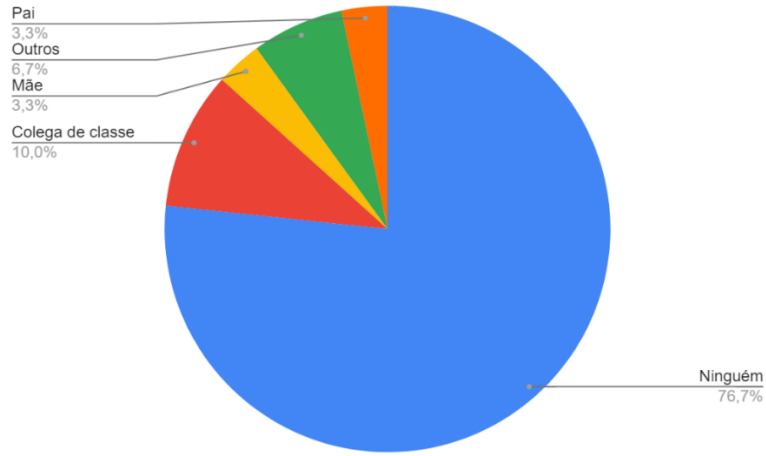
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 9 – Escolaridade do responsável feminino



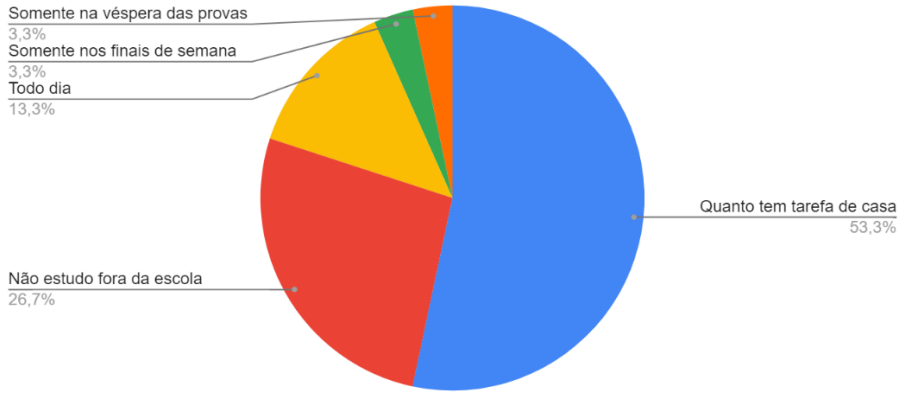
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 10 – Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática (para casa)?



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 11 – Frequência que estuda matemática fora da escola



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Um primeiro ponto a ser observado com relação ao nível de escolaridade dos responsáveis é que 13,3% dos alunos responderam que não possuem responsável masculino e 10% não possuem responsável feminino, podemos sugerir, com base em nossa experiência atuando ao longo dos anos como professores no ensino básico, que essa estatística retrata de certo modo a realidade das escolas públicas de maneira geral, contudo esse item merece ser melhor investigado, inclusive sugerimos que pesquisas sejam desenvolvidas com o objetivo de verificar relações entre o fato do aluno não possuir um responsável de determinado sexo e o desempenho nos estudos.

Ainda sobre o nível de escolaridade dos responsáveis, podemos observar que a grande maioria possuía apenas o nível fundamental completo ou nível médio completo, sendo que boa parcela dos mesmos também abandonaram os estudos antes de concluir o ensino médio estando em terceiro lugar em termos percentuais. Os responsáveis do sexo masculino ou feminino, que tinham nível superior completo ou incompleto, representavam apenas uma pequena porcentagem. Analisando os resultados de Rosas (2018) notamos que os números observados por ele, se assemelham bastante aos encontrados por nós nesse quesito.

Quando foi questionado aos discentes quem os ajudava nas tarefas de casa constatamos que 76,7% deles responderam que não tinham ajuda de ninguém, ou seja, a maioria. 10% deles responderam que tinham ajuda de algum colega de classe, 3,3% tinham ajuda da mãe e 3,3% do pai, esses números, em alguma medida, reforçam a importância de desenvolvermos e incentivarmos a realização de trabalhos em grupos, visto que a maioria considerável dos alunos ou não têm nenhum tipo de ajuda ou recebem ajuda de algum colega, daí a importância de realizarmos trabalhos desse tipo. Além do que, o desenvolvimento de trabalhos em grupos pode favorecer a troca de ideias, o reforço ao pluralismo de opiniões e o respeito a diferentes modos de pensar, entre outros.

Sobre a frequência que estudavam fora da escola, aproximadamente a metade dos alunos responderam que estudavam quando tinham tarefa para casa, 26,7% responderam que não estudavam em casa e 13,3% responderam que estudavam todo dia. Também salientamos a importância da realização de pesquisas que busquem relações entre a frequência de estudos fora do ambiente escolar e o desempenho nos estudos, em nosso caso específico, faremos algumas análises nesse sentido posteriormente.

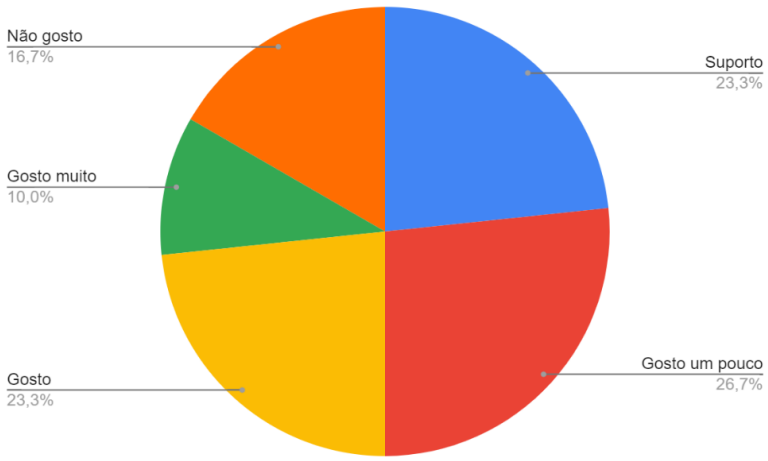
Buscando compreender melhor sobre a relação dos discentes com a Matemática, sobre suas impressões e expectativas sobre esse componente curricular, foram questionados os seguintes pontos aos alunos: “Você já ficou de DEPENDÊNCIA em matemática?”, “Você gosta de Matemática?”, “Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de Matemática?”, “As aulas de Matemática despertam sua curiosidade em aprender os conteúdos ministrados?”, “Você consegue relacionar os conteúdos ensinados em sala de aula com os seu dia a dia?”, cujos percentuais com as respostas apresentamos abaixo.

Gráfico 12 – Você já ficou de DEPENDÊNCIA em Matemática?



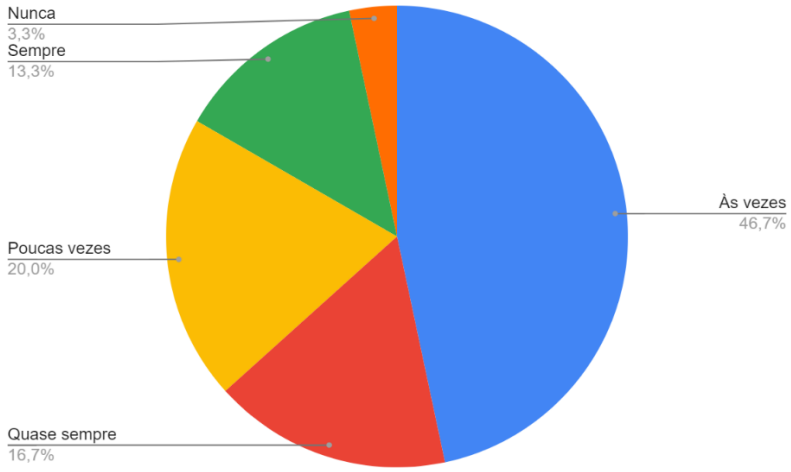
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 13 – Você gosta de Matemática?



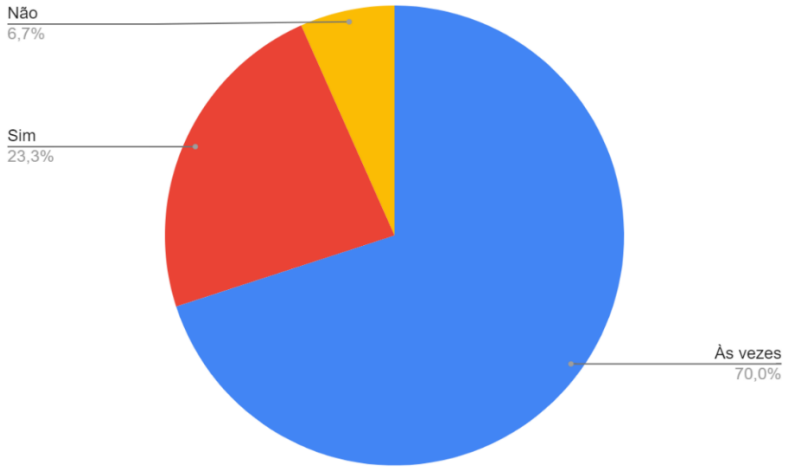
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 14 – Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de Matemática?



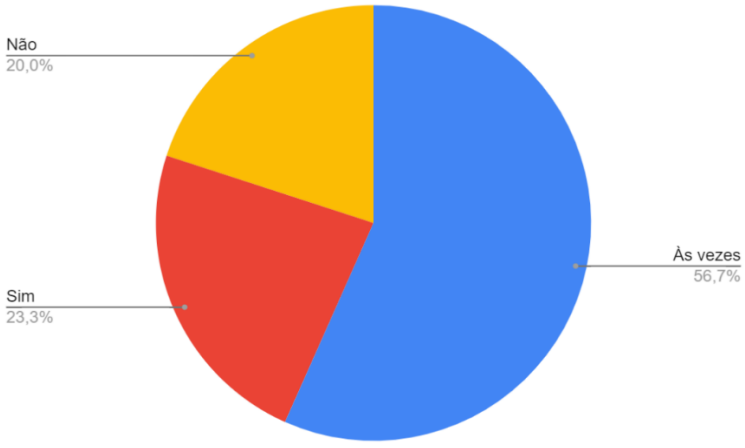
Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 15 – As aulas de Matemática despertam sua curiosidade em aprender os conteúdos ministrados?



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 16 – Você consegue relacionar os conteúdos ensinados em sala de aula com o seu dia a dia?



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Analisando as respostas dos discentes constatamos que nessa turma 43,3% dos estudantes já ficaram de dependência em Matemática, coincidentemente ou não, somando a porcentagem dos alunos que não gostam da disciplina (16,7%) ou suportam (23,3%), temos quase essa mesma fração. Corroborando com esses resultados, na pesquisa desenvolvida por Silva (2023) em uma turma de 40 alunos do 2º ano do ensino médio, quando questionado sobre o gosto por Matemática, 45% dos discentes da turma onde desenvolve-se a pesquisa responderam que gostavam pouco, nessa mesma turma 17% dos discentes responderam que já haviam ficado retidos em alguma série/ano anterior em virtude da disciplina Matemática.

Silva (2023) acredita que a taxa de reprovação tem ligações com o alto índice de alunos que gostavam pouco da disciplina na turma onde realizou a pesquisa. Esse mesmo autor afirma que:

> Destacamos que, enquanto docente, é fundamental compreender o interesse e a motivação dos alunos e as suas expectativas em relação à disciplina de matemática, posto que, esses fatores podem auxiliar na compressão de suas necessidades, e assim, orientar as ações pedagógicas visando um engajamento maior dos alunos a melhorar seu desempenho. (Silva, 2023, p. 151)

Por outro lado, na pesquisa desenvolvida por Rosas (2018), 50% dos alunos responderam que gostavam muito da disciplina, esse resultado reforça o cuidado que devemos ter ao fazermos afirmações e generalizações quando desenvolvemos pesquisas na área educacional, a generalização dos resultados é algo muito difícil e deve ser sempre vista com muita cautela devido as peculiaridades de cada turma e a subjetividade de cada pessoa.

Daí também a importância do desenvolvimento de pesquisas em diferentes turmas, diferentes contextos e do cruzamento dessas informações, assim será possível a criação de uma rica e contundente base de dados. É de extrema importância a realização de trabalhos que busquem a sistematização das informações de diferentes pesquisas. Isso possibilitará, não a generalização ingênua dos resultados, mas dará suporte, por exemplo, para uma reflexão consciente em busca de ações mais assertivas, o apontamento de metodologias de ensino mais eficientes e formas de avaliação mais adequadas para diferentes contextos e situações sociais.

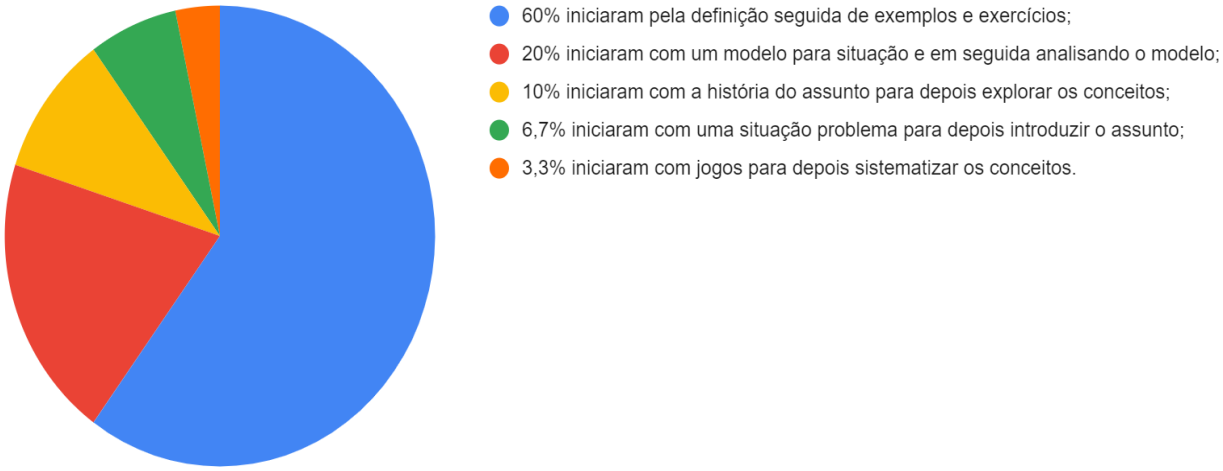
Nessa turma, a respeito do entendimento das explicações dadas nas aulas de Matemática percebemos que cerca da metade dos alunos (46,7%) responderam que às vezes entendem as explicações, um número significativo, (20%) dos alunos,

respondeu que entendem poucas vezes e uma porcentagem muito pequena (3%) afirmaram que nunca entendem. Sá (2019) acredita que quando ações precedem as ideias isso acarreta em benefícios para os processos de ensino e aprendizagem.

Mesmo com as dificuldades em entender as explicações, a maior parte dos discentes (70%), quando questionados se as aulas de Matemática despertam a curiosidade em aprender os conteúdos ministrados responderam que às vezes e 23,3% responderam que sim. 56,7% afirmaram que às vezes conseguem relacionar os conteúdos ensinados em sala de aula de aula com o seu dia a dia e 23,3% responderam que sim.

Os próximos questionamentos nos possibilitaram compreender um pouco mais sobre as práticas didáticas dos docentes que ministraram aulas de Matemática para esses alunos. Nesse sentido foi investigado como iniciavam a maioria das aulas de Matemática e como os professores costumavam praticar o conteúdo. Sobre a avaliação questionamos: “Qual(ais) forma(s) de atividades e/ou trabalhos o seu Professor(a) de Matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?” e, por último, questionados como os discentes se sentiam diante de uma avaliação de Matemática.

Gráfico 17 – A maioria das suas aulas de Matemática:



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 18 – Para praticar o conteúdo de Matemática seu professor costumava:



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Analisando o gráfico 17 fica evidente que segundo a maior parte dos alunos dessa turma (60%) os professores iniciavam a maioria das aulas pelas definições e em seguida respondiam exemplos e exercícios. Apenas 10% afirmaram que as aulas iniciaram pela história para depois explorar os conceitos, 6,7% iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto e uma porcentagem menor ainda (3,3%) iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

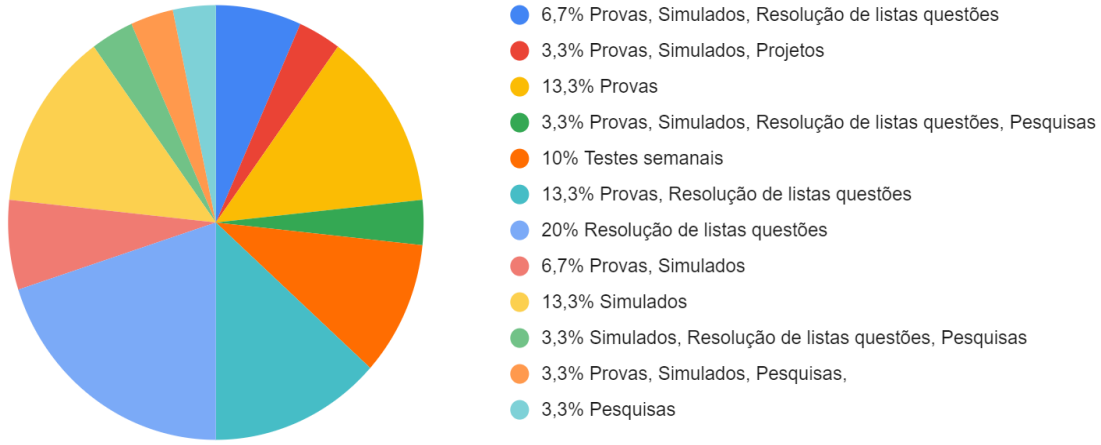
Esses dados corroboram com a ideia que o método tradicional de ensino ainda é um dos mais utilizados em nossas salas de aula, onde primeiro apresenta-se a teoria, em seguida resolve-se alguns exemplos, e por último o professor disponibiliza uma lista de questões de aplicação para que os alunos possam resolver. No trabalho realizado por nós onde analisamos questões sobre o assunto Análise Combinatória em 10 livros didáticos e classificamos essas questões tendo como base a Taxonomia de Bloom, observamos que questões no nível da aplicação eram as mais presentes em todos os livros analisados.

Segundo 80% dos discentes dessa turma, como demostrado no gráfico 18, para praticar o conteúdo de Matemática os professores costumavam disponibilizar uma lista de questões para serem resolvidas. Esse número é bastante compatível com o resultado da pesquisa realizada por nós onde consultamos 30 professores de escolas públicas do estado do Pará que lecionam a disciplina Matemática, quando questionados sobre suas principais práticas para fixar o conteúdo Análise combinatória, 83,3% responderam que costumavam disponibilizar uma lista de questões para serem resolvidas.

Um outro dado peculiar a ser pontuado sobre a pesquisa realizada por nós anteriormente, foi que quando questionamos quais os recursos que mais utilizavam para tornar o ensino de Análise Combinatória mais significativo, a grande maioria dos professores responderam que utilizava o Ensino Por Atividades, no entanto, cremos que a maior parte desses professores não tenham conhecimento teórico sobre essa metodologia e acreditamos que tenham confundido com outra metodologia ou procedimento que fazem uso rotineiramente durante suas aulas.

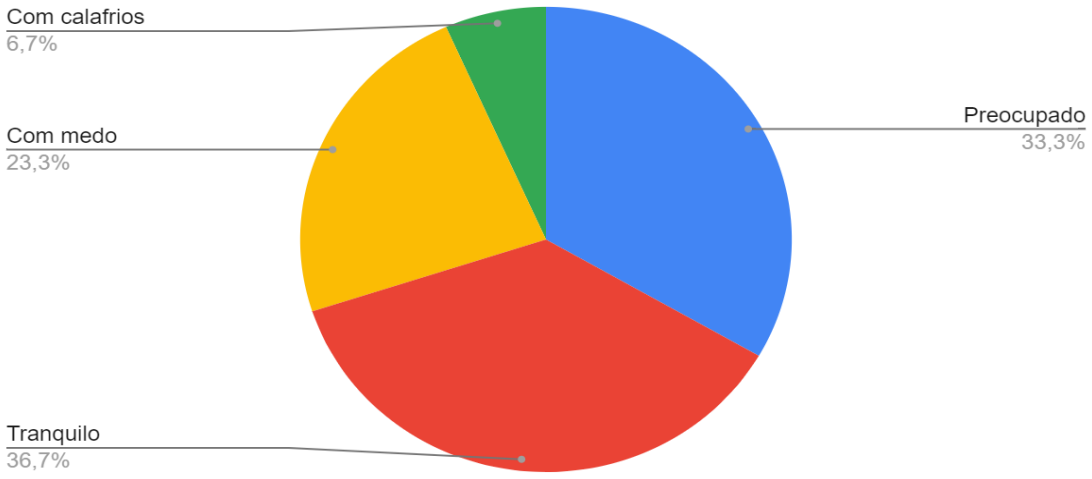
Os próximos gráficos apresentam informações quando perguntamos aos alunos sobre os procedimentos avaliativos adotados pelos professores para avaliar a aprendizagem e sobre como se sentiam diante de uma avaliação de Matemática.

Gráfico 19 – Qual(ais) forma(s) de atividades e/ou trabalhos o seu Professor(a) de Matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Gráfico 20 – Como você se sente quando está diante de uma avaliação de Matemática?



Fonte: Pesquisa de campo via Google Forms 2024

Entre os procedimentos utilizados para avaliar, observamos que a Resolução de Listas de Questões, Provas e Simulados, figuram entre os itens mais utilizados pelos professores segundo os discentes. Nesse ponto destacamos que os alunos poderiam selecionar mais de um item. Na pesquisa realizada anteriormente onde consultamos 30 professores, quando questionados sobre as formas de avaliação que costumavam utilizar, 90% deles responderam que faziam uso de provas, 76,66% avaliavam por trabalhos realizados em grupos ou individual e 73,33% pela produção nos cadernos. Os professores também podiam selecionar mais de um item.

No gráfico 20 apresentamos o resultado quando perguntamos aos discentes como se sentiam diante de uma avaliação de Matemática. Os alunos que responderam que se sentiam tranquilos representam 36,7%, os que se sentiam preocupados representam 33,3% da turma, 23,3% responderam que sentiam medo diante de uma avaliação de Matemática e 6,7% sentiam calafrios.

Nesse sentido também salientamos a importância da diversificação dos critérios e instrumentos avaliativos por parte dos professores durante suas aulas, visto que, em nossa concepção, a adoção de um único critério avaliativo, além de dificilmente comprovar as habilidades e competências adquiridas pelos alunos durante os processos de ensino e aprendizagem, pode causar diferentes sensações nos alunos, não raramente ruins, o que pode impactar nos resultados. Também acreditamos que a avaliação trará resultados mais satisfatórios quando ocorrer durante todo o processo, não apenas no final. Sobre a avaliação no ensino fundamental em Brasil (2001), encontramos o seguinte:

> Os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, postura em sala, constituem indícios de competências e como tal devem ser considerados. A tarefa do avaliador constitui um permanente exercício de interpretação de sinais, de indícios, a partir dos quais manifesta juízos de valor que lhe permitem reorganizar a atividade pedagógica.
> (Brasil, 2001, p. 59)

Na próxima subseção descrevemos como ocorreu o segundo encontro da nossa experimentação e os registros das respostas dos alunos. Esse encontro refere-se à primeira atividade da nossa sequência de ensino. Nesse segundo encontro aplicamos uma atividade sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) onde os alunos foram divididos em grupos para responde-la.

4.2 ENCONTRO DO DIA 02/05/2024

No dia 02/05/2024 desenvolvemos a atividade sobre o PFC, destinamos 90 minutos para a realização da atividade. No primeiro momento da aula orientamos os alunos formarem grupos de no máximo 4 alunos para realizarem a atividade, distribuímos as listas com as questões e as tabelas para serem preenchidas, não tivemos nenhuma intercorrência relevante nessa parte. Os alunos, de maneira geral, não apresentaram resistência para a formação dos grupos, com algumas exceções.

Alguns alunos queriam formar um grupo com 5 componentes, no entanto, orientamos que cada grupo deveria ser composto por no máximo 4 alunos, nesse caso sugerimos que os alunos realizassem um sorteio e o aluno que sobrasse deveria compor outro grupo. Outros três alunos que também estavam presentes esse dia, não tiveram a iniciativa de entrar para compor nenhum grupo, então sugerimos que os mesmos formassem um grupo entre eles.

No decorrer da realização da atividade determinadas dificuldades de interpretação com relação aos enunciados das questões foram observadas, tivemos alunos que não compreenderam o significado de algumas palavras que sugiram, como por exemplo o significado das palavras: etapas, possibilidades, independentes e sucessivamente, nesse ponto fizemos as intervenções que se fizeram necessárias.

Alguns grupos também estavam dispersos, os alunos desses grupos estavam usando o celular e não estavam demonstrando interesse nem motivação para resolver as questões, nesse ponto chamamos a atenção dos mesmos e explicamos sobre a importância do comprometimento, do engajamento e do entendimento do PFC para a compreensão do restante do assunto de Análise Combinatória.

Apresentaremos a seguir o modelo do quadro que deveria ser preenchido pelos alunos após a resolução das questões propostas e como cada grupo procedeu para o seu respectivo preenchimento. Tivemos como objetivo nessa atividade, fazer o aluno perceber que em um evento com etapas sucessivas e independentes, onde cada etapa é composta por um certo número de possibilidades, o número total de possibilidades de ocorrência do evento é dado pelo produto do total de possibilidades de cada etapa, essa regularidade caracteriza o PFC.

Quadro 16 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 1.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	Quantas formas	2 etapas	3 Sorvete	2 cobertura				6 formas
2ª	Quantas formas	2 etapas	3 calças	3 camisas				9 formas
3ª	Quantas formas	2 etapas	4 estradas	3 estradas				12 formas
4ª	Quantas formas	2 etapas	KKK	KKC				8 formas
5ª	Quantas formas	5 etapas	Biologia	Fisica	Matematica	Quimica	Redação	24 formas
6ª	Maneiras diferentes	3 etapas	Presidente	Vice presidente	Tesoureiro			80 maneiras
7ª	Anagramas	5 etapas	5!	4!	3!	2!	1!	120 anagramas

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Observando o quadro preenchido por esse grupo, notamos que apesar de ter ocorrido alguns erros em seu preenchimento, os alunos conseguiram encontrar o total de possibilidades correto em praticamente todas as questões. Podemos notar que os alunos erraram apenas o total de possiblidades na questão 6ª, que era justamente a questão onde envolvia um maior número de possibilidades de escolhas nas etapas e o no total final de possibilidades. Percebemos também que os alunos utilizaram notação de fatorial na 7ª questão, apesar de utilizarem de maneira equivocada, isso pode indicar que já possuíam algum conhecimento prévio sobre o assunto. Avaliamos como positivo o desempenho desse grupo nessa atividade.

Quadro 17 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 2.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	Quantas formas	2	3	2	_	_	_	6
2ª	“	2	3	3	_	_	_	9
3ª	“	2	4	3	_	_	_	12
4ª	Qual o total	3	2	2	2	_	_	8
5ª	Quantas formas	2	5	5	_	_	_	16
6ª								
7ª	Anagramas	1	5!	_	_	_	_	120

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O desempenho desse grupo foi semelhante ao do Grupo 1, os alunos conseguiram encontrar o total de possibilidades correto em praticamente todas as questões, tendo errado apenas a questão 5 e não respondido à questão 6. Assim como no primeiro grupo, observamos que os alunos utilizaram notação de fatorial na 7ª questão, evidenciando que já possuíam algum conhecimento sobre o assunto. Também avaliamos positivamente o desempenho desse grupo nessa atividade.

Quadro 18 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 3.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	Quantas possibilidades de tomar sorvete	2	3	2				6
2ª	Quantas formas diferentes ele poderá vestir	2	3	3				9
3ª	Quantas formas diferentes ele pode fazer o percurso da viajem	2	4	3				12
4ª	Qual total da possibilidade de resultado ao lançamento de moeda	2	4	4				8
5ª	Formas diferente do esquema de estudo	2	4	4				16
6ª	Quatas maneiras de ser formada a comissão	2	10	3				30
7ª	Quantos anagramas	2						25

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Observando o quadro preenchido por esse grupo, notamos que o desempenho, no geral, foi menor que os dos dois primeiros, não preenchendo corretamente as possibilidades das etapas das três últimas e errando o resultado final das mesmas, também não preenchendo corretamente as possibilidades das etapas da 4ª questão, apesar que acertaram o total final na mesma.

Quadro 19 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 4.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	multiplicação	2	3	2				6
2ª	multiplicação	2	3	3				9
3ª	multiplicação	2	4	3				12
4ª	Potência	2	2	2	2			8
5ª	multiplicação	2	5	5				25
6ª	Multiplicação	2	10	3				30
7ª	Fatorial	1	5	4	3	2	1	120

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Avaliamos como satisfatório o desempenho desse grupo no desenvolvimento dessa atividade, tendo resolvido e preenchido corretamente a tabela em quase todas as questões. Podemos notar que assim como nos grupos anteriores, esse grupo também errou no preenchimento das colunas e no total de possibilidades da questão 6. Também erraram a questão 5. Na coluna onde deveriam preencher o que a questão pedia, escreveram em quase todas as linhas “multiplicação”, ou seja, em quase todas as questões associaram a ideia que deveriam multiplicar para encontrar o total. Na questão 4 escreveram “Potência” e na questão 7 “Fatorial”.

Quadro 20 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 5.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	Multiplicar	3	2					18
2ª	potenciar	3	3					9
3ª	multiplicar	4	3					12
4ª	multiplicar	2	2	2				6
5ª	potencialibzar	4	4					16
6ª	multiplicar	3	10					30
7ª	potenciar	5	5					25

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo foi um dos que tiveram o pior desempenho nessa atividade, como podemos notar na tabela preenchida por eles. No decorrer das atividades os componentes desse grupo também foram os que mais faltaram, como veremos na tabela de frequência que será apresentada logo adiante. Também foi um dos que demonstraram menos comprometimento e engajamento no desenvolvimento das atividades, tivemos que chamar a atenção diversas vezes. No nosso entendimento, todos esses fatores também impactaram no desempenho geral individual dos componentes desse grupo.

Quadro 21 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 6.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	mutiplicar	3	2					18
2ª	Potenciar	3	3					9
3ª	mutiplicar	4	3					12
4ª	multiplicar	2	2	2				6
5ª	Potenciar	2	4					16
6ª	mutiplicar	3	10					30
7ª	Potenciar	5	5					25

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O desempenho desse grupo e o preenchimento da tabela foi praticamente idêntico com o do grupo 5, a única diferença foi na conclusão final da atividade como veremos posteriormente. Os componentes desse grupo também estavam dispersos e com muitas conversas paralelas, no decorrer da atividade tivemos que chamar a atenção desses alunos diversas vezes para que tivessem mais seriedade e comprometimento para realizar a atividade. O número de faltas de alguns dos componentes foi bastante expressivo. Acreditamos que todos esses fatores impactaram consideravelmente no desempenho geral individual de cada um, esses fatores podem estar relacionados ao baixo desempenho desses alunos no Pré-teste e no Pós-teste.

Quadro 22 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 7.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	Quantas formas ela podera tomar um sorvete.	1	1					6
2ª	Quantas formas diferente ela pode usar.	3	3	2				9
3ª	Quantas formas diferente marcos poderá fazer todo o percurso da viajem.	3	3	2				12
4ª	Qual total de possibilidades de resultados.	1	1	1				6
5ª	Quantas formas díferentes Lara consegue montar seu esquema de estudos.	1	1	1				10
6ª	de quantas maneiras diferentes pode ser formadas essa comissão	2	2	2				120
7ª	Quantos são os anagramas da palavra ALUNO?	2	2	2				24

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo foi um dos mais comprometidos com o desenvolvimento das atividades e os alunos estão entre os menos faltosos. Com relação ao desempenho no preenchimento da tabela, podemos observar que o grupo não conseguiu preencher corretamente as informações, contudo chegaram corretamente nos resultados das questões 1, 2, 3 e 7. Acreditamos que um dos motivos de não terem preenchido corretamente as informações de algumas linhas e colunas da tabela, com relação a algumas questões, pode ter ligações com o fato de não terem compreendido corretamente algumas perguntas e palavras, essa hipótese se reforça também no que conseguimos observar durante a aula, ou seja, os alunos responderam corretamente as questões, no entanto não preencheram corretamente a tabela. Notamos também que os discentes desse grupo não conseguiram preencher corretamente, nem chegaram ao resultado desejado, nas questões onde o total final de possibilidades seria maior.

Quadro 23 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 8.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	multiplicação	2 etapas	3	2				6
2ª	multiplicação	2 etapas	3	3				9
3ª	multiplicação	2 etapa	4	3				12
4ª	multiplicação	3 etapa	2	2	2			8
5ª	multiplicação	2 etapas	4	4				24
6ª	multiplicação	2 etapas	10	3				30
7ª	multiplicação	5 etapas	5	4	3	2	1	120

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

No geral o desempenho desse grupo no preenchimento da tabela, foi muito bom, pois preencheram corretamente quase todas as linhas e colunas, também chegaram ao resultado final correto em praticamente todas as questões, com exceção da 6ª questão. Curiosamente, além dos componentes desse grupo terem um número expressivo de faltas, estão entre os que tiverem os menores rendimentos no Pré-teste e Pós-teste, por exemplo, teve discente nesse grupo que errou todas as questões dos testes, nas duas etapas. Nesse sentido, acreditamos que os alunos desse grupo, verdadeiramente, apenas pegaram as respostas das questões e a tabela com outro grupo, pois, por mais que tentamos evitar que isso acontecesse, nem sempre foi possível.

Quadro 24 – Transcrição do quadro da primeira atividade preenchido pelo Grupo 9.

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª	Quantas formas	2 etapas		2 cobertura				6 Formas
2ª	Quantas formas	2 etapas	3 calças	3 camisas				9 Formas
3ª	Quantas formas	2 etapas	4 estrada	3 estrada				12 Formas
4ª	Possibilidades	2 etapas	KKK	KKC				8 Formas
5ª	mobilidades							24 Formas
6ª	maneiras diferen	3 etapas	Presidente	Vici Presidente	Tesoureiro			90 Formas
7ª	corogramas	5 etapas	5!	4!	3!	2!	8!	120 corogramas

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Observando e analisando a tabela preenchida por esse grupo, em primeiro lugar, é perceptível a quantidade considerável de erros na escrita de algumas palavras. Em nossa percepção, acreditamos que o grupo teve um

desempenho mediano no preenchimento da tabela. Na última coluna, onde deveriam apresentar o resultado total de possibilidades acertaram praticamente todas as questões, com exceção da 6ª. Alguns componentes desse grupo faltaram no dia da aplicação de algumas atividades. O desempenho dos alunos desse grupo nos testes foi mediano, como veremos adiante. De maneira geral acreditamos que essa tabela refleti bem o desempenho dos seus discentes nos testes.

A seguir apresentaremos as conclusões finais escritas por cada grupo, a transcrição e análise dessas conclusões ao finalizarem a primeira atividade da sequência. Nessa atividade o nosso objetivo era que os alunos chegassem a uma conclusão válida sobre o PFC, ou seja, esperávamos que os discentes percebessem que para encontrar o número total de possibilidades de ocorrência de um evento, sendo esse evento composto por etapas sucessivas e independentes, em cada etapa fosse composto por algumas possibilidades, bastava multiplicar, entre si, o número de possibilidades de cada etapa.

4.2.1 Análise das Conclusões dos Discentes Sobre a Atividade 1

(Continua)

Alunos	**Conclusão Apresentada**	**Validade da Conclusão**
A_{10} A_{12} A_{30}	**Transcrição da Conclusão do Grupo 1:** 01 = Chegamos a conclusão que deu 3 formas de sorvetes e 2 cobertura deu 6 maneiras diferentes. 02 = Chegamos a conclusão que multiplicando as 3 calças e 3 camisas chegamos a 9 formas diferentes. 03 = Chegamos que juntando as estradas e multiplicando, chegou a 12 formas diferente caminhos para chegar na outra cidade. 04 = Chegamo a conclução que as moedas KKK e KKC deu 8 formas diferentes ao lançamento da moedas 05 = Chegamos a conclusão que a cada dia da semana ela estuda uma matéria diferte que é Biologia, física, matemática, Quimica, redação, deu 24 formas. 06 = Chegamos a conclusão que o Presidente e vice, tesoureiro pagamos 10 que tinha e multiplicamos 3. e chegou a 80 maneiras diferentes na comição.	Parcialmente Válida

	07 Chegamos a conclusão do nome aluno tem 120 anagramas que é 5!	
	Análise da conclusão: O grupo 1 não compreendeu que deveria ser elaborada uma única conclusão para a atividade e acabou formulando uma conclusão para cada questão. Analisando as conclusões de cada questão, notamos que em algumas delas os alunos compreenderam bem que para encontrar o número total de possibilidades (formas), deveriam multiplicar as possibilidades de cada etapa. No entanto, nas questões 4 e 5, apesar de terem encontrado corretamente o número total de possibilidades das questões, as conclusões ficaram bem confusas de se compreender. Na questão 7, observamos que os alunos já tinham algum conhecimento prévio sobre fatorial. O grupo errou a questão 6, e também não formulou uma conclusão correta para essa questão. Em nosso ponto de vista, mesmo com os equívocos cometidos pelos discentes, as conclusões podem ser consideradas parcialmente válidas, apesar que, matematicamente, não estejam formalmente tão rigorosas. Também é bastante notável a quantidade expressiva de erros ortográficos e de pontuação cometidos por esse grupo.	
A_{01} A_{02} A_{26}		Conclusão Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 2: Para descobrirmos as possibilidades usamos PFC.	
	Análise da conclusão: A conclusão do grupo 2 demonstra que seus componentes já tinham algum conhecimento prévio sobre o assunto. Essa hipótese também se confirmada quando analisamos a tabela preenchida por esse grupo, onde observamos que preencheram corretamente quase todas as linhas.	
A_{11} A_{16} A_{24}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 3: A MANEIRA MAIS SIMPLES É A MULTIPLICAÇÃO, COMO FIZEMOS NAS QUESTÕES**...**	
	Análise da conclusão: O grupo 3 elaborou uma conclusão parcialmente válida para o PFC. Os componentes desse grupo,	

	associaram a multiplicação como meio facilitador para solucionar os tipos de questões apresentas.	
A_{05} A_{17} A_{23}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 4: Com o calculo concluímos as questões com eficácia.	
	Análise da conclusão: Apesar desse grupo ter tido um desempenho satisfatório no preenchimento da tabela dessa atividade, a sua conclusão não foi bem elaborada, ficando muito vaga em sua formulação.	
A_{19} A_{21} A_{22}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 5: Basta multiplicar ou pontencializar	
	Análise da conclusão: Esse grupo citou a multiplicação como meio para solucionar as questões, nesse sentido avaliamos a conclusão apresentada como parcialmente válida, visto que essa operação faz parte da definição formal e representa uma das principais características do PFC.	
A_{03} A_{13} A_{28}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 6: 1.137	
	Análise da conclusão: O grupo 6 apresentou apenas um número onde deveria escrever a conclusão dessa atividade, assim não elaboraram uma conclusão satisfatória.	
A_{04} A_{06} A_{20}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 7: Basta multiplicar x por y para obter o resultado das questões.	
	Análise da conclusão: Assim como os grupos 3 e 5, os discentes desse grupo ressaltaram a operação da multiplicação como ferramenta para obter os resultados das questões. Assim, consideramos a resposta apresentada como parcialmente válida.	
A_{09} A_{18} A_{27}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 8: Aprendemos multiplicação e trabalho em grupo.	

	Análise da conclusão: Em nossa interpretação esse grupo apresentou uma conclusão parcialmente satisfatória para essa atividade. Embora a resposta apresentada tenha ficado muito genérica, citaram a operação da multiplicação, que representa uma das principais características do PFC. Esse grupo também destacou o aprendizado desenvolvido em grupo.	
A_{07} A_{14}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 9: Podemos concluir que por meios práticos, possuímos soluções e possibilidadadir também de forma prática.	
	Análise da conclusão: Esse grupo não chegou a uma conclusão válida que expressasse, ao menos em parte, o PFC.	

Quando todos os grupos elaboraram suas conclusões sobre a atividade, entregaram as questões respondidas e as tabelas preenchidas, tivemos o momento de institucionalização do Princípio Fundamental da Contagem com toda a turma. Para o momento de institucionalização escrevemos as conclusões que retrataram de maneira mais coerente o PFC no quadro, a partir daí fizemos alguns comentários e observações, só então escrevemos a definição formal do PFC para toda a turma.

Em nosso entendimento a maioria dos grupos escreveram conclusões que retratavam, ao menos parcialmente, o PFC. O teste final demonstra que a maioria dos alunos tiveram um desempenho satisfatória no desempenho das questões sobre esse tema. Apesar dos erros e equívoco cometidos, de maneira geral, avaliamos positivamente os resultados dessa atividade. As conclusões apresentadas pelos grupos abriram caminho para a formalização do PFC.

Sobre o tempo de conclusão dessa atividade, o primeiro grupo entregou a atividade após 45 minutos, o segundo levou 55 minutos para concluir, a partir daí todos os outros grupos foram entregando, o último grupo entregou a atividade após 72 minutos do início. O tempo médio dos grupos para concluir essa atividade foi de aproximadamente 60,5 minutos. Após o último grupo entregar, destinamos o restante da aula para discutir as conclusões e formalizar o PFC.

4.3 ENCONTRO DO DIA 14/05/2024

No dia 14/05/2024 desenvolvemos a atividade sobre Permutação Simples, o tempo destinado para atividade foi de 90 minutos. Assim como na primeira atividade, inicialmente, orientamos os alunos formarem grupos de no máximo 4 alunos, em seguida fizemos a distribuição das listas com as questões e as tabelas. Na organização dos discentes para formar os grupos, apenas um deles ficou com 6 componentes, pois dois alunos que haviam faltado na aula anterior tinham entrado nele, nesse caso orientamos que realizassem um sorteio e os alunos que sobrassem deveriam compor outro grupo.

Nesse dia, novamente, alguns alunos estavam dispersos, estavam jogando baralho, usando o celular e não estavam demonstrando interesse para realizar a atividade. Conversamos com os alunos desse grupo chamando a atenção para a importância do comprometimento de todos na realização das atividades e que o entendimento desses assuntos seria essencial para a compreensão do conteúdo da Análise Combinatória como um todo.

No decorrer da atividade percebemos que as questões com mais de duas etapas foram as que os discentes tiveram maior dificuldade, dessa forma ficou claro que ainda não tinham compreendido bem o PFC e não haviam ainda desenvolvido uma técnica mais eficiente de contagem para essas questões. Por exemplo, alguns alunos persistiam em fazer a enumeração sistemática das possibilidades, nesses casos fizemos algumas intervenções no intuito de demonstrar para esses discentes que, se o número de agrupamentos e possibilidades fosse muito grande, a enumeração sistemática não seria uma técnica de contagem tão eficiente.

Apesar da dificuldade relatada no parágrafo anterior, no geral, percebemos que os alunos apresentaram avanços significativos na aprendizagem. Logo abaixo temos o modelo do quadro que foi preenchido pelos alunos após a resolução das questões. Nessa atividade nosso objetivo foi fazer com que os alunos percebessem a regularidade envolvida e conceituassem, da maneira mais precisa possível, a Permutação Simples.

Um primeiro ponto a ser ressaltado é que, devido algumas dificuldades observadas na atividade sobre PFC, dificuldades essas relacionadas a questão da gestão do tempo de realização das mesmas, nessa atividade, que é composta por 7 questões, deixamos os alunos livremente para escolher se responderiam todas as questões ou apenas 5 delas, ou seja, nessa atividade, caso o grupo optasse, poderia deixar de responder 2 questões. Também é notório a quantidade de erros ortográficos cometidos pelos grupos.

Quadro 25 – Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 1.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª		3	3	x		3	2	1					3 * 2 * 1 = 6	6
2ª														
3ª	Anagrama as Palava Filtro	6	6	x		2	5	4	3	2	1		2 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1	240
4ª	Formas de Fazer exercicio	5	5		x	5	4	3	2	1			5 * 4 * 3 * 2 * 1	120
5ª														
6ª	Quantas possibilidades de intervalos	7	7	x		7	6	5	4	3	2	1	7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1	5.040
7ª	Formar senhas	7	7	x		7	6	5	4	3	2	1	7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1	5.040

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Observando a tabela preenchida por esse grupo, notamos que deixaram de responder duas questões (2 e 5) e responderam corretamente as outras cinco. Na questão 4, apesar dos alunos terem encontrado o total de possibilidades correto, na coluna onde perguntava se a ordem dos elementos alterava o agrupamento, responderam que "não", nessa coluna todas as respostas deveriam ser "sim", portanto, observamos que o grupo também cometeu um erro nesse ponto. Em nosso entendimento esse grupo teve um bom desempenho nessa atividade, tendo respondido e preenchido corretamente a tabela na grande maioria das questões.

Quadro 26 – Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 2.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª	Quantas mane-iras	3	3		x	3	2	1					1 x 2 x 3	6
2ª	Formar anagramas da palavra amor	4	4		x	1	3	2	8				4 * 6 = 24	24
3ª														
4ª	Maneiras diferentes	5	5		x	5	4	3	2	1			5 * 4 * 3 * 2 * 1	120
5ª	Formas para apresenta o trabalh	6	6	x		6	5	4	3	2	1		6 x 5 x 4 x 3 x 2 x1 = 720	720
6ª														
7ª	Quantas senhas Podem ser forma das	7	7	x		7	6	5	4	3	2	1	7! = 5040	5040

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo também optou por não responder duas questões (3 e 6), e apesar de terem cometido pequenos erros no preenchimento das colunas nas questões 1, 2 e 4, chegaram nas respostas corretas de todas as questões. Em nossa interpretação esse grupo teve um desempenho satisfatório nessa atividade, os componentes responderam e preencheram corretamente a tabela em praticamente todas as questões.

Quadro 27 – Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 3.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª	Quantas maneiras	3	3		Não	3	2	1					1 x 2 x 3	6
2ª	Formas anagrama da palavra amor	4	4	Sim	não	4	3	2	1				4 * 6 = 24	24
3ª	anagramas que começa com vogal	6	6	Sim		2	5	4	3	2	1		2 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1	240
4ª	maneira diferentes de fazer os exercicio	5	5		não	5	4	3	2	1			5 * 4 * 3 * 2 * 1	120
5ª	pedia para determinar O número de maneiras diferentes.	6	6	sim		6	5	4	3	2	1		6x5x4x3x2x1= 720	720
6ª														
7ª	Quantas senhas Podem ser formadas	7	7	Sim		7	6	5	4	3	2	1	7! = 5040	5040

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Observando a tabela com as respostas desse grupo, notamos que deixaram de responder apenas uma questão (6) e chegaram ao total de possibilidades correto em todas outros, apesar de terem cometido pequenos equívocos ao preencherem a tabela, notadamente os erros cometidos foram na coluna onde deveriam responder se a ordem dos

elementos alterava os agrupamentos ou não. Em nossa avaliação esse grupo teve ótimo desempenho nessa atividade, contudo, ao avaliarmos o desempenho geral dos alunos desse grupo no Pré-teste e no Pós-teste, observamos que estão entre os que tiveram um dos piores desempenho.

Quadro 28 – Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 4.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª	Quantas maneira	3	3		x	3	2	1					1 x 2 x 3	6
2ª	Formar anagramas da palavra AMOR	4	4	x	x	1	3	2	8				4 * 6	24
3ª														
4ª	Maneiras diferentes de fazer exercício	5	5		x	5	4	3	2	1			5 * 4 * 3 * 2 * 1	120
5ª	Formas para apresentar trabalho	6	6	x		6	5	4	3	2	1		6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1	720
6ª														
7ª	Quantas senhas podem ser formadas	7	7	sim		7	6	5	4	3	2	1	7! = 5040	5040

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

A tabela preenchida por esse grupo está muito semelhante à do grupo 2. Assim como o segundo grupo notamos que não responderam as questões (3 e 6) e chegaram ao total de possibilidades correto em todas as outras, mesmo cometendo alguns erros. Acreditamos que esses grupos, por mais que tentamos evitar, também trocaram informações entre si, essa tese se reforça nos resultados dos testes individuais, tendo em vista que, mesmo ambos os grupos tendo um bom desempenho no preenchimento da tabela, os componentes do grupo 4 tiverem um desempenho bem melhor do que os do grupo 2 nos mesmos tipos de questões.

Quadro 29 – Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 5.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª	a quantidade de opções que poderia se confeccionar a bandeira com cores diferentes.	3	3	x		3	2	1					3 * 2 * 1 = 6	6
2ª														
3ª	Anagrama as palavras	6	6	x		2	5	4	3	2	1		2*5*4*3*2*1 = 24	240 Possibilidades.
4ª	Formas de fazer exercícios	5	5		x	5	4	3	2	1			5*4*3*2*1 = 120	120 Possibilidades.
5ª														
6ª	PossiBilidades de intervalos	7	7	x		7	6	5	4	3	2	1	7*6*5*4*3*2*1 =	5.040
7ª														

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo deixou de responder três questões (2, 5 e 7) e chegou ao total de possibilidades correto nas outras quatro. Na coluna onde perguntava se a ordem dos elementos alterava o agrupamento, responderam que "não" em 1 questão (4), nessa coluna todas as respostas deveriam ser "sim". Esse grupo desempenhou-se relativamente bem na atividade.

Quadro 30 – Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 6.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª	Quantas maneiras	3	3		x		3	2	1				1 x 2 x 3	6
2ª	Formas ologramas da palavra Amor	4	4		x		1	3	2	1			4 * 6 = 24	24
3ª	Omogramas que comeca com vogal	6	6	x	x	2	5	4	3	2	1		2*5*4*3*2*1	240
4ª	Maneiras diferentes fazer exercicio	5	5			5	4	3	2	1			5*4*3*2*1	120
5ª	Formas para aprese- o trabalho	6	6		x	6	5	4	3	2	1		6x5x4x3x1x1 7x0	720
6ª														
7ª	Quantas senhor pode- ser formados	7	7	x	x	7	6	5	4	3	2	1	7.6040	5040

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo não respondeu uma questão e chegou ao total de possibilidades correto nas outras seis, apesar de terem cometido uma quantidade razoável de erros, principalmente nas colunas onde perguntava se a ordem dos elementos alterava o não o agrupamento e na penúltima coluna. Esse grupo teve um desempenho razoável na atividade.

Quadro 31 – Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 7.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª		3	3	x		3	2	1					3 x 2 x 1	6
2ª		4	4	x		1	3	2	1				4 * 6 = 24	24
3ª	anagramas que 2 vogais	6	6	x		2	5	4	3	2	1		2*5*4*3*2*1	240
4ª		5	5		x	5	4	3	2	1			5*4*3*2*1	120
5ª		6	6	x		6	5	4	3	2	1		6*5*4*3*2*1	720
6ª														
7ª		7	7	x		7	6	5	4	3	2	1	7! = 5040	5040

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Assim como o grupo anterior, esse também não respondeu uma questão e chegou ao total de possibilidades correto nas outras seis. Os alunos desse grupo cometeram poucos erros no preenchimento dessa tabela e demonstraram certo conhecimento na notação de fatorial. Em nosso entendimento, nessa atividade, esse grupo teve um bom desempenho.

Quadro 32 – Transcrição do quadro da segunda atividade preenchido pelo Grupo 8.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª	A questão pedi para colecionar 3 faixas verdicais sen repetir cores (Amarelo, Vermelho, Verde)	3	3	x		3	2	1	1				3_x2_x1 =	6
2ª	Anagramas da palavra amor	4	4		x	5	4	3	2	1			5*4*3*2*1	24
3ª	A questão pede varios anagranas da palavra vogal	5	5	x		6	5	4	3	2	1		6x5x4x3x2x1 =	720 maneiras
4ª	Qual e o número de maneiras diferentes que Cleonice ten?	5	5		x	5	4	3	2	1			5x4x3x2x 1 = 120	120 possi-belidades
5ª	Formas para apresentar	6	6	x		6	5	4	3	2	1		6x5x4x3x2x1 = 720	720
6ª														
7ª	Total de senhas formadas	7	7	x		6	5	4	3	2	1		7! = 5040	5040

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Em nosso entendimento esse grupo teve um desempenho razoável no desenvolvimento dessa atividade, apesar dos erros cometidos. Seus componentes não responderam uma questão (6) e chegaram ao total de possibilidades correto em cinco, exceto a terceira questão. Os alunos desse grupo, aparentemente, já tinham conhecimento sobre a notação de fatorial, contudo, mesmo chegando ao total de possibilidades correto na maioria das questões, cometeram erros expressivos no preenchimento da tabela.

4.3.1 Análise das Observações dos Discentes Sobre a Atividade 2

(Continua)

Alunos	Observação Apresentada	Validade da Observação
A_{10} A_{12} A_{14}		Observação Inválida
	Transcrição da Observação do Grupo 1: Que elas seguem um padrão para achar o resultado	
	Análise da observação: Apesar desse grupo ter tido um bom desempenho no preenchimento da tabela nessa atividade, a observação elaborada não ficou coerente, pois, embora tenham citado que “elas seguem um padrão para achar o resultado”, não foi citado qual seria esse padrão, ficando, portanto, muito vaga em sua formulação.	
A_{02} A_{08} A_{26}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Observação do Grupo 2: Que para chegar ao resultado todos passarão por uma multiplicação	
	Análise da observação: Em nosso entendimento esse grupo elaborou uma resposta parcialmente válida para essa atividade ao afirmarem que “para chegar ao resultado todos passarão por uma multiplicação”, sabemos que no cálculo do número das Permutações Simples de um conjunto de elementos a multiplicação é a ferramenta utilizada para chegar ao total de possibilidades desejada.	
A_{09} A_{24} A_{25}		Observação Inválida
	Transcrição da Observação do Grupo 3: Obs: na 2º colocou Sim, é não, Obs: 1 = Sim, Obs: Certo!	
	Análise da observação: O grupo 3 não elaborou uma observação satisfatória, aparentemente apenas escreveram observações sobre as questões 2 e 1, ainda assim muito confusas. Apesar de os alunos desse grupo terem preenchido corretamente a tabela nessa atividade o desempenho geral dos mesmos nos testes está entre os piores.	

<table>
<tr><td rowspan="3">A_{01}
A_{07}</td><td></td><td rowspan="3">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição da Observação do Grupo 4:
Nós observamos que todos nós usamos a multiplicação, alguns parecidos e outros não.</td></tr>
<tr><td>Análise da observação: A tabela elaborada por esse grupo, e a observação, ficaram bastante semelhantes com as do grupo 2, embora a observação do segundo grupo tenha ficado melhor elaborada, notamos que ambos os grupos citaram a operação da multiplicação. Em nossa interpretação a observação desse grupo é parcialmente válida.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A_{06}
A_{20}</td><td></td><td rowspan="3">Observação Inválida</td></tr>
<tr><td>Transcrição da Observação do Grupo 5:
O modelo de cálculo é o mesmo em todas as questões, então o objetivo é sempre parecido.</td></tr>
<tr><td>Análise da observação: Apesar desse grupo ter tido um desempenho relativamente bom nessa atividade e no preenchimento da tabela, assim como o primeiro, a observação escrita por eles, também assim como a do primeiro grupo, ficou muito vaga, os alunos desse grupo citaram que “o modelo de cálculo é o mesmo em todas as questões”, mas não explicaram como seria realizado esse cálculo, nesse sentido avaliamos a observação apresentada como inválida.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A_{21}
A_{30}</td><td></td><td rowspan="3">Parcialmente Válida</td></tr>
<tr><td>Transcrição da Observação do Grupo 6:
Aqui era só multiplicar</td></tr>
<tr><td>Análise da observação: Em nosso entendimento esse grupo elaborou uma observação parcialmente válida, tendo destacado que era necessário apenas multiplicar, ou seja, apesar da observação não ter ficado muito clara, seus componentes deram destaque ao principal procedimento que deveria ser adotado ao resolvermos esse tipo de questão.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

A_{05} A_{17}	**Transcrição da Observação do Grupo 7:** O número de anagramas da palavra FILTRO que começam por vogal é 240	Observação Inválida
	Análise da observação: O grupo 7 não compreendeu que deveria ser elaborada uma única observação para a atividade englobando todas as questões e acabou formulando apenas uma única observação para a questão 3. Os componentes desse grupo também não explicaram como deveria ser desenvolvido o cálculo, apenas escreveram a resposta do total de possibilidades da terceira questão, dessa forma consideramos a observação apresentada como inválida.	
A_{04} A_{27}		Observação Inválida
	Transcrição da Observação do Grupo 8: Observamos que praticamente todas as questões tem o mesmo raciocínio.	
	Análise da observação: Assim como os grupos 1 e 5, esse grupo também formulou uma observação muito vaga, apenas afirmando que “praticamente todas as questões tem o mesmo raciocínio”, e não explicando qual seria esse raciocínio, nesse sentido consideramos a observação apresentada por esse grupo como inválida.	

Depois que os grupos resolveram a atividade, preencheram a tabela e escreveram suas observações, tivemos o momento de institucionalização com a turma, onde, a partir das observações escritas pelos próprios alunos, apresentamos o conceito formal de Permutação Simples. O tempo médio dos grupos para concluir essa atividade foi de aproximadamente 63,5 minutos

No decorrer dessa atividade notamos que os discentes ainda estavam com diversas dificuldades, em determinados momentos foi necessário realizar intervenções no intuito de sanar as dúvidas que surgiram. Por exemplo, nas questões sobre anagramas, percebemos que alguns grupos estavam formando anagramas utilizando apenas algumas letras disponíveis nas palavras e não todas as letras, também notamos dificuldades na interpretação das questões e na compressão do significado de alguns termos.

E perceptível também que a maioria dos grupos (5 deles) não escreveram observações válidas para a atividade, a maior parte desses escreveram observações muito genéricas. Três desses grupos (1, 5 e 8) destacaram que existia um padrão na resolução das questões, porém não explicaram qual seria esse padrão, por esse motivo consideramos as observações desses grupos inválidas.

4.4 ENCONTRO DO DIA 28/05/2024

Nessa data aplicamos duas atividades na turma, na primeira tivemos o objetivo de conceituar fatorial e na segunda o objetivo foi proporcionar condições para que os discentes percebessem a relação entra a razão do fatorial de um número pelo próprio número, compreender essa relação facilitaria, posteriormente, a compreensão do cálculo do número de Permutações Circulares de um conjunto de elementos.

Assim como nas atividades anteriores, no primeiro momento orientamos que os discentes formassem grupos de no máximo 4 componentes, em seguida distribuímos as listas com as atividades e as tabelas. Nesse dia teríamos 3 aulas de 45 minutos para aplicar a atividade, sendo 2 delas seguidas e uma após o intervalo.

Nessa aula também não tivemos dificuldades para formar os grupos e nenhuma outra intercorrência significativa, exceto o fato de alguns alunos além de terem chegado atrasado na aula, estavam dispersos, conversando, andando na sala e atrapalhando o desenvolvimento da atividade, infelizmente, nesse dia, foi necessário solicitar que esses alunos se retirassem da sala.

Exceto alguns grupos, no geral os discentes apresentaram menos problema para realizar essa atividade do que as duas primeiras, gastando inclusive uma quantidade de tempo bem menor. Contudo ainda percebemos algumas dificuldades, como: não compreensão do que deveria ser feito, dificuldade de interpretação, dificuldade em generalizar o padrão observado, entre outros.

Na tabela abaixo apresentamos o modelo do quadro da atividade sobre fatorial que deveria ser preenchido pelos grupos após a resolução das questões da lista, em seguida apresentamos a transcrição do seu preenchimento por cada grupo.

A atividade sobre fatorial era composta por seis questões onde os grupos deveriam responder cada uma das questões, preencher a tabela e escrever suas observações, ao finalizar a atividade, no momento da institucionalização, a partir das observações dos grupos, sistematizamos o conceito formal de fatorial.

Quadro 33 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 1.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	5	5	5	4	3	2	1						5!
2ª	6	6	6	5	4	3	2	1					6!
3ª	7	7	7	6	5	4	3	2	1				7!
4ª	8	8	8	7	6	5	4	3	2	1			8!
5ª	9	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1		9!
6ª	10	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10!

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo teve um excelente desempenho nessa atividade, respondendo e preenchendo a tabela corretamente em todas as questões, na coluna onde deveriam preencher qual o cálculo necessário para se obter o resultado, colocaram a resposta no formato de fatorial demonstrando já ter um certo conhecimento sobre esse assunto.

Quadro 34 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 2.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	5	5					x						5! = 120
2ª	6	6						x					6! = 720
3ª	7	7							x				7! = 5.040
4ª	8	8								x			8! = 40.320
5ª	9	9									x		9! 362.880
6ª	10	10										x	10! = 3.628.800

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo também teve um bom desempenho nessa atividade, chegando à resposta correta em todas as questões e também fazendo uso da notação de fatorial. Nas colunas onde deveriam marcar o número de possibilidades das etapas, marcaram apenas “x”, acreditamos que esse fato ocorreu devido terem interpretado que deveriam marcar o número **total** de etapas do evento, e não escrever a quantidade de possibilidades correspondente a **cada** etapa. Apesar dessa situação, em nosso ponto de vista, o grupo teve um bom desempenho.

Quadro 35 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 3.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	1	5	5	4	3	2	1						5! = 120
2ª	6	6	6	5	4	3	2	1					6*5*4 120
3ª	1	7	7	6	5	4	3	2	1				7! = 5.040
4ª	3	8	8	7	6	5	4	3	2	1			8! 40.320
5ª	3	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1		9! = 362.880
6ª	10	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10!=3.628.800

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Podemos observar que esse grupo cometeu uma quantidade de erros maior que os dois primeiros, principalmente na coluna onde perguntava o número de etapas independentes do evento, contudo ainda consideramos que o desempenho geral desse grupo foi bom. Os discentes chegaram à resposta correta em 5 questões, errando apenas a segunda, ainda fizeram uso da notação de fatorial demostrando já ter certo conhecimento sobre esse tema. Esse grupo não escreveu nenhuma observação ao finalizar o preenchimento da tabela.

Quadro 36 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 4.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	5	6	5.	4.	3.	2.	1=						120
2ª	6	7	6.	5.	4.	3.	2.	1=					720
3ª	7	8	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1=				5040
4ª	8	9	8.	7.	6.	5.	4,	3.	2.	1=			40320
5ª	9	10	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1=		362880
6ª	10	11	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1=	3628800

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Apesar de terem preenchido de maneira errada a coluna onde perguntava o número de elementos a disposição do evento na situação, de maneira geral, esses discentes tiveram um bom desempenho. Na última coluna onde deveriam escrever o cálculo necessário para se obter o resultado, escreveram apenas o resultado final, tendo acertado esse resultado em todas as questões.

Quadro 37 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 5.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	4	5	20	60	120	120							
2ª	5	6	2	6	24	120	720						
3ª	6	7	42	210	840	2.520	5.040	5.040					
4ª	7	8	56	336									
5ª	8	9	72	504	3.042	15.120	60.460	180.440	362.883	61.880			
6ª													

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O grupo 5 está entre os grupos que tiveram um dos piores desempenhos no desenvolvimento dessa atividade e no preenchimento da tabela. Deixaram algumas linhas e colunas sem preencher e responderam incorretamente praticamente todas as linhas e colunas dentre as que foram preenchidas. Escreveram alguns números aparentemente aleatórios, o que demonstra que os discentes desse grupo ou não entenderam ou não se empenharam em responder essa atividade. Esse grupo também não escreveu nenhuma observação após o preenchimento da tabela.

Quadro 38 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 6.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	5	5	5	4	3	2	1						5x4x3x2x1 = 120
2ª	6	6	6	5	4	3	2	1					6x5x4x3x2x1 = 720 senhas
3ª	7	7	7	6	5	4	3	2	1				7x6x5x4x3 x2x1 = 5040 anagramas
4ª	8	8	8	7	6	5	4	3	2	1			8x7x6x5x4 x3x2x1=40320
5ª	9	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1		9x8x7x6x5x4 x3x4x3x2x1= 362880
6ª	10	1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10x9x8x7x6x5 x4x3x2x1= 3628800 maneiras.

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Durante a realização dessa atividade, esse grupo era o único composto por 4 componentes, em nosso entendimento tiverem um desempenho excelente, responderam e preencheram a tabela corretamente em praticamente todas as questões, cometendo apenas dois erros na coluna onde perguntava o número de elementos a disposição do evento na situação.

Quadro 39 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 7.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	5												
2ª	6												
3ª	7												
4ª	8												
5ª	9												
6ª	10												

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Os alunos do grupo 7 não evidenciaram comprometimento para resolver as questões, entregaram a tabela em branco e não escreveram nenhuma observação no final. Analisando os resultados dos testes dos discentes desse grupo, também observamos que estão entre os que tiveram os piores desempenhos, ou seja, o desempenho dos mesmos nessa atividade, também refleti, em partes, o resultado geral dos componentes do grupo.

Quadro 40 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 8.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	5	5	5	4	3	2	1						5! = 120
2ª	6	6	6	5	4	3	2	1					6! = 720
3ª	7	7	7	6	5	4	3	2	1				7! = 5.040
4ª	8	8	8	7	6	5	4	3	2	1			8! = 40.320
5ª	9	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1		362.880
6ª	10	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	3.628.800

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O desempenho desse grupo foi excelente nessa atividade, além de terem respondido todas as questões corretamente, se saíram bem no preenchimento da tabela e ainda usaram a notação de fatorial na última coluna, demonstrando já ter certo conhecimento sobre esse assunto. Devido todos esses fatores, em nosso entendimento, esse grupo executou com excelência essa atividade.

Quadro 41 – Transcrição do quadro da terceira atividade preenchido pelo Grupo 9.

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª	5	5	5	4	3	2	1						120
2ª	6	6	6	5	4	3	2	1					720
3ª	7	7	7	6	5	4	3	2	1				5040
4ª	8	8	8	7	6	5	4	3	2	1			40.320
5ª	9	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1		362.880
6ª	10	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	3.628.800

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Consideramos que o desempenho geral desse grupo nessa atividade foi muito bom. Os discentes não erraram nenhuma questão e preencheram corretamente a tabela. Na última coluna, onde deveriam preencher com o cálculo necessário para se obter o resultado, escreveram apenas o resultado final, sendo todos corretos, assim, mesmo não escrevendo o procedimento, avaliamos que os discentes desse grupo, de maneira geral, compreenderam o objetivo dessa atividade e a desenvolveram com excelência.

4.4.1 Análise das Observações dos Discentes Sobre a Atividade 3

(Continua)

Alunos	Observação Apresentada	Validade da Observação
A_{10} A_{12} A_{14}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Observação do Grupo 1: notamos que a observação que tudos as questões é de fatorial, fatoramos tudo e chegamos a conclução, do resultado.	
	Análise da observação: Embora esse grupo tenha tido um bom desempenho no preenchimento da tabela nessa atividade, em nosso entendimento, a observação elaborada não ficou clara, pois, apesar de mencionarem que: "tudos as questões é de fatorial", não explicaram nada sobre o procedimento de cálculo adotado. Ainda escreveram: "fatoramos tudo e chegamos a conclução", contudo, podemos perguntar: qual o significado da palavra **fatoramos** utilizada por esses discentes? nesse sentido, consideramos a observação como parcialmente válida.	
A_{02} A_{08} A_{26}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Observação do Grupo 2: no fatorial usa-se a multiplicação para resolve as questões	
	Análise da observação: Em nosso entendimento ao escreverem que: "no fatorial usa-se a multiplicação para resolve as questões", esse grupo elaborou uma observação parcialmente válida para essa atividade, pois sabemos que no cálculo de fatorial a multiplicação é ferramenta indispensável para chegar ao total de possibilidades desejada.	
A_{05} A_{17}		Observação Inválida
	Transcrição da Observação do Grupo 4:	

A_{23}	Esse cáuculo foi facil para o nosso grupo.	
	Análise da observação: Apesar desse grupo ter tido um bom desempenho nessa atividade e no preenchimento da tabela, a observação escrita por eles, ficou muito vaga, os alunos escreveram: “Esse cáuculo foi facil para o nosso grupo.”, contudo, não explicaram como seria realizado esse cálculo, assim consideramos inválida a observação apresentada.	
A_{04} A_{15} A_{20} A_{30}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Observação do Grupo 6: Em todas as questões usamos a multiplicação.	
	Análise da observação: Em nossa interpretação esse grupo elaborou uma observação parcialmente válida, tendo destacado que: “Em todas as questões usamos a multiplicação.”, ou seja, os discentes deram destaque a principal operação utilizada ao resolvermos esse tipo de questão, a multiplicação.	
A_{01} A_{07}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Observação do Grupo 8: Multiplicação é a operação que é usada na fatorial, usando os números naturais e positivos, para descobrirmos as combinações.	
	Análise da observação: Assim como os grupos 1, 2 e 6, esse grupo também formulou uma observação parcialmente válida, pois os mesmos mencionaram a operação da multiplicação como ferramenta necessária no cálculo de fatorial.	
A_{03} A_{25}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Observação do Grupo 9: A observação e para multiplicar	
	Análise da observação: Os discentes desse grupo também formularam uma observação parcialmente válida, pois, mesmo não ficando muito claro a resposta final, citaram a operação da multiplicação.	

O tempo médio gasto pelos grupos para concluir essa atividade foi de aproximadamente 35 minutos. O momento da institucionalização ocorreu a partir das observações apresentadas pelos próprios discentes após os grupos resolveram a atividade e preencheram a tabela.

No decorrer dessa atividade, mesmo não ocorrendo nenhuma intercorrência grave, alguns imprevistos aconteceram, também notamos que alguns grupos não demonstram comprometimento em sua execução. Apesar do número de observações inválidas ter sido menor que os das duas primeiras atividades, três grupos não escreveram nenhuma observação ao finalizar o preenchimento da tabela.

De maneira geral, observamos que as dificuldades apresentadas pelos discentes nessa atividade foram menores, apesar que ainda foram notadas algumas, como por exemplo, dificuldade em compreender o significado de algumas palavras, entre outras. Também faltou empenho e comprometimento por parte de determinados alunos.

4.4.2 Segunda Atividade do dia 28/05/2024 (Atividade 4)

Nesse mesmo dia, após o intervalo, aplicamos a atividade envolvendo a razão do fatorial de um número pelo próprio número. Na tabela a seguir apresentamos o modelo do quadro da atividade preenchida pelos alunos, e, em seguida, apresentamos a transcrição do seu preenchimento por cada grupo.

Como já destacado anteriormente essa atividade teve como objetivo fazer com que os alunos percebessem a relação entre a razão do fatorial de um número pelo próprio número, a percepção dessa relação é fundamental para a dedução da fórmula para calcular o número de Permutações Circulares de um grupo de elementos.

Nesse dia alguns professores faltaram e estava um pouco tumultuado a organização das aulas na escola, alguns professores tiveram que ficar com mais de uma turma e muitos alunos estavam andando nos corredores atrapalhando as aulas das outras classes. Após o intervalo, aproveitando o tumultuo nas outras turmas, muitos alunos da que estávamos foram embora, mesmo a gente repreendendo e tentando evitar essas situações, devido todo esse contexto essa foi a atividade onde tivemos o maior número de faltas dos discentes, foram formados apenas três grupos.

Quadro 42 – Transcrição do quadro da quarta atividade preenchido pelo Grupo 1.

Número	**Fatorial do Número**	**Razão do Fatorial do Número Por Ele Mesmo**	**Simplificação da Razão Anterior Representada Como Único Fatorial**
3	3!	6 ÷ 3 = 2	2!
4	4!	24 ÷ 4 = 6	3!
5	5!	120 ÷ 5 = 24	4!
...			
10	10!	3.628.800 ÷ 10 = 362.880	10!
...			
n	n!	n ÷ n =	n!

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Em nosso entendimento esse grupo teve um bom desempenho na realização dessa atividade e no preenchimento da tabela, tendo cometido apenas três erros, sendo um erro na penúltima e dois na última linha. Os erros cometidos na última linha podem ter relação com a dificuldade que os estudantes têm de representar algebricamente padrões observados no dia a dia, ou ainda podem ter interpretado de maneira distinta da nossa o que estava sendo solicitado, ou ambos.

Na última linha onde os discentes deveriam escrever de maneira generalizada a partir da observação e análise das linhas anteriores, a razão do fatorial do número pelo próprio número, para qualquer número “n”, depois simplificar essa razão como um único fatorial, observamos que os alunos cometeram alguns equívocos, demostrando certa dificuldade na generalização e na escrita algébrica da relação observada.

Quadro 43 – Transcrição do quadro da quarta atividade preenchido pelo Grupo 2.

Número	**Fatorial do Número**	**Razão do Fatorial do Número Por Ele Mesmo**	**Simplificação da Razão Anterior Representada Como Único Fatorial**
3	3*2*1	6 **:** 3 = 2	2!
4	4*3*2*1	24 **:** 4 = 6	3!
5	5*4*3*2*1	120 **:** 5 = 24	4!
...			
10	10*9*8*7*6*5*4*3*2*1	3.628.800 **:** 10 = 362.880	9!
...			
n	n! = x		

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Assim como o grupo anterior, em nossa interpretação esse grupo também teve um desempenho bom nessa atividade, os erros cometidos foram poucos. No preenchimento da tabela deixaram alguns campos em branco na última linha, justamente a linha onde deveriam representar algebricamente os padrões observados, reforçando mais uma vez a nossa crença na dificuldade que os discentes têm para representar matematicamente determinadas situações.

Quadro 44 – Transcrição do quadro da quarta atividade preenchido pelo Grupo 3.

Número	**Fatorial do Número**	**Razão do Fatorial do Número Por Ele Mesmo**	**Simplificação da Razão Anterior Representada Como Único Fatorial**
3	3!	6 ÷ 3 = 2	2!
4	4!	24 ÷ 4 = 6	3!
5	5!	120	4
...	x	x	x
10	10!	362.880	9
...	x	x	x
n	n! = n	n (n – 1) – n (2)	3.2.1 = 6

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O grupo 3 teve o pior desempenho no preenchimento da tabela nessa atividade, destacando-se como o grupo que cometeu o maior número de erros. Assim como os demais grupos não conseguiram generalizar a situação de maneira algebricamente na última linha, além de cometerem outros erros.

A seguir apresentamos a análise das conclusões apresentadas pelos grupos.

Alunos	**Conclusão Apresentada**	**Validade da Conclusão**
A_{10} A_{12} A_{14}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 1: Chegamos ao resultado, que a fatorial do número dividida por ele mesma chega ao resultado e depois simplificamos.	
	Análise da conclusão: Apesar desse grupo ter tido um bom desempenho nessa atividade, não conseguiram formular uma conclusão válida, elaborando uma conclusão muito vaga.	

A_{20} A_{30}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 2: Todo número é um fatorial, então o mesmo pode ser dividido e multiplicado.	
	Análise da conclusão: Esse grupo também não elaborou uma conclusão válida para essa atividade, mesmo tendo um bom desempenho no preenchimento da tabela, assim como o grupo anterior escreveram uma conclusão muito vaga.	
A_{04} A_{06}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 3: Eu achei difício chega no resultado	
	Análise da conclusão: Além de não terem tido um bom desempenho na atividade e no preenchimento da tabela, esse grupo também não elaborou uma conclusão válida para essa atividade, apenas fizeram um comentário sobre a dificuldade que tiveram para chegar ao resultado.	

Como ressaltado anteriormente essa atividade foi onde tivemos a maior quantidade de faltas, devido muitos alunos terem ido embora após o intervalo. Formamos três grupos com os alunos que ficaram em sala, um com três componente e os outros com dois alunos.

Apesar de terem tido um desempenho razoavelmente bom no preenchimento da tabela, nenhum grupo elaborou uma conclusão válida para essa atividade, acreditamos que o fato de muitos alunos terem gazeado aula esse dia, pode ter influenciado os discentes que permaneceram a se sentirem desmotivados e não se se esforçarem para elaborar uma boa conclusão.

4.5 ENCONTRO DO DIA 11/06/2024

Nesse dia aplicamos a atividade sobre Arranjo Simples, onde o objetivo foi proporcionar condições para que os discentes, a partir da resolução de algumas questões e o preenchimento de uma tabela sistematizada, deduzissem a fórmula resolutiva para determinar o número de Arranjos Simples de um grupo **n** de elementos tomados **p** a **p**. O tempo destinado para a atividade foi de 90 minutos.

A maior parte dos grupos estavam empenhados em resolver as questões e preencher a tabela, ocorrendo poucas intercorrências e distrações, exceto alguns discentes que continuavam dispersos e com conversas paralelas. Nesse encontro ainda foram observadas algumas dificuldades, como: alguns grupos, ao formarem os arranjos, onde deveriam usar apenas alguns elementos entre os disponíveis, faziam uso de todos (como no cálculo de fatorial); dificuldade em representar as situações algebricamente em função de **n** e **p**, entre outras.

Como previsto nas análises prévias, os grupos montaram diferentes estratégias para resolver as questões, como: PFC, árvore de possibilidades, enumeração sistemática e uso da fórmula resolutiva. Quando questionamos os grupos que fizeram uso da fórmula para resolver as questões, onde tinham visto a mesma, responderam que tinham estudado sobre o assunto na internet.

Um fato curioso que merece ser melhor investigado foi que os grupos que fizeram uso da fórmula resolutiva, não apresentaram dificuldades relevantes para resolver as questões, mas precisaram de apoio ao preencherem a tabela, o que levou os mesmos até mesmo a levantarem questionamentos sobre sua utilidade.

No decorrer da atividade alguns grupos também perceberam que as questões poderiam ser resolvidas mais facilmente utilizando o PFC. Na tabela abaixo apresentamos o modelo do quadro da atividade sobre Arranjo preenchido pelos grupos após a resolução das questões da lista, e em seguida apresentamos a transcrição do seu preenchimento por cada grupo.

No geral os discentes não apresentaram dificuldades significativas ao responderem as questões, excetuando-se o fato de determinados grupos procederem na resolução do mesmo modo que faziam na atividade sobre Permutação Simples, onde empregavam todos os elementos disponíveis para formar os agrupamentos. Quase todos os alunos também apresentaram dificuldades ao preencherem a tabela, especialmente as duas últimas colunas.

Quadro 45 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 1.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				
1ª	4	2		x	4	3			12	4 * 3	$\frac{4!}{2!}$	$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!}$
2ª	5	2		x	5	4			20	5 * 4	$\frac{5!}{4!}$	$\frac{5!}{(2+2)!} = \frac{5!}{4!}$
3ª	5	3		x	5	4	3		12	5 * 4 * 3	$\frac{5*4!}{3!} =$	$(\frac{5*4}{3})$
4ª	3	6	x		6	5	4		120	6 * 5 * 4	$\frac{6*5!}{4!}$	$(\frac{6*5!}{4!})$
5ª	4	6		x	6	5	4	3	360	6 * 5 * 4 * 3	$\frac{6*5}{4*3}$	$(\frac{4*6!}{(4+1)})$
6ª	4	6		x	6	5	4	3	360	6 * 5 * 4 * 3	$\frac{6*5*4*3*2!}{2!}$	360

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Em nosso entendimento esse grupo teve um desempenho mediano nessa atividade. Na coluna onde deveriam marcar se a ordem dos elementos alterava o agrupamento, marcaram “NÃO” em quase todas as questões, nesse item todas as respostas deveriam ser “SIM”. O fato de terem errado o preenchimento das duas últimas colunas em praticamente todas as questões, demonstrou a dificuldade que esses discentes ainda tinham com relação ao emprego da linguagem simbólica, especialmente a notação de fatorial. Embora tenham cometido esses erros, os discentes desse grupo chegaram ao total de possibilidades correto, e escreveram corretamente o cálculo necessário para chegar a essas possibilidades, em praticamente todas as questões. Esse grupo não escreveu nenhuma conclusão ao finalizar a atividade.

Quadro 46 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 2.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				
1ª	4	3	x						12	4 * 3		12
2ª	5	2	x						20			20
3ª	3	5		x					120	5!		120
4ª	6	3	x						120	6 * 5 * 4		120
5ª	4	6	x						360	6 * 5 * 4 * 3		360
6ª	4	6		x					360	6 * 5 * 4 * 3		360

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo cometeu uma quantidade de erros um pouco maior que o primeiro e ainda deixaram de preencher algumas colunas na tabela. Apesar de terem chegado ao total de possibilidades correto e terem escrito corretamente o cálculo necessário para obter o total de possibilidades em quase todas as questões, em nossa interpretação, esse grupo teve um baixo desempenho nessa atividade. Na coluna onde deveriam marcar se a ordem dos elementos alterava o agrupamento, marcaram “NÃO” em duas questões (3 e 6), nesse item todas as respostas deveriam ser “SIM”, nesse quesito esse grupo acertou mais itens que o primeiro.

Quadro 47 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 3.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				
1ª	4	2	x		4	3			12	4 * 3 = 12	$\frac{4!}{2!}$	$\frac{4!}{(4-2)}$
2ª	5	2	x		5	4			20	5 * 4 = 20	$\frac{5!}{2!}$	$\frac{5}{(5-2}$
3ª	5	3	x		5	4	3		60	5*4*3 = 60	$\frac{5!}{2!}$	$\frac{5}{5-3}$
4ª	6	3	x		6	5	4		120	6*5*4=120	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{(6-3)}$
5ª	1	4		x	6	5	4		120	6*5*4=120	$\frac{6!}{3!}$	$\frac{1}{(1-4)}$
6ª	6	4	x		6	5	4		360	6*5*4=360	$\frac{6!}{2!}$	$\frac{6}{(6-4)}$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Embora tenham cometido alguns erros no preenchimento da tabela, de maneira geral, o terceiro grupo teve desempenho mediano nessa atividade. A última coluna foi onde esses discentes mais cometeram erros, demonstrando, mais uma vez, a dificuldade que os alunos têm em expressar determinadas quantidades em função de outras, em perceber padrões e em estabelecer generalizações. Esse grupo também não escreveu nenhuma conclusão ao finalizar o preenchimento da tabela.

Quadro 48 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 4.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				
1ª	4	2	x		4	3			12	3 * 4	4! / 2!	4*3*2*1 / 2!
2ª	5	2	x		5	4	3		60	5 * 4 * 3	5! / 2!	5*4*3*2*1 / 2!
3ª	3	5	x		3	2	1		6	3 * 2 * 1	3!	3 * 2 * 1
4ª	6	3	x		6	5	4		120	6 * 5 * 4	5!	5*4*3*2*1
5ª	4	1	x									
6ª												

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Com relação aos demais grupos anteriores, esse foi o que teve o pior desempenho nessa atividade, pois, além de cometerem diversos erros no preenchimento das linhas da tabela em praticamente todas as questões, exceto a primeira, ainda deixaram questões em branco. Os componentes desse grupo não escreveram nenhuma conclusão ao finalizarem a atividade e o preenchimento da tabela.

Quadro 49 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 5.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				
1ª	4	2		x	4	3			12	4*3		
2ª	5	2		x	5	4			20	5*4		
3ª	5	3		x	5	4	3		60	5*4*3		
4ª	6	3		x	6	5	4		120	6*5*4		
5ª	6	4			5	4	3	2	120	5*4*3*2*1		
6ª	6	4			6	5	4	3	360	6*5*4*3		

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Embora tenham deixado as duas últimas colunas da tabela sem preencher e marcado em todas as questões que a ordem dos elementos não alterava os agrupamentos, em nosso entendimento esse grupo teve um desempenho satisfatório nessa atividade, tendo em vista que identificaram corretamente os valores de “n” e “p”, acertaram o número de possibilidades de escolha para os elementos de cada etapa, escreveram corretamente o total de possibilidades e o cálculo necessário para obter esse total, dessa forma avaliamos como bom o desempenho desse grupo. Os componentes desse grupo também não escreveram nenhuma conclusão ao finalizarem a atividade.

Quadro 50 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 6.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				
1ª	4	2		x	4	3			12	4*3	4 . 3 2 [2] 2 2!	$\frac{4!}{4-2)} = \frac{4!}{2!}$
2ª	5	5		x	5	4			20	5*4	5 * 4 * 3 = 20 2!	5! = $\frac{5!}{4!}$ (. 2 !
3ª	5	3		x	5	4	3		60	5*4*3	5 * 3 * 2! = 60 / 20 2!	($\frac{5*4}{2}$)
4ª	6	3	x		6	5	4		120	6*5*4	6*5*4 × 2.1 = 120	($\frac{6*5}{4!}$)
5ª	6	4		x	6	5	4	3	360	6*5*6	6*5*4*3*2! = 360	$\frac{4*6!}{4*1}$
6ª	4	4		x	6	5	4	3	360	6*5*4*3	6*5*4*3*2! = 360 2!	$^{3}60$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Assim como o grupo anterior, em nosso entendimento, o desempenho desse grupo foi satisfatório, apesar dos erros cometidos, principalmente nas duas últimas colunas. Os alunos também conseguiram identificar corretamente os valores de “n” e “p”, acertaram o número de possibilidades de escolha para os elementos de cada etapa, escreveram corretamente o total de possibilidades e o cálculo necessário para obter esse total. Os discentes também não escreveram nenhuma conclusão ao finalizarem o preenchimento da tabela.

Quadro 51 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 7.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				$A_{n,,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
1ª	4	2	x		4	3			12	4*3	$A_{4,2} = \frac{24}{2} = 12$	$A_{4,2} = \frac{4!}{(4,2)!}$
2ª	5	2	x		5	4			20	5*4	$A_{5,2} = \frac{120}{6} = 20$	$A_{5,,2} = \frac{5!}{(5-2)!}$
3ª	5	3	x		5	4	3		60	5*4*3	$A_{5,3} = \frac{120}{6} = 60$	$A_{5,,3} = \frac{5!}{(5-3)!}$
4ª	6	3	x		6	5	4		120	6*5*4	$A_{6,3} = \frac{720}{6} = 120$	$A_{6,,3} = 6!/(6-3)!$
5ª	6	4	x		6	5	4	3	360	6*5*4*3	$A_{6,4} = \frac{720}{2} = 360$	$A_{6,,4} = 6!/(6-4)!$
6ª	6	4	x		6	5	4	3	360	6*5*4*3	$A_{6,4} = \frac{720}{2} = 360$	$A_{6,,4} = 6!/(6-4)!$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Como podemos observar, o desempenho do grupo 7 foi excelente na resolução das questões e no preenchimento da tabela, praticamente não cometeram erros. Esse grupo foi um dos que fizeram uso da fórmula resolutiva para responder as questões, como podemos notar nas duas últimas colunas. Analisando a tabela preenchida por esse grupo, também notamos que já tinham certa familiaridade com a notação de Arranjo.

Quadro 52 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 8.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.		Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª					
1ª	4	2		x	4	3			12	4*3=12		$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$	$\frac{4!}{(4-2)}$ $\underline{4!}$
2ª	5	2		x	5	4			20	5*4=20		$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} =$ 20	$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} =$ 20
3ª	3	5		x	5	4	3		60	5*4*3=60		$\frac{5!}{(5!-3!)} = \frac{120}{2} =$ 60	$\frac{5!}{(5!-3!)} = \frac{120}{2} =$ 60
4ª	6	3		x	6	5	4		120	6*5*4=120		$\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{720}{6}$ =120	$\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{720}{6}$ =120
5ª	4	6		x	6	5	4	3	360	6*5*4*3		$\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} =$ 360	$\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2}$ =360
6ª	4	6		x	6	5	4	3	360	6*5*4*3		$\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} =$ 360	$\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2}$ =360

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O grupo 8 teve um ótimo desempenho na resolução das questões e no preenchimento da tabela nessa atividade, mesmo com os erros cometidos. Entre os erros cometidos podemos notar quem em algumas questões trocaram os valores de “n” e “p” entre si (erro também cometido por outros grupos), marcaram que a ordem dos elementos não alterava os agrupamentos e cometeram alguns equívocos ao expressarem o cálculo realizado por meio de fatorial. Mesmo com esses erros, esse grupo acertou a maioria das questões e o cálculo necessário para encontrar os resultados.

Quadro 53 – Transcrição do quadro da quinta atividade preenchido pelo Grupo 9.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				
1ª	4	2	Sim		4	3			12	4*3	4 . 3 . 2 (2) 2 2!	$\frac{4!}{(4-2)!}$
2ª	5	4	Sim		5	4			20	5*4	5 . 4 . 3 = 20 2!	$\frac{5!}{(3-1)!}$
3ª	5	5	Sim		5	4	3		30	5*4*3	5 . 3 . 2 = 60/120 2!	$\frac{5}{(3-1)}$
4ª	6	3	Sim		6	4	3		120	6*4*3	6 . 5 . 4 x 2! = 120	$\frac{6}{(4-2!}$
5ª	6	4		x	6	5	4	3	360	6*5*6	6 . 5 . 4 . 3.2!= 360	$\frac{6}{(3-1)!}$
6ª	4	4		x	6	5	4	3	360	6*5*4*3	6 . 5 . 4 . 3.2!= 360	$\frac{4}{(4-4)!}$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O desempenho do grupo 9 foi mediano, pois cometeram diversos erros ao preencherem a tabela, mesmo tendo preenchido corretamente algumas colunas. Nas duas últimas colunas, apresentaram um desempenho semelhante ao da maioria dos grupos, errando o preenchimento de praticamente todas as linhas e colunas, ratificando a dificuldade em perceber padrões numéricos e expressar genericamente situações utilizando linguagem e notação matemática.

4.5.1 Análise das Conclusões Sobre a Atividade 5

(Continua)

Alunos	Conclusão Apresentada	Validade da Conclusão
A_{02} A_{08} A_{26}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 2: ~~não~~ é um assunto razoavelmente fácil.	
	Análise da conclusão: Analisando a conclusão apresentada por esse grupo, notamos que ficou muito vaga, pois apenas escreveram que o assunto é razoavelmente fácil, dessa forma classificamos como uma conclusão inválida. Contudo esse grupo escreveu a seguinte observação: “pra todos os resultados precisa utilizar a multiplicação”, aqui o grupo citou a principal ferramenta utilizada no cálculo de fatorial, ou seja, os discentes conseguiram observar que existia um padrão na resolução, mas não conseguirem escrever uma conclusão válida a partir dessa observação.	
A_{01} A_{07}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 7: É simple o arranjo quando segue a fórmula e consegue absorver as informações e colocar, de forma correto, na fórmula.	
	Análise da conclusão: Ao escreverem que: “É simple o arranjo quando segue a fórmula e consegue absorver as informações e colocar, de forma correto, na fórmula.”, em nosso entendimento, esse grupo elaborou uma conclusão parcialmente válida para essa atividade. É importante notar que esses discentes já trouxeram, de outras fontes, conhecimentos sobre o assunto. A nosso ver, é crucial levarmos em consideração essa bagagem e esses conhecimentos. Na observação escrita por esses alunos, também escreveram sobre a importância de considerar a ordem ocupada pelos elementos nesses tipos de questões.	
A_{05} A_{23}		Observação Inválida
	Transcrição da Observação do Grupo 8:	

	Nossa observação e que nessa atividade foi haver com a fatoriação e foi bem fácil.	
	Análise da observação: O grupo 8 não escreveu nenhuma conclusão e não elaborou uma observação satisfatória, apesar de terem tido um ótimo desempenho na resolução das questões e no preenchimento da tabela. Esse fato evidencia a dificuldade que esses discentes têm em elaborar frases conclusivas e reforça a importância de trabalharmos situações com essa exigência no dia a dia durante nossas atividades laborais.	
A_{04} A_{20}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 9: Em algumas questões houve sequência númerica, cálculos iguais e igualdade também no resultado. Para calcular usamos "arranjo simples e fatorial", portanto, em todas as questões usamos a multiplicação	
	Análise da conclusão: Em nosso entendimento a conclusão escrita por esse grupo é parcialmente válida. Os discentes escreveram que para calcular usaram fatorial, arranjo simples e multiplicação. Na observação também escreveram que as questões tem a mesma lógica nos resultados, ou seja, perceberam que existe um padrão nas resoluções.	

É importante observar que mais da metade dos grupos não escreveram nenhuma conclusão ao finalizarem a atividade e o preenchimento da tabela. Diversos questionamentos podem ser levantados a esse respeito, podem ser levantas, por exemplo, questões sobre a motivação dos alunos, pode-se questionar ainda se o tempo destinado para a realização da atividade foi satisfatório ou mesmo se os discentes compreenderam o objetivo central da mesma, entre outros. Essas e outras situações podem ser melhor investigadas em trabalhas posteriores sobre essa temática.

Nessa atividade não houve redução significativa no tempo médio para os grupos concluírem a atividade, sendo o tempo médio gasto de 65,2 minutos. No geral os alunos não apresentaram dificuldades relevantes, sendo que erraram mais ao preencherem as duas últimas. Os discentes também montaram diferentes estratégias para responder as questões.

4.6 ENCONTRO DO DIA 13/06/2024

Nesse dia aplicamos a atividade sobre Combinação Simples na turma, o objetivo foi proporcionar condições para que os alunos, a partir da resolução de algumas questões, do preenchimento de uma tabela organizada com informações retiradas das questões, da observação sistemática, da análise dos padrões e das relações, pudessem, por si próprios, determinar a fórmula resolutiva que nos permite calcular o número de Combinações Simples de um conjunto **n** de elementos tomados **p** a **p**. Os alunos tiveram 90 minutos para resolver as questões, preencher a tabela e escrever suas conclusões.

A aplicação dessa atividade foi uma das mais conturbadas, diversas intercorrências atrapalharam o bom desenvolvimento da aula, o que pode ter comprometido a compreensão dos discentes sobre esse assunto. Como já estávamos nos aproximando do mês das férias escolares, encontrávamos no período das avaliações bimestrais, e como a escola costuma destinar uma semana para as aplicações das provas, o tempo das aulas não transcorreu normalmente, ocorrendo apenas a duas primeiras aulas dentro do tempo habitual. Esse foi o primeiro ponto de tensão, os alunos também estavam eufóricos e ansiosos esse dia.

Além das situações relatadas no parágrafo anterior, nesse dia também estava ocorrendo uma campanha onde estavam sendo realizadas consultas e exames de vista na escola, onde todos os alunos poderiam participar, por esse motivo muitos alunos que estavam realizando a atividade acabaram saindo de sala.

Os grupos usaram diferentes estratégias para resolver as questões, inclusive o emprego da fórmula resolutiva. Contudo diversas dificuldades foram observadas, por exemplo, alguns grupos apresentaram dificuldades para resolver as questões, procedendo do mesmo modo de quando resolviam as questões de Arranjo Simples, onde consideravam que a ordem que os elementos ocupavam nos agrupamentos formados, fosse relevante. Fizemos algumas intervenções no intuito de sanar as dificuldades observadas, inclusive respondemos as duas primeiras questões e preenchendo as linhas equivalentes da tabela.

Na tabela a seguir exibimos o quadro com o modelo da atividade sobre Combinação que foi preenchido pelos grupos após a resolução das questões da lista, em seguida apresentamos as transcrições do seu preenchimento por cada grupo.

Como citado anteriormente, diversas dificuldades foram observadas quando os discentes deram início a resolução das questões e ao preenchimento da tabela. Fizemos intervenções diretamente em alguns grupos, explicando individualmente para esses, também respondemos algumas questões no quadro para toda a turma, após essas intervenções alguns grupos sanaram suas dúvidas iniciais e deram continuidade na resolução das questões, tiveram mais facilidade ao preencherem a tabela. Alguns grupos ainda fizeram uso da fórmula resolutiva. Assim como na atividade anterior, as duas últimas colunas foram onde os alunos mais cometeram erros.

Quadro 54 – Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 1.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para formar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (**p!**).	Qual o número de possibilidades de cada escolha a seguir para o agrupamento?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha				
1ª	4	2		x	2!	4	3			6	$\frac{4\,.\,3}{2} = 6$	$\frac{4!}{2!\,2!}$	$\frac{4!}{2!\,(4-2)!}$
2ª	5	2		x	2!	5	4			10	$\frac{5*4}{2} = 10$	$\frac{5!\,-\,4!}{2!}$	$\frac{5\,.\,2}{2} = 10$
3ª	5	3		x	3!	5	4			6	$\frac{5*4}{3} = 6$	$\frac{5!\,-\,4!}{3!}$	$\frac{5!\,.\,3}{3} = 6$
4ª	6	4		x	4!	6	5	4		24	$\frac{6*5*4}{4!} = 24$	$\frac{6!}{4!\;\;5!}$	$\frac{6!\,.\,4}{4!} = 24$
5ª	3	6		x	5!	5	4			20	$5 * 4 = 20$	$\frac{5!-4!}{2!} = 20$	$\frac{5*4}{0} = 20$
6ª	8	3		x	3!	8	7	6		56	$\frac{8*7*6}{6} = 56$	$\frac{8!}{3!\,5!}$	$\frac{8!}{3!\,(8-3)!}$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O primeiro grupo teve um bom desempenho na sexta atividade, eles identificaram corretamente os valores de “n” e “p” em praticamente todas as questões, responderam que a ordem ocupada pelos elementos não era importante, acertaram o total de possibilidades e o cálculo necessário para obter o resultado em metade das questões. Como já destacado anteriormente, o número de erros foi maior nas duas últimas colunas.

Quadro 55 – Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 2.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para formar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (**p!**).	Qual o número de possibilidades de cada escolha a seguir para o agrupamento?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha				
1ª	4	2		x	2!	4	3			6	$\frac{4*3}{2}$	$\frac{4!}{2!\,2!}$	
2ª	5			x	5!	5	2			10	$\frac{5*2}{10}$		
3ª	5			x	5!	5	4	3		30	$\frac{60}{2} = 30$		
4ª	6			x	6!	4	3	2	1	15	$\frac{720}{48} = 15$		
5ª	6			x	6!	3	2	1		20	$\frac{720}{36} = 20$		
6ª	3			x	8!	3	2	1		112	$\frac{336}{2} = 112$		

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O grupo 2 teve um baixo desempenho nessa atividade, pois além de cometerem uma quantidade expressiva de erros, ainda deixaram algumas colunas sem responder. Analisando as respostas das questões formuladas por esse grupo notamos que, um dos equívocos cometidos foi de terem respondido algumas questões de maneira semelhante como faziam no cálculo de Arranjo Simples, ou seja, como se a ordem ocupada pelos elementos nos agrupamentos fosse importante. Esse grupo não escreveu nenhuma conclusão ao finalizar a atividade.

Quadro 56 – Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 3.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para formar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (**p!**).	Qual o número de possibilidades de cada escolha a seguir para o agrupamento?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha				
1ª	4	2		x	P_2 ou 2	4	3			6	$\frac{4*3}{2}$	$\frac{4!}{2!\,2!}$	$\frac{4!}{2!\,(4-2)!}$
2ª	5	2		x	P_2 ou 2	5	4			10	$\frac{5*4}{2}$	$\frac{5!}{4!\,1!}$	$\frac{4!}{2!\,(5-4)!}$
3ª	5	3		x	P_3 ou 3	5	4	3		20	$\frac{5*4*3}{6}$	$\frac{5!}{3!\,2!}$	$\frac{5!}{3!\,(5-3)}$
4ª	6	4		x	P_4 ou 4	6	5	4	3	90	$\frac{6*\ 5*4*3}{24}$	$\frac{6!}{4!\,2!}$	$\frac{6!}{4!\,(6-4)!}$
5ª	6	3		x	P_3 ou 3	6	5	4		40	$\frac{6*\ 5*4}{6}$	$\frac{6!}{3!\,3!}$	$\frac{6!}{3!\,(6-3)!}$
6ª	8	3		x	P_3 ou 3	8	7	6		56	$\frac{8*\ 7*6}{6}$	$\frac{8!}{3!\,5!}$	$\frac{8!}{3!\,(8-3)!}$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Analisando a tabela preenchida pelo terceiro grupo nessa atividade, podemos afirmar que tiverem um ótimo desempenho, a quantidade de erros cometidos no preenchimento da mesma foi mínima. No entanto, esse grupo não escreveu uma boa conclusão, como veremos adiante.

Quadro 57 – Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 4.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para formar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (**p!**).	Qual o número de possibilidades de cada escolha a seguir para o agrupamento?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha				
1ª	4	2		x	2!	4	2			6	$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$	$\frac{4!}{2!\,(4-2)!}$
2ª	5	2		x	2!	5	4			10	“	$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$	$\frac{5!}{4!\,(5-4)!}$
3ª	5	3		x	3!	5	4	3		10	“	$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$	$5!/3!\,(5-3)!$
4ª	6	4		x	4!	6	5	4	3	15	“	$C_4^6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$	$6!/4!\,(6-2)!$
5ª	6	3		x	3!	6	5	4		20	“	$C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20$	$6!/3!\,(6-3)!$
6ª	8	3		x	3!	8	7	6		56	“	$C_3^8 = \frac{8!}{3!5!} = 56$	$8!/8!\,(8-3)!$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo fez uso da fórmula resolutiva para resolver as questões demonstrando já ter certo conhecimento prévio sobre o assunto e, como podemos observar, o desempenho dos mesmos foi excelente, praticamente não cometeram erros ao preencherem a tabela, preenchendo corretamente quase a totalidade das linhas e colunas, cometendo apenas dois pequenos erros na segunda e na quarta questão, respectivamente.

Quadro 58 – Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 5.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para formar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (**p!**).	Qual o número de possibilidades de cada escolha a seguir para o agrupamento?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha				
1ª	4	2		x	2!	4	3			6	$4 * 3 = 2$	$\frac{4!}{2!\,2!}$	$\frac{4!}{2!\,(4-2)!}$
2ª	5	2		x	5!	4	3			5			$\frac{5!}{2!\,(5-2)!}$
3ª	5	3		x	5!	4	3			10	$5 * 4 = 2$	$\frac{5!}{2!\,3!}$	$\frac{5!}{5!\,(5-3)!}$
4ª	6	4		x	6!	5	4	3		12	$6 * 4 = 2$	$\frac{6!}{2!\,4!}$	$\frac{6!}{4!\,(6-4)!}$
5ª	3	6		x	3!	2				9	$3 * 6 = 2$	$\frac{3!}{3!\,6!}$	$\frac{3!}{6!\,(6-3)!}$
6ª	8	3		x	8!	7	6	5	4	20	$8 * 5 = 2$	$\frac{8!}{5!\,3!}$	$\frac{8!}{3!\,(8-3)!}$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Esse grupo teve um desempenho regular nessa atividade, pois, apesar dos acertos, cometeram uma quantidade expressiva de erros. Entre os erros cometidos destacamos: número de possibilidades de escolha em cada agrupamento, erraram o total geral de possibilidades e o cálculo necessário para obter o resultado, entre outros. Esse grupo também não escreveu nenhuma conclusão ao finalizar a atividade.

Quadro 59 – Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 6.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para formar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (**p!**).	Qual o número de possibilidades de cada escolha a seguir para o agrupamento?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha				
1ª	4			x	2!	4	3			6	$4 * 3 \div 2 = 6$	$\frac{4!}{2!\,2!}$	$\frac{4!}{2!\,(4-2)!}$
2ª	5			x	2!	5	4	3		5	$\frac{5*4}{2}$	$\frac{5!}{2!}$	$\frac{5!}{2!\,(5-2)!}$
3ª	5			x	3!	5	4	3		10	$\frac{5*4}{2}$	$\frac{5!}{2!}$	$\frac{5!}{2!\,(5-3)!}$
4ª	6			x	4!	6	5	4		30	$\frac{6*5*4}{4} = 30$	$\frac{6!}{4!}$	$\frac{6!}{4!\,(6-4)!}$
5ª	6			x	3!	6	5	4		40	$\frac{6*5*4}{3}=\frac{120}{3}=40$	$\frac{6!}{3!}$	$\frac{6!}{3!\,(6-3)!}$
6ª	8			x	3!	8	7	6		56	$\frac{8*7*6}{6}$	$\frac{8!}{3!\,5!}$	$\frac{8!}{3!\,(8-3)!}$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Assim como o grupo anterior, consideramos que esse grupo teve um desempenho regular nessa atividade, de maneira semelhante ao precedente, cometeram uma quantidade significativa de erros e ainda deixaram uma coluna sem preencher, embora também tenham preenchido corretamente algumas colunas da tabela.

Quadro 60 – Transcrição do quadro da sexta atividade preenchido pelo Grupo 7.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para formar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (**p!**).	Qual o número de possibilidades de cada escolha a seguir para o agrupamento?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha				
1ª	4	3		x	$\frac{4*3}{2} = 6$	4	3			6	4 * 3 ÷ 2	$\frac{4!}{2!\,2!}$	$\frac{4!}{2!}\,\frac{}{(4-2)!}$
2ª	5	2		x	$\frac{5*2}{2} = 5$	5	2			5	5 * 2 ÷ 2	$\frac{5!}{}$	$\frac{5!}{2!}\,\frac{}{(5-2)!}$
3ª	5	4		x	$\frac{5*4*3}{3*2*1} = 60 \div = 10$	5	4	3		10	5*4*3 ÷ 3*2*1		$\frac{5!}{4!}\,\frac{}{(5-4)!}$
4ª	6	4		x	6*4*1=24 ÷ 6=4	6	4	1		4	6*4*1=24 ÷ 6=4		$\frac{6!}{4!}\,\frac{}{(6-4)!}$
5ª	6	4		x	$\frac{6*5*4*3}{3!\,3*2} = \frac{360}{6}$	6	5	4	3	20	$\frac{6*5*4*3 \div 3!}{3*2}$		$\frac{6!}{5!\,(6-5)!}$
6ª	8	5		x	P_3 ou 3!	8	7	6		56	$\frac{8*7*6}{6}$	$\frac{8!}{3!\,5!}$	$\frac{8!}{3!\,(8-5)!}$

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O grupo sete teve um baixo desempenho nessa atividade, podemos observar que os mesmos cometeram diversos erros no preenchimento da tabela. Analisando os acertos, vemos que a quantidade de erros cometidos foi notadamente maior. Esse grupo e o segundo, em nosso entendimento, foram os que tiveram o pior desempenho nessa atividade, podemos constatar esse fato a partir da análise das tabelas preenchidas pelos mesmos.

4.6.1 Análise das Conclusões Sobre a Atividade 6

(Continua)

Alunos	Conclusão Apresentada	Validade da Conclusão
A_{10} A_{12} A_{14}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 1: Conclusão que faz os calculos e dividimos e fatoramos e chegamos ao resultado.	
	Análise da conclusão: Esse grupo escreveu uma conclusão muito vaga, apenas citaram que os cálculos são feitos dividindo e fatorando sem especificar de maneira mais clara e detalhada, assim classificamos como uma conclusão inválida.	
A_{13} A_{19} A_{21} A_{22}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 3: São questões simples.	
	Análise da conclusão: Como citado anteriormente, apesar de terem tido um bom desempenho ao preencherem a tabela, esse grupo não escreveu uma boa conclusão para essa atividade, apenas afirmaram que as questões são simples.	
A_{01} A_{07}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 4: Combinação simples é uma forma de contagem.	
	Análise da conclusão: Esse grupo fez uso da fórmula resolutiva para resolver as questões, demonstrando já ter algum conhecimento prévio sobre o assunto. Na observação que escreveram antes da conclusão, afirmaram que: “Parecido com o arranjo simple, mas nesse temos a subtração, não somente da multiplicação e divisão.” Nesse sentido, apesar da conclusão perceptivelmente estar vaga, consideramos como parcialmente válida, pois além de demonstrarem ter certo conhecimento sobre o assunto, na observação, citaram elementos essenciais no cálculo da combinação simples.	
A_{20} A_{30}		Parcialmente Válida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 6:	

	A ordem não importa. Multiplicação e fatorial estão presentes, a ordem não importa. Nesse tipo de cálculo é exigida muita atenção, pois é um cálculo mais difícil.	
	Análise da conclusão: Em nosso entendimento a conclusão escrita por esse grupo é parcialmente válida, pois os discentes citaram três elementos essenciais quando realizamos cálculos envolvendo combinação simples: a multiplicação, o fatorial e que a ordem dos elementos não importa.	
A_{04}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 7: Com a pratica fica um pouco facil para chegar no resultado.	
	Análise da conclusão: Esse grupo escreve uma conclusão inválida para essa atividade, apenas citaram que com a prática fica um pouco fácil para chegar no resultado.	

Com relação as atividades anteriores, não houve redução no tempo médio gasto pelos grupos para concluir essa atividade, o tempo gasto foi de aproximadamente 72,4 minutos. O momento da institucionalização ocorreu no final da aula, a partir das conclusões apresentadas pelos próprios discentes.

Como já destacamos anteriormente, mesmo não ocorrendo nenhuma intercorrência grave, essa aula foi bastante conturbada, também notamos que alguns grupos não demonstram comprometimento na execução da atividade. Dois grupos não escreveram nenhuma observação ao finalizar o preenchimento da tabela e nenhum grupo conseguiu formular uma conclusão válida e desejada.

Acreditamos que o fato de as férias escolares estarem aproximando, e a escola estar no período das provas bimestrais, o desenvolvimento da atividade nesse período, tenha causado bastante apreensão nos discentes, esse fato pode estar relacionado ao de grande parte dos grupos não ter escrito uma boa conclusão. As tensões e preocupações gerados no ambiente escolar ao aproximar esse período e seus reflexos no desempenho dos discentes, podem ser melhor investigadas em trabalhos posteriores.

4.7 ENCONTRO DO DIA 20/06/2024

Nesse encontro também foram aplicadas duas atividades na turma, na primeira delas tivemos o objetivo de proporcionar condições para que os alunos, a partir do preenchimento de uma tabela sistematizada, pudessem compreender a ideia de permutação circular, assim facilitando sua conceituação formal. Na segunda atividade o objetivo foi fornecer ferramentas para que os discentes pudessem determinar, indiretamente, o número de Permutações Circulares de um conjunto de elementos e generalizassem esse cálculo por meio da fórmula resolutiva.

Após orientarmos os discentes formarem grupos de no máximo 4 componentes, distribuímos as listas com as atividades e as tabelas, não tivemos nenhuma intercorrência significativa durante a formação dos grupos e nem durante a aula, excetuando o fato de muitos alunos terem faltado esse dia. Nesse encontro teríamos 3 aulas para aplicar as atividades. Para o desenvolvimento da primeira atividade formam destinados 45 minutos, para a segunda, 90 minutos.

Exceto alguns alunos, no geral, os grupos não apresentaram dificuldades acentuadas para realizar essas atividades, inclusive gastando uma quantidade de tempo menor para concluir as mesmas. No entanto alguns grupos tiveram dificuldade em compreender que em uma roda, caso as pessoas apenas girem de mãos dadas no sentido horário ou anti-horário, não é formado um novo agrupamento. Nesses casos fizemos intervenções para esclarecer melhor as ideias envolvidas.

Ressaltamos que com as intervenções e orientações feitas diretamente em alguns grupos, conseguiram compreender que duas ou mais permutações circulares são consideradas idênticas, quando percorrendo a circunferência no sentido horário ou anti-horário a partir de um elemento comum das duas permutações, encontramos sequências iguais formadas por esses elementos.

Na tabela abaixo apresentamos o modelo do quadro da atividade sobre conceituação de permutação circular que foi preenchido pelos grupos, em seguida apresentamos a transcrição das observações escritas por cada grupo ao finalizarem o preenchimento da tabela. Nessa atividade apenas o grupo formado pelos discentes A_{13} e A_{21} não escreveu observação ao finalizar o preenchimento da tabela da primeira atividade, e também não entregaram a tabela da segunda.

Quadro 61 – Quadro a ser preenchido na atividade sobre conceituação de permutação circular.

Analise cada situação abaixo:	Quando as pessoas se movimentam e trocam de lugar com a pessoa mais próxima a direita, ainda de mãos dadas, é formado um novo agrupamento?		Quando as pessoas se movimentam e trocam de lugar com a pessoa mais próxima a esquerda, ainda de mãos dadas, é formado um novo agrupamento?	
	Sim	Não	Sim	Não
Três pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Quatro pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Cinco pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Seis pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
...				
"n" pessoas de mão dadas formam uma roda.				

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

4.7.1 Análise das Observações Sobre a Atividade 7

(Continua)

Alunos	**Observação Apresentada**	**Validade da Observação**
A_{06} A_{10} A_{12} A_{14}		Observação Inválida
	Transcrição da Observação do Grupo 1: Notamos que o agrupamento não muda o sentido que fazemos nos grupos.	
	Análise da observação: Em nosso entendimento esse grupo escreveu uma observação inválida para essa atividade, os mesmos não expressaram de maneira clara suas ideias, consequentemente não escrevendo uma boa observação.	

A_{04} A_{20}	**Transcrição da Observação do Grupo 2:** Notamos que não importa o lado que foi trocado, pois não altera o resultado final.	Parcialmente Válida
	Análise da observação: Em nosso entendimento esse grupo escreveu uma observação parcialmente válida para essa atividade, apesar de não terem expressado de maneira clara suas ideias, fica evidente que compreenderam a principal noção envolvida ao formarmos agrupamentos a partir de elementos dispostos no entorno de uma roda.	
A_{22} A_{30}		Observação Inválida
	Transcrição da Observação do Grupo 3: Os grupamento não muda de posição por que e circular.	
	Análise da observação: Assim como o primeiro grupo, esse também não escreveu uma observação satisfatória para essa atividade.	

Por se tratar de uma atividade relativamente simples, onde os discentes deveriam responder apenas “Sim” ou “Não” na tabela, posteriormente escrever suas observações, o tempo médio gasto pelos grupos para concluir essa atividade foi pequeno, cerca de 15,5 minutos.

Sobre as observações escritas, mesmo os grupos demonstrando que tinham compreendido as ideias envolvidas, 2 deles não conseguirem escrever uma boa observação. O momento da institucionalização ocorreu após os grupos preencheram a tabela, a partir das observações apresentadas pelos próprios discentes.

No decorrer dessa atividade não ocorreu nenhuma intercorrência grave, apenas um grupo não escreveu observação ao finalizar o preenchimento da tabela. Notamos que foram poucas as dificuldades apresentadas pelos discentes nessa atividade, apesar que ainda foram notadas algumas. Acreditamos que o fato de não terem escrito observações claras, está intrinsecamente relacionado ao fato de não terem hábito de desenvolver atividades conclusivas, ou seja, é fundamental que mais atividade nesse formato sejam aplicadas, não só nessa turma, mas em outras na educação básica como um todo.

4.7.2 Segunda Atividade do dia 20/06/2024 (Atividade 8)

Nesse encontro também aplicamos uma atividade tendo o objetivo de propiciar condições para que os alunos deduzissem a fórmula resolutiva para determinar o número de Permutações Circulares de um grupo de elementos. Na próxima tabela apresentamos o modelo do quadro preenchido pelos alunos, mais adiante apresentaremos a transcrição do seu preenchimento pelos grupos.

Quadro 62 – Quadro a ser preenchido na atividade sobre cálculo de permutação circular.

Analise cada situação abaixo:	Qual o número total de permutações dessas pessoas?	Quantas dessas permutações coincidem entre si, no caso dessas pessoas se movimentarem e trocarem de lugar com a pessoa mais próxima a direita ou a esquerda?	Quantas dessas permutações (quantos grupos) são diferentes entre si?	Cálculo necessário para encontrar as permutações diferentes usando fatorial.
Três pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Quatro pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Cinco pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Seis pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
...				
"n" pessoas de mão dadas formam uma roda.				

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Com o intuito de proporcionar mais informações e condições, em buscar de alcançar o objetivo pretendido para essa atividade, também fornecemos um quadro de apoio para os estudantes. Como vimos anteriormente, duas ou mais permutações circulares são consideradas iguais se, encontramos sequências de letras iguais, ao

percorrermos a circunferência no sentido horário ou anti-horário, a partir de uma mesma letra.

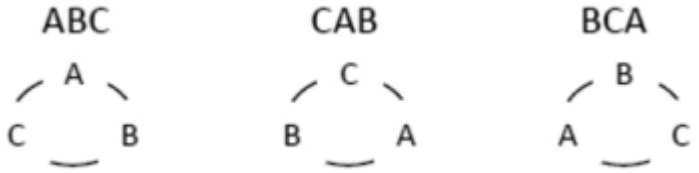
Quadro 63 – Permutações dos elementos.

3 pessoas	4 pessoas		5 pessoas				
ABC [1]	ABCD	CABD	ABCDE	BACDE	CABDE	DABCE	EABCD
ACB	ABDC	CADB	ABCED	BACED	CABED	DABEC	EABDC
BAC	ACBD	CBAD	ABECD	BADCE	CADBE	DACBE	EACBD
BCA [1]	ACDB	CBDA	ABEDC	BADEC	CADEB	DACEB	EACDB
CAB [1]	ADBC	CDAB	ABDEC	BAECD	CAEAB	DABCE	EADBC
CBA	ADCB	CDBA	ABDCE	BAEDC	CAEBA	DABEC	EADCB
	BACD	DACB	ACBDE	BCAED	CBADE	DBACE	EBCDE
	BADC	DABC	ACBED	BCADE	CBAED	DBAEC	EBCED
	BDAC	DBCA	ACDEB	BCDAE	CBDAE	DBCEA	EBDCE
	BDCA	DBAC	ACDBE	BCDEA	CBDEA	DBCAE	EBDEC
	BCAD	DCAB	ACEBD	BCEAD	CBEAD	DBEAC	EBACD
	BCDA	DCBA	ACEDB	BCEDA	CBEDA	DBECA	EBADC
			ADCBD	BDACE	CDABE	DCABE	ECABD
			ADCDB	BDAEC	CDAEB	DCAEB	ECADB
			ADBCE	BDCAE	CDBAE	DCBAE	ECBAD
			ADBEC	BDCEA	CDBEA	DCBEA	ECBDA
			ADEBC	BDEAC	CDEAB	DCEAB	ECDAB
			ADECB	BDECA	CDEBA	DCEBA	ECDBA
			AEBCD	BEACE	CEABD	DEABC	EDABC
			AEBDC	BEAEC	CEADB	DEACB	EDACB
			AECBD	BECAD	CEBAD	DEBAC	EDBAC
			AECBD	BECDA	CEBDA	DEBCA	EDBCA
			AEDBC	BEDAC	CEDAB	DECAB	EDCAB
			AEDCB	BEDCA	CEDBA	DECBA	EDCBA

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Podemos imaginar cada movimento circular como um movimento horizontal para a esquerda ou para a direita, onde cada letra representa uma pessoa. A ilustração a seguir exemplifica uma relação entre um movimento horizontal e um giro com três elementos, onde cada movimento horizontal representa também um giro de aproximadamente 120°.

Figura 9: Relação entre movimento horizontal e um giro



Fonte: Vasconcelos e Rocha (2019)

Nesse sentido podemos considerar que, na primeira coluna da tabela anterior, as sequências $\overleftrightarrow{ABC}$, $\overleftrightarrow{CAB}$ e $\overleftrightarrow{BCA}$, são iguais, pois movimentando horizontalmente encontramos a mesma sequência de letras, e assim sucessivamente. No quadro abaixo temos a transcrição do preenchimento do quadro da atividade pelo primeiro grupo.

Quadro 64 – Transcrição do quadro da oitava atividade preenchido pelo Grupo 1.

Analise cada situação abaixo:	Qual o número total de permutações dessas pessoas?	Quantas dessas permutações coincidem entre si, no caso dessas pessoas se movimentarem e trocarem de lugar com a pessoa mais próxima a direita ou a esquerda?	Quantas dessas permutações (quantos grupos) são diferentes entre si?	Cálculo necessário para encontrar as permutações diferentes usando fatorial.
Três pessoas de mãos dadas formam uma roda.	6	3	$\frac{3!}{3} = 2$	(3 – 1)!
Quatro pessoas de mãos dadas formam uma roda.	24	4	$\frac{4!}{4} = 6$	(4 – 1)!
Cinco pessoas de mãos dadas formam uma roda.	120	5	$\frac{5!}{5} = 24$	(5 – 1)!
Seis pessoas de mãos dadas formam uma roda.	720	6	$\frac{6!}{6} = 120$	(6 – 1)!
...				
"n" pessoas de mão dadas formam uma roda.	P_n	n	(p n /	(n – 1)!

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Observando a tabela preenchida pelo primeiro grupo, notamos que cometeram apenas um erro na última linha, dessa forma podemos afirmar que tiveram um ótimo desempenho em seu preenchimento e que seus componentes conseguiram compreender e interpretar bem o quadro de apoio fornecido, retirando as informações complementares necessárias.

Quadro 65 – Transcrição do quadro da oitava atividade preenchido pelo Grupo 2.

Analise cada situação abaixo:	Qual o número total de permutações dessas pessoas?	Quantas dessas permutações coincidem entre si, no caso dessas pessoas se movimentarem e trocarem de lugar com a pessoa mais próxima a direita ou a esquerda?	Quantas dessas permutações (quantos grupos) são diferentes entre si?	Cálculo necessário para encontrar as permutações diferentes usando fatorial.
Três pessoas de mãos dadas formam uma roda.	6	3	$\frac{3!}{3}$ = 2	(3 – 1)!
Quatro pessoas de mãos dadas formam uma roda.	24	4	$\frac{4!}{4}$ = 6	(4 – 1)!
Cinco pessoas de mãos dadas formam uma roda.	720	5	$\frac{5!}{5}$ = 24	(5 – 1)!
Seis pessoas de mãos dadas formam uma roda.	720	6	$\frac{6!}{6}$ - 120	(6 – 1)!
...				
“n” pessoas de mão dadas formam uma roda.	P_n	n	(p n /	(n – 1)!

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O quadro preenchido pelo segundo grupo, ficou muito semelhante com o do primeiro, inclusive com relação aos erros cometidos, assim consideramos que esse grupo também teve um bom desempenho na atividade e no preenchimento da tabela.

Quadro 66 – Transcrição do quadro da oitava atividade preenchido pelo Grupo 3.

Analise cada situação abaixo:	Qual o número total de permutações dessas pessoas?	Quantas dessas permutações coincidem entre si, no caso dessas pessoas se movimentarem e trocarem de lugar com a pessoa mais próxima a direita ou a esquerda?	Quantas dessas permutações (quantos grupos) são diferentes entre si?	Cálculo necessário para encontrar as permutações diferentes usando fatorial.
Três pessoas de mãos dadas formam uma roda.	6	3	$\frac{3!}{3} = 2$	(3 – 1)!
Quatro pessoas de mãos dadas formam uma roda.	24	4	$\frac{4!}{4} = 6$	(4 – 1)!
Cinco pessoas de mãos dadas formam uma roda.	120	5	$\frac{5!}{5} = 24$	(5 – 1)!
Seis pessoas de mãos dadas formam uma roda.	720	6	$\frac{6!}{6} = 120$	(6 – 1)!
...				
“n” pessoas de mão dadas formam uma roda.	P_n	n	(p n)	(n) !

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

O último grupo também teve um bom desempenho nessa atividade e no preenchimento da tabela, contudo cometeram dois erros na última linha, onde deveriam generalizar o padrão percebido nas linhas anteriores para um número qualquer de pessoas “n”, isso reforça nosso entendimento sobre a dificuldade que os alunos tem em representar algebricamente padrões observados. A seguir temos a análise das conclusões dos grupos.

Alunos	Conclusão Apresentada	Validade da Conclusão
A_{06} A_{10} A_{12} A_{14}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 1: Em permutações circulares, o número total de permutações diferentes dados por, formando um único unico grupo de permutações distintas	
	Análise da conclusão: O primeiro grupo elaborou uma conclusão inválida para a atividade, pois os mesmos não conseguiram expressar de maneira clara suas ideias, escrevendo uma conclusão bastante confusa. No entanto, na observação escreveram: "todas as permutações circulares para o conjunto de pessoas formam disposições equivalente entre si". Analisando essa observação podemos afirmar que ela tem muito a ver com as ideias envolvidas no cálculo das permutações circulares de um grupo de elementos.	
A_{04} A_{20}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 2: Concluímos que cada pergunta foi usado o, "fatorial" para ser respondida.	
	Análise da conclusão: Esse grupo, assim como o grupo anterior, também não elaborou uma conclusão válida para essa atividade, mesmo tendo um bom desempenho no preenchimento da tabela, escreveram uma conclusão muito vaga.	
A_{22} A_{30}		Conclusão Inválida
	Transcrição da Conclusão do Grupo 3: $\frac{4 \times 3 \times 2}{4}$	
	Análise da conclusão: Esse grupo também não elaborou uma conclusão válida para essa atividade.	

A média de tempo gasto pelos grupos para concluir essa atividade foi de aproximadamente 49,4 minutos. O momento da institucionalização ocorreu no final da aula, a partir das conclusões apresentadas pelos próprios discentes. Podemos observar que mesmo os grupos tendo tido um bom desempenho no preenchimento da tabela, nenhum deles escreveu uma conclusão válida.

4.8 ENCONTRO DO DIA 25/06/2024

Nesse dia finalizamos a implementação da sequência na turma com a aplicação do Pós-teste. Os alunos tiveram 1 hora para resolver as mesmas questões que haviam sido aplicadas durante o Pré-teste. Nenhuma intercorrência significativa ocorreu esse dia, exceto o fato de estarmos muito próximos do período das férias escolares e alguns alunos estarem bastante eufóricos e agitados.

Percebemos que os discentes usaram diferentes estratégias para resolver as questões, de maneira geral notamos que as dificuldades diminuíram acentuadamente, o que nos leva a supor que a implementação da sequência trouxe bons resultados. Posteriormente analisaremos com mais detalhes esses pontos, inclusive por meio de alguns testes estatísticos comparativos entre os resultados do Pré-teste e do Pós-teste.

4.9 CONSIDERÇÕES ACERCA DA EXPERIMENTAÇÃO

Alguns ajustes tiveram que ser realizados no decorrer da aplicação da sequência, inclusive tivemos que suprimir a aplicação de uma atividade que estava inicialmente prevista, devido a questão do tempo. A implementação da sequência ocorreu em 17 momentos distintos, nas seções anteriores relatamos apenas os momentos de aplicação das atividades em sala, não abordamos sobre os encontros onde destinamos para os discentes resolverem as questões de aprofundamento, também devido alguns desses momentos terem ocorrido extraclasse.

Inicialmente destacamos que não percebemos diminuição significativa no tempo de resolução das atividades. Também não notamos que os discentes conseguiram formular conclusões melhores elaboradas no decorrer do tempo. Observamos que os discentes ficaram mais eufóricos com a proximidade das férias escolares, esse fato pode ter relação direta com o desempenho dos alunos. Contudo, de maneira geral, notamos que com o passar do tempo as dificuldades dos alunos para resolver as questões diminuíram expressivamente, inclusive fazendo uso de estratégias variadas.

No decorrer do tempo os alunos mostraram-se mais motivados e apresentaram menos dificuldade para resolver as questões, resultados semelhantes já haviam sido observados por Rosas (2017) e Conceição (2019). Por fim, consideramos que mesmo diante de um ambiente desafiador, das condições locais e das dificuldades dos alunos, com algumas exceções, os discentes demonstraram interesse e participaram efetivamente das atividades e da resolução das questões problemas.

Na próxima seção analisaremos com mais detalhes os resultados encontrados, buscaremos responder a problemática principal que levou a realização desse projeto de pesquisa.

5. ANÁLISE A POSTERIORE E VALIDAÇÃO

Nessa seção teremos como objetivo sistematizar, organizar, sintetizar, analisar e validar os dados coletados durantes a etapa da experimentação, para isso usaremos diferentes recursos, instrumentos, métodos e técnicas de análise, partindo de uma abordagem qualitativa e também quantitativa de alguns aspectos e informações levantadas. Essa abordagem mista, pode favorecer a compreensão, o entendimento e a interpretação das informações coletadas.

Na organização e sistematização das informações usaremos gráficos, tabelas e quadros, para melhor visualização. E para fazer as inferências e interpretações lançaremos mão, entre outros, de métodos estatísticos validados como Testes de Hipóteses e Análise de Correlação.

5.1 FREQUÊNCIA DOS ALUNOS NO EXPERIMENTO

A seguir apresentamos o quadro com o percentual individual de participação de cada discente com relação ao número total de atividades, o percentual de participação dos discentes com relação a cada atividade e o quadro com a frequência dos discentes em cada aula.

Quadro 67 – Percentual de participação por aluno nas atividades.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
62,5%	50%	37,5%	100%	50%	62,5%	62,5%	37,5%	25%	100%	50%	100%	62,5%	100%	25%
A_{16}	A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}	A_{28}	A_{29}	A_{30}
50%	37,5%	37,5%	50%	100%	87,5%	62,5%	37,5%	62%	37,5%	50%	37,5%	25%	12,5%	100%

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Quadro 68 – Percentual de participação por atividade.

Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6	Atividade 7	Atividade 8
86,67%	63,32%	86,67%	23,32%	73,32%	56,67%	33,32%	33,32%

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Quadro 69 – Frequência dos discentes por aula.

Aluno	Data 02/05/2024	Data 14/05/2024	Data 28/05/2024	Data 28/05/2024	Data 11/06/2024	Data 13/06/2024	Data 20/06/2024	Data 20/06/2024
	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6	Atividade 7	Atividade 8
A_1	P	P	P	F	P	P	F	F
A_2	P	P	P	F	P	F	F	F
A_3	P	F	P	F	P	F	F	F
A_4	P	P	P	P	P	P	P	P
A_5	P	P	P	F	P	F	F	F
A_6	P	P	F	P	F	F	P	P
A_7	P	P	P	F	P	P	F	F
A_8	F	P	P	F	P	F	F	F
A_9	P	P	F	F	F	F	F	F
A_{10}	P	P	P	P	P	P	P	P
A_{11}	P	F	P	F	P	P	F	F
A_{12}	P	P	P	P	P	P	P	P
A_{13}	P	F	F	F	P	P	P	P
A_{14}	P	P	P	P	P	P	P	P
A_{15}	F	F	P	F	P	F	F	F
A_{16}	P	F	P	F	P	P	F	F
A_{17}	P	P	P	F	F	F	F	F
A_{18}	P	F	P	F	P	F	F	F
A_{19}	P	F	P	F	P	P	F	F
A_{20}	P	P	P	P	P	P	P	P
A_{21}	P	P	P	F	P	P	P	P
A_{22}	P	F	P	F	F	P	P	P
A_{23}	P	F	P	F	P	F	F	F
A_{24}	P	P	P	F	P	P	F	F
A_{25}	F	P	P	F	F	P	F	F
A_{26}	P	P	P	F	P	F	F	F
A_{27}	P	P	F	F	F	P	F	F
A_{28}	P	F	P	F	F	F	F	F
A_{29}	F	F	P	F	F	F	F	F
A_{30}	P	P	P	P	P	P	P	P

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Analisando as tabelas anteriores percebemos que apenas 5 discentes participaram de todos os encontros (A_4, A_{10}, A_{14}, A_{20} e A_{30}), entre esses alunos os discentes A_{10} e A_{30} foram os que tiveram a melhor evolução com relação ao número de acertos das questões, quando comparamos os resultados do Pré-teste com os do Pós-teste, como veremos adiante. Uma quantidade expressiva dos alunos participou

de menos da metade dos encontros, entre os quais o A_{29} que participou apenas de um.

Quando observamos o percentual de participação por atividade, notamos que em três delas, menos da metade dos alunos participaram, sendo a atividade 4 a que teve menor percentual de participação dos discentes. As atividades 1 e 3, foram onde ocorreram maior participação dos discentes com um percentual de 86,67%, as questões 1 e 3 dos testes, que estão relacionadas com as atividades abordadas nesse encontro, também foram as que os alunos mais acertaram.

5.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS TESTES POR QUESTÃO

Munidos dos resultados dos testes aplicados antes e depois da implementação sequência didática e dos dados coletados durante a experimentação, analisamos os desempenhos individuais de cada discente. Nesse ponto observamos e registramos, por questão, o percentual de acertos, de erros e da quantidade de questões deixadas em branco nos testes, cujos resultados estão apresentados nas tabelas e no gráfico a seguir.

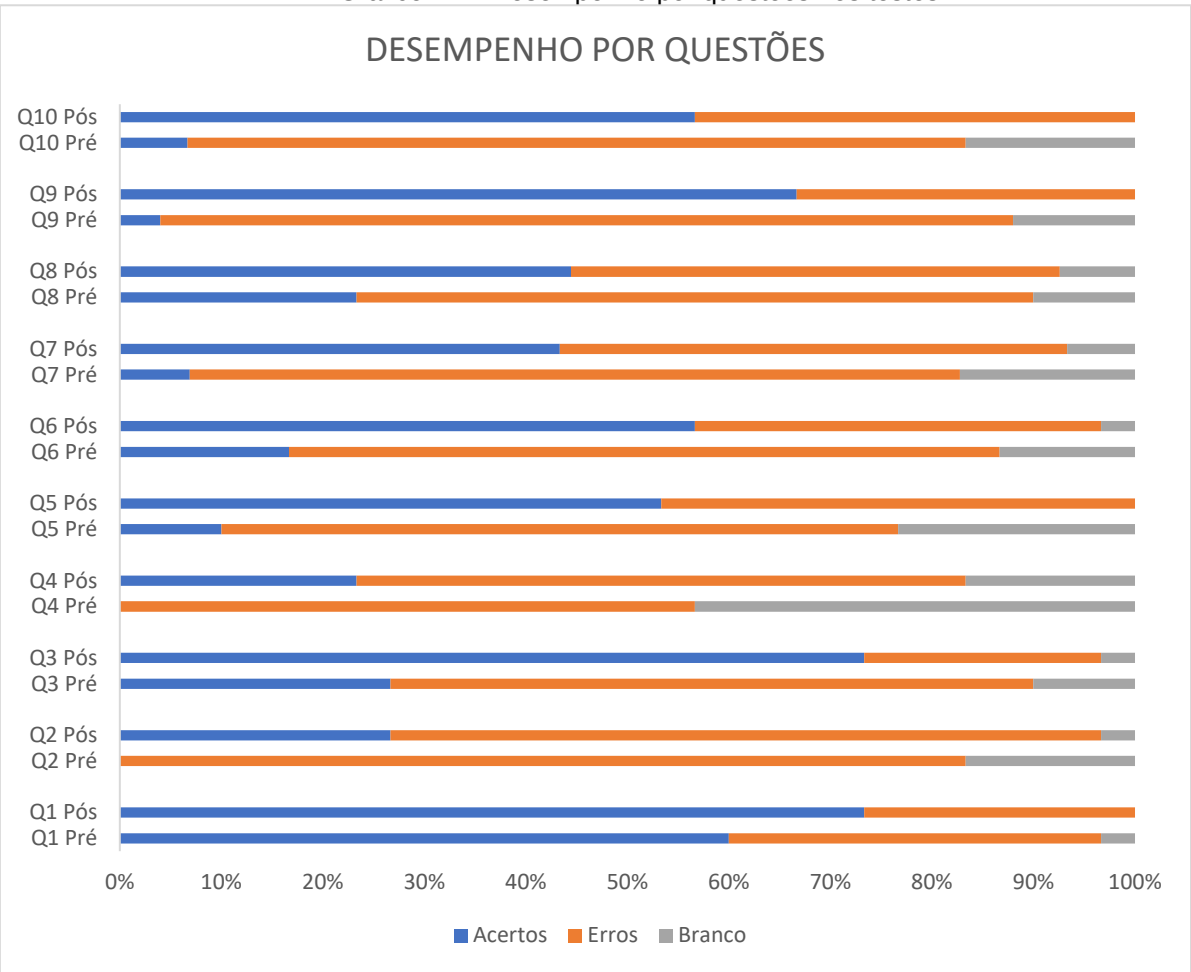
Quadro 70 – Desempenho por questões nos testes.

Questão	Tipo	Acertos		Erros		Branco	
		Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Q_1	PFC	60%	73,33%	36,66%	26,66%	3,33%	0%
Q_2	PFC	0%	26,66%	83,33%	70%	16,66%	3,33%
Q_3	Anagrama	26,66%	73,33%	63,33%	23,33%	10%	3,33%
Q_4	Ordenação de Anagramas	0%	23,33%	56,66%	60%	43,33%	16,66%
Q_5	Arranjo	10%	53,33%	66,66%	46,66%	23,33%	0%
Q_6	Arranjo	16,66%	56,66%	70%	40%	13,33%	3,33%
Q_7	Combinação	6,66%	43,33%	73,33%	50%	16,66%	6,66%
Q_8	Combinação	23,33%	40%	66,66%	43,33%	10%	6,66%
Q_9	Permutação Circular	3,33%	66,66%	70%	33,33%	10%	0%
Q_{10}	Permutação Circular	6,66%	56,66%	76,66%	43,33%	16,66%	0%

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

A partir das informações expressas no quadro anterior elaboramos o gráfico abaixo com o objetivo de proporcionar, de maneira mais clara e objetiva, a visualização dos percentuais destacados.

Gráfico 21 – Desempenho por questões nos testes.



Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Analisando as informações contidas no gráfico e no quadro anterior, podemos notar que o percentual de questões respondidas corretamente aumentou consideravelmente quando comparamos os resultados dos testes. Simultaneamente, observamos que ouve uma queda expressiva se compararmos o percentual de questões respondidas de maneira errada ou deixadas em branco.

O percentual médio de acertos no Pré-teste foi de 15,33%, enquanto no Pós-teste esse percentual foi de aproximadamente 51,33%. Por outro lado, o percentual médio de questões respondidas de maneira errada no Pré-teste foi cerca de 66,33%, no Pós-teste esse percentual caiu para aproximadamente 43,65%. Quando observamos o percentual médio de questões deixadas em branco, ou seja, questões que os alunos não responderam, os percentuais médios foram cerca de 16,33% no Pré-teste e de 4% no Pós-teste.

As questões 1, 9 e 10 foram as que houve maior aumento na porcentagem de acertos, ao compararmos os resultados dos testes, as atividades que envolviam essas questões eram sobre permutação e permutação circular. A única questão onde

notamos que aumentou o percentual médio de erros quando comparamos os resultados dos testes foi a questão 4, essa questão envolve ordenar anagramas em ordem alfabética. Por outro lado, essa também foi a questão onde o percentual de respostas deixadas em branco mais caiu, ou seja, os alunos, mesmo errando, arriscaram muito mais.

De maneira geral, analisando as informações da tabela e do gráfico anterior, quando observamos o percentual de acertos, de erros e da quantidade de questões deixadas em branco, avaliamos como muito positivo os resultados encontrados quando comparamos os desempenhos nos testes. Na próxima seção passaremos a discorrer sobre o desempenho individual por questões dos testes.

5.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS TESTES POR ALUNO

Como já destacamos anteriormente, nessa seção, em posse dos resultados individuais dos testes, analisaremos o desempenho de cada aluno. Assim, no próximo quadro, temos os percentuais de acertos, de erros e de questões deixadas em branco por cada discente.

Apesar do desempenho da grande maioria dos alunos ter melhorado significante com relação ao número de acertos das questões quando comparamos os resultados dos testes, o desempenho de alguns se manteve ou até mesmo foi inferior ao finalizarmos a aplicação da sequência. Em nossa interpretação a inquietude causada pela aproximação do período das férias escolares, o fato de algumas atividades terem sido aplicadas no mesmo período das provas bimestrais internas da escola, o número de faltas e até mesmo a apatia de alguns discentes no desenvolvimento das atividades pode ter influenciado esses resultados.

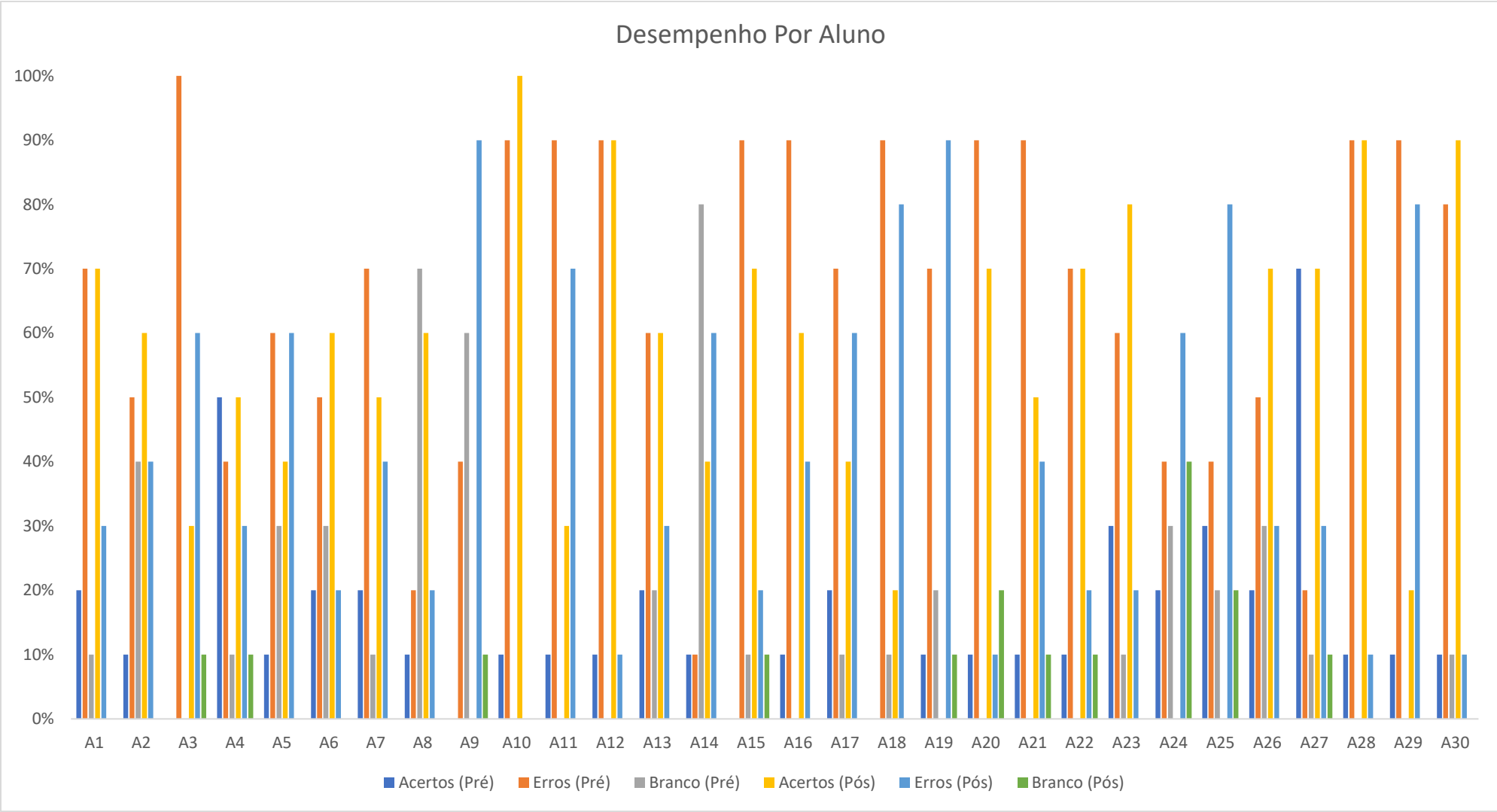
Quadro 71 – Desempenho nos testes por aluno.

Aluno	Acertou		Errou		Branco	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
A_1	20%	70%	70%	30%	10%	0%
A_2	10%	60%	50%	40%	40%	0%
A_3	0%	30%	100%	60%	0%	10%
A_4	50%	50%	40%	30%	10%	10%
A_5	10%	40%	60%	60%	30%	0%
A_6	20%	60%	50%	20%	30%	0%
A_7	20%	50%	70%	40%	10%	0%
A_8	10%	60%	20%	20%	70%	0%
A_9	0%	0%	40%	90%	60%	10%
A_{10}	10%	100%	90%	0%	0%	0%
A_{11}	10%	30%	90%	70%	0%	0%
A_{12}	10%	90%	90%	10%	0%	0%
A_{13}	20%	60%	60%	30%	20%	0%
A_{14}	10%	40%	10%	60%	80%	0%
A_{15}	0%	70%	90%	20%	10%	10%
A_{16}	10%	60%	90%	40%	0%	0%
A_{17}	20%	40%	70%	60%	10%	0%
A_{18}	0%	20%	90%	80%	10%	0%
A_{19}	10%	0%	70%	90%	20%	10%
A_{20}	10%	70%	90%	10%	0%	20%
A_{21}	10%	50%	90%	40%	0%	10%
A_{22}	10%	70%	70%	20%	0%	10%
A_{23}	30%	80%	60%	20%	10%	0%
A_{24}	20%	0%	40%	60%	30%	40%
A_{25}	30%	0%	40%	80%	20%	20%
A_{26}	20%	70%	50%	30%	30%	0%
A_{27}	70%	70%	20%	30%	10%	10%
A_{28}	10%	90%	90%	10%	0%	0%
A_{29}	10%	20%	90%	80%	0%	0%
A_{30}	10%	90%	80%	10%	10%	0%

Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Considerando as informações fornecidas no quadro anterior, objetivando proporcionar de maneira mais clara e objetiva a visualização dos percentuais, facilitando também sua análise, elaboramos o gráfico a seguir.

Gráfico 22 – Desempenho nos testes por aluno.



Fonte: Pesquisa de campo, 2024

Outro ponto que merece atenção e que pode ter influenciado para que o desempenho dos testes de alguns alunos, não tenham apresentado evolução significativa com relação as questões respondidas de maneira correta, foi que os discentes se arriscaram mais, ou seja, o número de questões deixadas em branco caiu bastante quando comparamos o resultado do Pré-teste com os do Pós-teste, assim esse fato não significa necessariamente um retrocesso. Contudo destacamos que essas e outras questões podem ser melhor investigadas em futuras pesquisas.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como objetivo principal analisar os efeitos da aplicação de uma Sequência Didática, fundamentada na resolução de problemas e no uso de atividades experimentais, sobre a compreensão e o desempenho de estudantes do ensino médio no estudo da Análise Combinatória. A escolha pelo tema foi motivada por dificuldades recorrentes observadas ao longo de nossa prática docente, além dos resultados preocupantes de avaliações em larga escala, que apontam deficiências significativas na aprendizagem matemática na educação básica, especialmente no que tange aos conceitos combinatórios.

A pesquisa foi conduzida com base na metodologia da Engenharia Didática, o que nos possibilitou estruturar o estudo em diferentes etapas: análises prévias, concepção e análise a priori da sequência didática, experimentação e, por fim, a análise a posteriori e validação. Essa abordagem nos permitiu refletir criticamente sobre o ensino de Análise Combinatória e conduzir intervenções planejadas, contextualizadas e teoricamente fundamentadas.

Os resultados obtidos indicam avanços relevantes no desempenho dos alunos, tanto em relação à resolução de problemas quanto à compreensão conceitual dos tópicos abordados. A observação do engajamento dos discentes durante a realização das atividades experimentais revelou maior interesse e envolvimento com o conteúdo, o que reforça a importância de propostas pedagógicas que dialoguem com diferentes formas de aprender, valorizando a experimentação, a descoberta e a contextualização.

Outro aspecto positivo a ser destacado foi a produção de um material educativo na forma de Sequência Didática, que poderá servir como subsídio para outros professores interessados em adotar práticas inovadoras no ensino da Matemática. A sistematização das atividades, aliada à fundamentação teórica e metodológica, confere a esse material características de um produto educacional relevante e potencialmente replicável em outros contextos escolares. Esse produto incorpora, além das atividades desenvolvidas, informações obtidas durante a investigação, estando também aberto a críticas e sugestões que venham melhorar o trabalho. Assim, pretendemos contribuir trazendo melhorias e, sobretudo, cumprindo com uma das funções sociais desse programa.

Além dos resultados obtidos, este estudo também abre caminhos para investigações futuras que podem aprofundar e ampliar os achados aqui apresentados. Entre os possíveis desdobramentos, destaca-se a aplicação da

Engenharia Didática no ensino de outros conteúdos matemáticos, como Probabilidade, Geometria e Álgebra, com ênfase na resolução de problemas e atividades experimentais. Também se recomenda a realização de estudos comparativos entre metodologias tradicionais e experimentais no ensino da Análise Combinatória, bem como pesquisas voltadas à formação inicial e continuada de professores para o uso pedagógico de atividades experimentais.

Outros temas relevantes a serem investigados incluem o uso de tecnologias digitais no ensino de conteúdos combinatórios, a investigação de misconceptions frequentes entre estudantes e estratégias para superá-los, além da análise dos impactos afetivos dessas práticas no engajamento e autonomia dos alunos. Também pode-se investigar sobre a associação entre fatores socioeducacionais e o desempenho dos discentes. Por fim, sugerem-se pesquisas voltadas à integração entre Análise Combinatória e Probabilidade, bem como estudos longitudinais que verifiquem os efeitos duradouros de propostas inovadoras no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Por fim, este estudo reforça a necessidade de se investir em metodologias que promovam o protagonismo dos alunos, que favoreçam o raciocínio lógico e que aproximem os conteúdos matemáticos da realidade dos estudantes. O uso de atividades experimentais, aliado à resolução de problemas, mostrou-se eficaz e promissor para o ensino da Análise Combinatória, contribuindo para a construção de saberes mais sólidos, significativos e duradouros.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012.

ARTIGUE, Michèle. Curso EAD – Profa. Dra. Michèle Artigue – Aula 1 – Design em Didática. YouTube, 14 de mar. de 2018. Disponível em: <https://youtu.be/Mu2zw0uKJkc?si=JgdtuYIFuZlIOuz6>. Acesso em: 06 de mar. De 2023.

BASTOS, Antonio Carlos; LOPES, Jurema Rosa; VICTER, Eline das Flores. Reflexões acerca do ensino da análise combinatória no ensino médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 11, n. 3, p. 330–344, 2020. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/2491.> Acesso em: 17 fev. 2024.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Días; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio En Alumnos de Secundaria. Educación matemática, México, V.8, p. 26-39, agosto, 1996.

BIGGS, Norman Linstead. The roots of combinatorics. **Revista História da Matemática**, v. 6, 1979, p. 109-136.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Afiliada, 1974.

BRASIL. MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA DO SAEB: Temas e Seus Descritores 3ª Série do Ensino Médio. INEP. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/menu_do_professor/o_que_cai_nas_provas/Matriz_de_Referencia_de_Matematica.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2024.

_____. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

_____. Ministério da Educação e dos Desportos. Secretaria do Ensino Fundamental Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 3º e 4º ciclos (5º a 8º séries) – Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 3º e 4º ciclos (5º a 8º séries) – 3. ed. – Brasília: MEC/SEF, 2001.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas**: estrutura e elaboração. 1. ed. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Atividades**. Belém, 2019. 357f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará.

CORTELLA, Mario Sérgio. **Qual é a Tua Obra?** inquietações propositivas sobre gestão, liderança e ética. 25. ed. Petrópolis: Vozes, 2017.

CURY, Augusto. **Ansiedade:** como enfrentar o mal do século / A síndrome do pensamento Acelerado: como e por que a humanidade adoeceu coletivamente, das crianças aos adultos. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FOSSA, Jhon Andrew. Algumas considerações teóricas sobre o ensino de matemática por atividades. **REMATEC**, [S. l.], v. 15, n. 35, p. 10–26, 2020. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/92>. Acesso em: 18 fev. 2024.

FREIRE, Paulo. **PEDAGOGIA DA AUTONOMIA**: Saberes necessários à prática educativa. 29. ed. São Paulo: Paz e Terra 1996.

GODOY, Elenilton Vieira; SANTOS, Vinicius de Macedo. O Cenário do Ensino de Matemática e o Debate Sobre o Currículo de Matemática. **Práxis Educacional**, Vitória da Conquista, v. 8, n. 13, p. 253-280, jul./dez. 2012.

HAZZAN, Samuel. **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR, 5**: combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

JACINTO, Diego Suzano Ferreira. **Utilizando o Material Concreto Para o Ensino de Análise Combinatória**. Seropédica, 2015. 78f. Dissertação (Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

LOPES, Thiago Beirigo; PALMA, Rute Cristina Domingos da; SÁ, Pedro Franco de. Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016). **EMP**, São Paulo, v. 20, n. 1, p. 159-181, 2018.

_____, Thiago Beirigo; SÁ, Pedro Franco de. Porque a Engenharia Didática em Sala de Aula? **Gnosis Carajás**, v. 1, n. 2, julho-dezembro 2021.

MELLO, Guiomar Namo de. Currículo da Educação Básica no Brasil: concepções e políticas. São Paulo: CEESP, 2014.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. reimpr. Tradução e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PORTAL QEDU. Disponível em: <https://qedu.org.br> . Acesso em 31 ago. 2024.

QUARTIERI, Marli Teresinha et al. Análise de Livros Didáticos de Matemática do 9º Ano do Ensino Fundamental Utilizando Temas Abordados na Prova Brasil. *In*: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 6., 2013, Canoas. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1012/171>. Acesso em: 12 de jun. de 2023.

ROSAS, Leonardo da Silva. **Ensino de Análise Combinatória por Atividades**. Belém, 2018. 315f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D`Angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.

SÁ, Pedro Franco de; MAFRA, José Ricardo Souza e; FOSSA, Jhon Andrew. O ensino de matemática por atividades experimentais na educação matemática. **Revista Cocar**, [S. l.], n. 14, p. 1-20, 2022. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5498>. Acesso em: 18 fev. 2024.

_____, Pedro Franco de. Palestra: Ensino por atividade. YouTube, 02 de maio de 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gVCXDlU7wZk>. Acesso em: 17 de dez. de 2022.

_____, Pedro Franco de. Possibilidades de Resolução de Problemas em Aulas de Matemática / Pedro Franco de Sá; organizado por Fernando Cardoso de Matos, Raimundo Otoni Melo Figueiredo e Reginaldo da Silva. Belém: SINEPEM, 2021. (Coleção II).

_____, Pedro Franco de. Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades / Pedro Franco de Sá; coordenado por Demetrius Gonçalves de Araújo, Glauco Lira Pereira, Raimundo Otoni Melo Figueiredo e Reginaldo da Silva. Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I).

_____, Pedro Franco de; SANTOS, Maria de Lourdes Silva; RIBEIRO, Andrea da Silva Marques. SAEB E PNLD: DISSONÂNCIAS E IMPLICAÇÕES DAS AVALIAÇÕES DE LARGA ESCALA NO CONTEXTO EDUCACIONAL BRASILEIRO. **Revista Prática Docente**, [S. l.], v. 5, n. 2, p. 673–699, 2020. Disponível em: <https://periodicos.cfs.ifmt.edu.br/periodicos/index.php/rpd/article/view/427>. Acesso em: 12 fev. 2023.

SILVA, Carlos Antonio Nascimento da; SILVA, Ana Kely Martins da; SILVA, Maria de Lourdes. Diagnóstico Sobre o Perfil Docente de Alguns Professores de Matemática no Estado do Pará e Questões Relacionadas ao Processo de Ensino e Aprendizagem. Belém: SCEM, 2022. Disponível em: <https://propesp.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/2023/08/ANAIS-SCEM-FINAL_compressed-1.pdf>. Acesso em: 04/03/2024

SILVA, Claúdio Lima da. **Ensino de Trigonometria no Triângulo por Atividades Experimentais**. Parauapebas, 2023. 318f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará.

SILVA, Monalisa Cardoso. **A combinatória: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental**. Pernambuco, 2016. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia) – Universidade Federal de Pernambuco.

_____, Monalisa Cardoso et al.. As contribuições da teoria de vergnaud para as pesquisas sobre o raciocínio combinatório em anais de eventos científicos. Anais VIII EPBEM. Campina Grande: Realize Editora, 2014. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/9690>. Acesso em: 11 de fev. de 2024.

TAVARES, Cláudia S.; BRITO, Frederico Reis Marques de. **Contando a História da Contagem**. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/57/7.htm> Acesso em: 20 de mar. de 2023.

TRANJAN, Patrick. Semana de Planejamento Pedagógico SEDUC/PA. YouTube, 06 de fevereiro de 2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/live/vHWsFpg34gs?si=_c-PiiQbnlOzjYpi>. Acesso em: 15 de fev. de 2023.

VASCONCELOS, Cleiton Batista; ROCHA, Manoel Americo. **Matemática**: Análise Combinatória e Probabilidade. 3. ed. Fortaleza: edUECE, 2019.

VAZQUEZ, Cristina Maria Roque. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio Por Meio de Atividades Orientadoras em Uma Escola Estadual do Interior Paulista**. São Carlos, 2011. 88 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos.

ANEXO I: TERMO DE AUTORIZAÇÃO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, _____

ocupante do cargo de direção geral da E.E.E Médio Irmã Dulce, autorizo a realização da pesquisa cientifica intitulada **Abordando a Análise Combinatória no Ensino Médio Por Meio de Atividades**, no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará - UEPA, sob a responsabilidade do pesquisador **Carlos Antonio Nascimento da Silva**, orientado pela pesquisadora Profa. Dra. **Ana Kely Martins da Silva** e coorientado pelo pesquisador Prof. Dr. **Pedro Franco de Sá.**

Afirmo que fui devidamente orientado sobre a finalidade e o objetivo da pesquisa, bem como sobre a utilização dos dados, exclusivamente para fins científicos, e sua divulgação posterior, sendo que meu nome, o dos professores e dos alunos envolvidos na presente pesquisa serão mantidos de acorda com os padrões profissionais de sigilo, com a utilização de nomes fictícios para a apresentação dos dados coletados.

Caso necessário, a qualquer momento, poderei revogar este termo de autorização, se comprovada atitudes que causem prejuízo à instituição ou que comprometam o sigilo dos dados dos participantes desta pesquisa.

Estou ainda devidamente informado que, em qualquer etapa do estudo, poderei ter acesso ao pesquisador responsável, Carlos Antonio Nascimento da Silva, que pode ser encontrado no endereço Rua José Piveta, número 594, bairro Bela Vista, na Cidade de Parauapebas, Estado do Pará. Tomo ciência de que poderei entrar em contato com a Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGEM) no Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n, Telégrafo. Belém-Pará - CEP: 66113-010. Fone: 4009-9542.

Assim, tendo sido informada dos objetivos de maneira clara e detalhada, autorizo a utilização e divulgação dos dados e imagens pelo fato de a pesquisa ter sido desenvolvida na E.E.E. Médio Irmã Dulce.

Parauapebas-Pará, ___ de Março de 2024.

_____
Diretor Escolar

ANEXO II: TCLE

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Seu/sua filho(a) está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada: **Abordando a Análise Combinatória no Ensino Médio Por Meio de Atividades**, sob a responsabilidade dos professores pesquisadores: **Carlos Antonio N. da Silva (Discente do Programa)**, **Ana Kely Martins da Silva (Docente)** e **Pedro Franco de Sá (Docente)**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.

Com esta pesquisa temos a pretensão de estimar o progresso, analisar o envolvimento, as percepções e investigar o surgimento de habilidades para os alunos solucionarem problemas de Análise Combinatória, a partir da aplicação de uma Sequência Didática fundamentada na Resolução de Problemas e no uso de Atividades. A sua colaboração na pesquisa será autorizar seu/sua filho(a) para participar das atividades referentes a pesquisa. Os dados produzidos serão registrados por filmagens, fotografias, gravações de áudio e cadernos de campo. O acesso e análise dos dados coletados será realizado apenas pelos responsáveis da pesquisa citados acima. Sua identidade e a de seu/sua filho(a) será preservada e em nenhum momento serão identificados. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim as identidades serão preservadas.

Você e o aluno não terão gastos ou ganho financeiro por participar da pesquisa. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo estatístico dos resultados obtidos sobre o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Você é livre para decidir se seu filho(a) colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com os professores pesquisadores por meio dos telefones: (94)4009-9542 ou (94)993052731.

Parauapebas-Pará, ___ de Março de 2024.

_____
Assinatura do Professor Pesquisador (Discente do Programa)

Eu, _____ autorizo meu/minha filho(a) _____ a participar da pesquisa citada acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

_____
Assinatura do responsável

ANEXO III: QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno(a), _____,

estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

QUESTIONÁRIO

1- **Número da Chamada**:_____

2- **Idade**: _____anos 3- **Gênero**: ( )Masculino ( )Feminino

4- **Você já ficou de DEPENDÊNCIA em Matemática**?

( )Não ( )Sim

5- **Você já ficou REPROVADO em Matemática**?

( )Não ( )Sim

6- **Você gosta de Matemática**? ( )Não gosto ( )Suporto ( )Gosto um pouco ( )Adoro

7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino**?

( )Superior ( )Médio ( )Fundamental ( )Fundamental incompleto ( )Não estudou

( )Não tenho responsável masculino

8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminino**?

( )Superior ( )Médio ( )Fundamental ( )Fundamental incompleto ( )Não estudou

( )Não tenho responsável feminino

9- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática**?

( )Professor particular ( )Pai/Mãe ( )Irmão/Irmã ( )Tio/Tia ( )Ninguém

( )Outros. Quem?_____

10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola**?

( )Todo dia ( )Somente nos finais de semana ( )No período de prova

( )Só na véspera da prova ( )Não estudo fora da escola

11- **Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática**?

( )Sempre ( )Quase sempre ( )Às vezes ( )Poucas vezes ( )Nunca

12- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ministrados**?

( )Sim ( )Não ( )Às vezes

13- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia**?

( )Sim ( )Não ( )Às vezes

14**-Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática**?

( )Contente ( )Tranquilo ( )Com Medo ( )Preocupado ( )Com Raiva ( )Com Calafrios

15- **Quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor(a) de matemática mais utiliza para a avaliação da aprendizagem?**

( )Provas/simulado ( )Testes semanais ( )Seminários ( )Pesquisas ( )Projetos

( )Outros. Quais? _____

16- **A maioria das aulas das suas aulas de matemática**:

( )Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios;

( )Iniciaram com a história do assunto para depois explorar os conceitos;

( )Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto;

( )Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;

( )Iniciaram com jogos para depois sistematizar os conceitos.

17- **Para praticar o conteúdo de matemática seu professor costumava**:

( )Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;

( )Apresentar jogos envolvendo o assunto;

( )Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;

( )Não propunha questões de fixação;

( )Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem