Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Thiago de Vasconcelos Barros

ROLEPLAYING GAME E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Belém - PA
2025

Thiago de Vasconcelos Barros

ROLEPLAYING GAME E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática apresentada a Banca de Defesa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Belém - PA
2025

THIAGO DE VASCONCELOS

ROLEPLAYING GAME E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data de aprovação: 22/10/2025

Banca examinadora

_____. Orientador
Prof. Dr. MIGUEL CHAQUIAM
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

Acylena Coelho Costa. Examinador Interno
Profa. Dra. ACYLENA COELHO COSTA
Doutora em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica / PUC-SP
Universidade do Estado do Pará

Iran Abreu Mendes. Examinador Externo
Prof. Dr. IRAN ABREU MENDES
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade Federal do Pará

Belém – PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

B277r Barros, Thiago de Vasconcelos

Roleplaying game e função exponencial / Thiago de Vasconcelos Barros. — Belém, 2025.

219 f.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2025.

1. Ensino de matemática. 2. Jogos no ensino de matemática. 3. Roleplaying game. 4. Função exponencial. I. Título.

CDD 22.ed. 515.7

Elaborado por Priscila Melo CRB/2-1345

GOVERNO DO ESTADO DO PARÁ
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO Nº 0139

Em 22 de Outubro de 2025 às 16h, no Centro de Ciências Sociais e Educação, Sala 04 do Bloco VI, realizou-se a Defesa de Dissertação do mestrando **THIAGO DE VASCONCELOS BARROS** intitulada **"ROLEPLAYING GAME E FUNÇÃO EXPONENCIAL"**, e na oportunidade também foi apresentado o Produto Educacional de sua autoria juntamente com seu orientador, intitulado: "**ROLEPLAYING GAME E FUNÇÃO EXPONENCIAL – LIVRO – JOGOS: CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE**", apresentados para a banca, constituída pelos Professores Doutores **MIGUEL CHAQUIAM** (Orientador), **ACYLENA COELHO COSTA** (Membra Interna), **IRAN ABREU MENDES** (Membro Externo – Universidade Federal do Pará / UFPA). Após declarada aberta a sessão, o Presidente concedeu a palavra ao mestrando para apresentar sua dissertação. Em seguida a apresentação do mesmo, a Banca Examinadora proferiu suas arguições, avaliou e decidiu por unanimidade:

(X) Aprovar;
( ) Aprovar com recomendações;
( ) Não Aprovar.

com o seguinte parecer: O trabalho traz contribuições ao ensino de Matemática, especificamente, ao ensino de funções exponencial. A Banca recomenda publicação de artigos a partir do relatório de pesquisa em periódicos da categoria Internacional. e que o Produto Educacional, pode ser publicado como livro.

Para constar na Secretaria Acadêmica do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - Mestrado Profissional em Ensino de Matemática foi redigida a presente Ata, que vai assinada pelos senhores membros da Banca Examinadora.

Orientador/Presidente

Acylena Coelho Costa
Membro Interno

Iran Abreu Mendes
Membro Externo

Agradecimentos

Meu primeiro agradecimento é a Deus, por me dar força, coragem e muitas bênçãos ao longo dessa formação, e por nunca me abandonar nos momentos de dificuldade.

Agradeço aos meus pais, que sempre viram em mim o potencial para ser o que eu quisesse, por sempre apoiarem meus estudos e acreditarem em mim.

Ao meu grande amor, Eduarda, obrigado por sempre me ouvir nos momentos de necessidade, por me ajudar em todo o processo de escrita deste trabalho, pelas tardes em que discutíamos sobre a pesquisa e, principalmente, pela ajuda durante a aplicação da proposta.

Aos meus amigos de longa data, a “Sociedade”, pela amizade e apoio que vão além da graduação. Agradeço pelos momentos de descontração, pelas risadas e pelas mesas de RPG que nos ajudam a lidar com os problemas da vida adulta e que tanto me auxiliaram no desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus colegas de turma do Programa, foi um prazer imenso conhecer todos vocês. Espero que tudo de bom aconteça na vida de cada um e que possamos nos encontrar muitas outras vezes em nossas jornadas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Miguel Chaquiam, pela generosidade, amizade, incentivo e confiança. Sou muito grato por este acompanhamento desde a graduação e por ter encarado mais uma vez o desafio de juntar o *Roleplaying Game* com a Matemática.

Sou grato à Universidade Federal do Pará (UFPA) pela licença que me permitiu fazer essa qualificação e onde tive minha formação inicial. Agradeço ao Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UEPA e a todos os seus professores, pela excelente formação. Um obrigado especial à Coordenação da Graduação de Matemática por disponibilizar uma turma para a aplicação deste trabalho, sem a qual eu não conseguiria colocar em prática o que desenvolvi.

Agradeço também à Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas (FAPESPA) pelo apoio financeiro, que foi essencial para a realização desta pesquisa.

E por fim, sou grato a todos que, de alguma forma, ajudaram e contribuíram para a realização deste trabalho durante esses árduos anos de curso.

RESUMO

O presente trabalho é uma ampliação e aprofundamento de um trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, tendo em vista os problemas pertinentes a consolidação de conteúdos de Função Exponencial. Dentre as alternativas metodológicas para o ensino de matemática, o uso de jogos, gera interesse por parte dos professores, visto seu caráter motivador e lúdico. Nesse cenário emerge o *Roleplaying Game* como uma possibilidade de implementação em contextos escolares. Contudo, essa modalidade ainda é pouco conhecida por professores. Na assim se buscou a possibilidade de interrelacionar função exponencial e Roleplaying Game, por meio do seguinte questionamento: Que variante do *Roleplaying Game* pode ser elaborado, para alunos do ensino médio, com vista a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial? Para obter elementos e argumentos que corroborem em responder ao questionamento apresentado, foi traçado como objetivo geral Elaborar um Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, destinado a alunos do ensino médio, com vistas a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial. Classifica-se este trabalho quanto a sua Natureza como Aplicada, visto que teve por objetivo a geração de conhecimento para aplicação prática, dirigida à solução de problemas específicos, e, quanto a sua Abordagem, como Qualitativa, uma vez que desenvolveu um entendimento mais acentuado sobre um problema que não podem ser mensurados apenas com números e dados obtidos por meio de questionário. Ademais, quanto aos seus Objetivos, como Exploratória, uma vez que foi explorado possibilidades e cenários sob diversos prismas com a finalidade de ganhar familiaridade e adquirir novos insights sobre uma situação atual e, quanto aos seus Procedimentos, Bibliográfica, pois, se realizou a partir do levantamento de referencial teórico e revisão bibliográfica, publicadas em meios físicos ou eletrônicos. A análise quanto a livros didáticos, constatou que parte das questões é do tipo manipulação, caracterizada pelo cálculo algorítmico com ênfase na destreza, rotineiros, sistematização e aplicação de regras e fórmulas. Em suma, os livros didáticos apresentam estrutura semelhante, com poucas variações. Desta forma a proposta foi desenvolvida para suprir uma lacuna identificada nos materiais didáticos analisados. E a concepção fundamentou-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996, 2008) e no uso de jogos no ensino de matemática descrito por Grando (1995, 2000), e a articulação entre essas propostas norteou um modelo para a criação da proposta de *Roleplaying Game*. E após o destaque das potencialidades dos jogos de RPG no ensino e elencarmos o Livro-Jogo como a variante escolhida, devido a facilidade de aplicação por professores que desconhecem os RPGs; assim se elaborou o Livro-Jogo, intitulado “Conspiração Contaminante”. Assim se realizou a aplicação com alunos concluintes do ensino médio, e por meio dos resultados obtidos pela validação, demonstrou-se eficaz, o que promoceu o engajamento, o pensamento colaborativo e a aprendizagem significativa de um conteúdo abstrato por meio da narrativa. Evidenciou-se, ainda, que a proposta contribuiu para o desenvolvimento da leitura e da análise textual dos participantes. Com base nos resultados, realizou-se ajustes no material, o que gerou de um Produto Educacional, disponível no link[1].

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Jogos no Ensino de Matemática; Roleplaying Game; Função Exponencial.

[1] http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1133355

ABSTRACT

The present work is an expansion and deepening of a final paper for the Licentiate in Mathematics course, in view of the problems pertaining to the consolidation of Exponential Function content. Among the methodological alternatives for mathematics teaching, the use of games generates interest from teachers, given its motivating and playful character. In this scenario, the Roleplaying Game emerges as a possibility for implementation in school contexts. However, this modality is still little known by teachers. Thus, the possibility of interrelating exponential function and Roleplaying Game was sought, by means of the following questioning: What variant of the Roleplaying Game can be elaborated, for high school students, with a view to consolidating contents related to the exponential function? To obtain elements and arguments that corroborate in answering the presented questioning, the general objective was outlined to Elaborate a Gamebook, a variant of the Roleplaying Game, aimed at high school students, with a view to consolidating contents related to the exponential function. This work is classified as Applied as to its Nature, given that it had as an objective the generation of knowledge for practical application, directed at solving specific problems, and, as to its Approach, as Qualitative, since it developed a more accentuated understanding of a problem that cannot be measured only with numbers and data obtained by means of a questionnaire. Furthermore, as to its Objectives, as Exploratory, since possibilities and scenarios were explored under diverse prisms with the finality of gaining familiarity and acquiring new insights about a current situation and, as to its Procedures, Bibliographical, as it was carried out from the survey of theoretical references and bibliographic review, published in physical or electronic media. The analysis regarding textbooks found that part of the questions are of the manipulation type, characterized by algorithmic calculation with an emphasis on dexterity, routines, systematization and application of rules and formulas. In sum, the textbooks present a similar structure, with few variations. Thus, the proposal was developed to fill a gap identified in the analyzed didactic materials. And the conception was based on the Theory of Didactic Situations by Brousseau (1996, 2008) and on the use of games in mathematics teaching described by Grando (1995, 2000), and the articulation between these proposals guided a model for the creation of the Roleplaying Game proposal. And after highlighting the potentialities of RPG games in teaching and listing the Gamebook as the chosen variant, due to the ease of application by teachers who are unfamiliar with RPGs; thus the Gamebook was elaborated, titled “Contaminant Conspiracy”. Thus, the application was carried out with students concluding high school, and by means of the results obtained by the validation, it demonstrated to be effective, which promoted engagement, collaborative thinking and the significant learning of an abstract content by means of the narrative. It was also evidenced that the proposal contributed to the development of reading and textual analysis of the participants. Based on the results, adjustments were made to the material, which generated an Educational Product, available at the link[2].

Keywords: Mathematics Teaching; Games in Mathematics Teaching; Roleplaying Game; Exponential Function.

[2] http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1133355

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relações na concepção do ensino na TSD 19
Figura 2 – Definição de Função Exponencial livro 1. 52
Figura 3 – Exercícios resolvidos livro 1. 53
Figura 4 – Exercícios propostos livro 1. 53
Figura 5 – Tarefas de autoavaliação livro 1. 54
Figura 6 – Tarefa exploratória introdução do conceito emergente livro 2. 57
Figura 7 – Tarefa para revistar o conhecimento prévio de potenciação livro 2. 58
Figura 8 – Estrutura das seções livro 2. 58
Figura 9 – Tarefa para revistar o conhecimento prévio de radiciação livro 2. 59
Figura 10 – Tarefa de exploração para introduzir o conceito emergente livro 2. 60
Figura 11 – Tarefa de exploração para introduzir o conceito emergente livro 2. 61
Figura 12 – Definição de Função Exponencial aprestada no livro 2. 62
Figura 13 –Tarefa exploratória para introduzir o capítulo livro 3. 65
Figura 14 – Definição da Função Exponencial livro 3. 66
Figura 15 – Notação Científica livro 3. 67
Figura 16 – Equação e inequação exponencial livro 3. 68
Figura 17 – Conexões com a Função Exponencial livro 3. 69
Figura 18 - Gráfico da Função Exponencial 87
Figura 19 - Exemplo de um Sistema de RPG 94
Figura 20 - Dados utilizados em jogos de RPG 95
Figura 21 – Exemplos de fichas de personagem utilizadas em jogos de RPG. 96
Figura 22 – Jogadores em um RPG de mesa. 98
Figura 23 – Fragmento de um livro-jogo. 100
Figura 24 - Página inicial da plataforma *Inklewriter.* 110
Figura 25 - Página da plataforma *Inklewriter.* 110
Figura 26 – Exemplo de divisão de passagens na plataforma *Inklewriter.* 111
Figura 27 – Visualização como leitor. 111
Figura 28 – Visualização por meio da opção map. 112
Figura 29 – Formas de compartlhamento. 112
Figura 30 – Exemplificação de um Bloco. 114
Figura 31 - Página Inicial do Google Colab 122
Figura 31 – Passo de colar o código na plataforma 123

Figura 31 – Exemplificação da execução do código. 123
Figura 31 – Secção de Upload de arquivos..... 124
Figura 31 – Execução do segundo código. 124
Figura 32 – Registro escrito da resolução do problema Grupo 1 155
Figura 33 – Registro escrito da resolução do problema Grupo 2 156
Figura 34 – Registro escrito da resolução do problema Grupo 3 157
Figura 35 – Registro escrito da resolução do problema Grupo 4 158

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Tipologia das situações didáticas 21
Quadro 2 – Potencialidades e recomendações sobre o uso de jogos. 26
Quadro 3 - Momentos do jogo 26
Quadro 4 – Estrutura da Análise do Discurso 30
Quadro 5 - Correlação TSD x Jogos x Análise do Discurso. 31
Quadro 6 - Processo de seleção 37
Quadro 7 - Sínteses das pesquisas escolhidas para estudo 37
Quadro 8 - Livros Analisados 49
Quadro 9 - Critérios de análise de livros didático 50
Quadro 10 - Caracterização dos Tipos de Tarefas 51
Quadro 6 - Análise do livro Conexões Matemática e suas tecnologias. 55
Quadro 7 - Análise do livro Matemática em Contextos. 63
Quadro 8 - Análise do livro Matemática Interligada. 69
Quadro 14 – Habilidades BNCC Função Exponencial para o Ensino Médio 108
Quadro 15 – Articulação Tipologia das SD x Jogos. 114
Quadro 16 – Articulação Tipologia das SD x Jogos x Livro-Jogo. 118
Quadro 17 – Articulação Tipologia das SD x Jogos x Livro-Jogo. 121
Quadro 18 - Transcrição dos diálogos da etapa de situação de ação. 126
Quadro 19 - Transcrição dos diálogos dos Blocos 13 ao 22 132
Quadro 20 - Transcrição dos diálogos dos Blocos 43 ao 53 140
Quadro 21 - Transcrição dos diálogos da etapa de situação de validação. 147

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 14

2. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS 19

2.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS 19

2.2. JOGOS COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO 23

2.3. MICROGNÉTICA E ANÁLISE DO DISCURSO 28

2.4. CORRELAÇÃO ENTRE OS APORTES 31

3. SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL 33

3.1. A FUNÇÃO EXPONENCIAL EM DOCUMENTOS OFICIAIS 33

3.2. REVISÃO DA LITERATURA DO ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL 35

3.2.1. Sobre a dissertação de Ferreira (2023) 37

3.2.2. Sobre a dissertação de Costa (2023) 39

3.2.3. Sobre a dissertação de Junior (2022) 41

3.2.4. Sobre a dissertação de Costa (2021) 43

3.2.5. Sobre a dissertação de Emer (2020) 45

3.2.6. Considerações sobre as dissertações estudadas 47

3.3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL EM LIVROS DIDÁTICOS 48

3.3.1. Conexões Matemática e suas tecnologias: Funções e Aplicações 51

3.3.2. Matemática em Contextos: Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequencias 56

3.3.3. Matemática Interligada: Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica 64

3.3.4. Considerações sobre os livros didáticos analisados. 70

4. SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL 75

4.1. POTÊNCIAS DE EXPOENTE REAL 75

4.2. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E ALGUNS CONCEITOS 80

4.3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL 81

4.3.1. O gráfico da Função Exponencial 87

4.4. CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL 88
5. UM OLHAR SOBRE O JOGO *ROLEPLAYING GAME* 92
5.1. O QUE SÃO OS *ROLEPLAYING GAMES*? 92
5.2. DIFERENTES TIPOS DE *ROLEPLAYING GAMES* 97
5.3. POTENCIALIDADES DO *ROLEPLAYING GAME* NO ENSINO 100
5.3.1. Potencialidades do *Roleplaying Game* 102
5.4. ESCOLHA DA VARIAÇÃO DO ROLEPLAYING GAME 105
6. CONSTITUIÇÃO, APRESENTAÇÃO E APLICAÇÃO DO RPG 107
6.1. SELEÇÃO DOS CONTEÚDOS 107
6.2. PLATAFORMA UTILIZADA NA ESCRITA 109
6.3. A COMPOSIÇÃO DO LIVRO-JOGO 113
6.4. SOBRE A APLICAÇÃO 118
7. INTERPRETAÇÃO DOS DADOS E INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM 121
7.1. PROCEDIMENTO DE TRANSCRIÇÃO 122
7.2. TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE DA SITUAÇÃO DE AÇÃO 125
7.3. TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE DA SITUAÇÃO DE FORMULAÇÃO 131
7.3.1. Transcrição e Análise Blocos 13 ao 22. 132
7.3.2. Transcrição e Análise Blocos 43 ao 53. 139
7.4. TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE DA SITUAÇÃO DE VALIDAÇÃO 147
7.5. SÍNTESE DA ANÁLISE DA APLICAÇÃO 159
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS 161
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA E REFERIDA 168
APÊNDICES 173
APÊNDICE A – TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DA APLICAÇÃO COM ESTUDANTES 174
APÊNDICE B – CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE (LIVRO-JOGO) 175
APÊNDICE C – RELATÓRIO DO INVESTIGADOR 225

1. INTRODUÇÃO

Na Universidade do Estado do Pará, no programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, desenvolvi esta pesquisa de mestrado, é detalhado o percurso metodológico e apresento seus resultados. Nesta introdução, busca apresentar uma visão do meu histórico sobre o objeto de função, bem como das linhas gerais da pesquisa, motivações, justificativas, objetivos, bases teóricas e metodológicas, além do objeto de pesquisa. E quanto aos resultados, estes destacam as potencialidades do trabalho para o ensino de conteúdos relacionados Função Exponencial no Ensino Médio.

Ao iniciar minha trajetória como professor e pesquisador em matemática, no ano de 2019, ao ingressar na Universidade do Estado do Pará (UEPA), uma das primeiras disciplinas que tive a oportunidade de cursar foi "Fundamentos da Matemática Elementar I," ministrada pelo professor Miguel Chaquiam. Nessa disciplina, exploramos temas como Lógica Matemática, Noções de Conjunto e Funções. Esse período foi crucial, pois percebi que tanto eu quanto diversos colegas apresentávamos lacunas em tópicos essenciais, especialmente sobre funções, um conteúdo indispensável ao longo do curso superior.

Esse contexto se relaciona com o que Ardenghi (2008) enfatiza: muitas dificuldades em torno de funções se evidenciam ainda mais em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral. Tal percepção me motivou a buscar um aprofundamento no processo de ensino e aprendizagem de funções.

A relevância deste assunto e da necessidade de se criar propostas metodológicas para o ensino do conceito de função, se mostrou durante as reuniões do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), no qual comecei a participar. Com destaque a uma das reuniões, em que a professora Edna Machado, que na época era aluna do programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, apresentou uma Sequência Didática sobre funções. Esse contato me inspirou a explorar formas de ensino além da aula expositiva.

No âmbito da Educação Matemática, existem diversas alternativas pedagógicas e didáticas, que buscam provocar o aluno, criar desejo pela busca de novas perspectivas quanto ao assunto, novos modos de ver e fazer, e a adoção de diferentes perspectivas quanto a um mesmo objeto matemático. E dentre as principais pesquisas, há a investigação de diversos temas mais específicos como a análise de

currículos, a criação e análise de situações didáticas, a história da Matemática como prática de ensino, a Etnomatemática e o uso de jogos (Garnica e Sousa, 2012).

Entre as diversas alternativas para o ensino de matemática, o uso de jogos despertam grande interesse. Segundo Fiorentini e Miorim (1990), os jogos geram este interesse por parte dos professores, visto, principalmente, pelo seu caráter motivador e lúdico. Os autores explicam que os jogos possibilitam aos alunos estabelecerem conexões entre os conceitos abordados nas aulas e as experiências concretas proporcionadas pela manipulação de objetos. Essa dinâmica incentiva a curiosidade, a descoberta e o engajamento dos alunos, transformando-os em sujeitos ativos.

Nos anos finais da graduação, ocorreu desenvolvimento de um trabalho que combinasse o uso de jogos com o ensino de conteúdos de função. Nessa trajetória, junto a um amigo de turma, Roger Souza, surgiu a ideia de empregar no ensino de matemática um jogo com o qual já tínhamos familiaridade: o Roleplaying Game (RPG). Segundo Vasques (2008), o RPG apresenta uma ampla gama de possibilidades ao ser implementado em contextos escolares. Contudo, essa ferramenta ainda é pouco conhecida por pesquisadores e professores, mesmo com suas grandes potencialidades para a educação em geral e para a educação matemática.

E um conteúdo com problemática era em especial as Funções Exponenciais. Pois em concordância com Silva (2016), a problemática que permeia o conteúdo de Funções Exponenciais ocorre, visto que este tema é considerado desafiador de ser apresentado, discutido e ensinado aos alunos, dado sua complexidade, o que acarreta na dificuldade de aprendizagem e compreensão do conteúdo pelos alunos pelos alunos.

Essa ideia culminou no Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE: Roleplaying Game e conteúdos matemáticos”, orientado pelo professor Miguel Chaquiam; em que buscamos verificar quais adaptações podem ser feitas no Roleplaying Game para consolidar conteúdos relacionados à função exponencial. O objetivo foi elaborar uma proposta que utilizasse o RPG para promover a aprendizagem de função exponencial, inspirada nas obras de Amaral (2013) e Marcatto (1996). Assim, criamos uma narrativa de RPG para ser usada nas aulas de Matemática, chamada “Conspiração Contaminante” (Souza e Barros, 2023). Esse trabalho foi agraciado com o primeiro lugar do prêmio de melhor TCC do curso de Matemática dos anos de 2022/2023, promovido pela Pró-Reitoria de Graduação da UEPA.

Ao ingressar no mestrado em Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Pará (UEPA), busquei, com a orientação do professor Miguel Chaquiam, dar continuidade à pesquisa iniciada no TCC. Meu objetivo era aprofundar a investigação sobre o uso do RPG integrado às aulas de Matemática, explorando mais detalhadamente suas potencialidades para o ensino desse conteúdo, o que culminou na presente pesquisa.

Tendo em vista que a revisão de conteúdos matemáticos abordados no primeiro ano do Ensino Médio pode ser revisada a qualquer momento após seu ensino ao longo do Ensino Médio e observado o exposto acima, levantamos o seguinte questionamento: Que potencialidades apresenta a variante do *Roleplaying Game*, Livro Jogo, destinada aos alunos do ensino médio, com vista a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial?

Tendo em vista o questionamento elencado, foi traçado como objetivo geral Elaborar um Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, destinado a alunos do ensino médio, com vistas a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial.

Para melhor marcação das atividades desenvolvidas, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar aportes teóricos e metodológicos que sustentem a constituição do Livro-Jogo e atividades relacionadas aos conteúdos de Função Exponencial;
- Efetuar revisão de textos a respeito do ensino de função exponencial, com vista a elaboração de atividades que consolidem os conteúdos relacionados;
- Elaborar texto relacionado aos conteúdos de Função Exponencial, visando a elaboração do Livro-Jogo para consolidação desses conteúdos e que também sirva de suporte para professores em formação inicial ou continuada;
- Fundamentar o *Roleplaying Game* e suas variantes, com vistas a seleção de uma dessas variantes que possibilite seu uso na consolidação de conteúdos matemáticos relacionados a função exponencial;
- Elaborar um Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, com atividades relacionadas a função exponencial, com vistas a sua consolidação;
- Validar a proposta elaborada (Livro-Jogo) com base nos princípios da Microgenética e Análise de Discurso;
- Gerar um Produto Educacional a partir da validação da proposta elaborada (Livro-Jogo), visando sua disseminação e divulgação do meio utilizado para consolidação de conteúdos relacionados a função exponencial.

Com base em Gil (2002), Creswell (2007) e Bauer e Gaskel (2008), a presente pesquisa então foi classificada quanto a sua Natureza, como Aplicada, visto que é um tipo de pesquisa que tem por objetivo a geração de conhecimento para aplicação prática, dirigida à solução de problemas específicos envolvendo interesses específicos e localizados e, quanto a sua Abordagem, como Qualitativa, uma vez que se teve por objetivo desenvolver um entendimento mais acentuado sobre um assunto ou uma questão ou um problema que não podem ser mensurados apenas com números e dados obtidos por meio de questionário.

Ademais, quanto aos seus Objetivos, Exploratória, uma vez que são exploradas possibilidades e cenários sob diversos prismas com a finalidade de ganhar familiaridade e adquirir novos insights sobre uma situação atual e, quanto aos seus Procedimentos, Bibliográfica, pois, será realizado a partir do levantamento de referencial teórico e revisão bibliográfica, publicadas em meios físicos ou eletrônicos, tendo por finalidade o aprimoramento e a atualização do conhecimento ancorada numa investigação científica de obras publicadas.

Para tal, este trabalho está estruturado em capítulos apresentados a seguir. No primeiro ocorreu uma introdução sobre o tema que será abordado em nosso trabalho, com o objetivo de situar o leitor sobre o tema que será desenvolvido, o problema de pesquisa, bem como os objetivos gerais e específicos que vão embasar a pesquisa que será desenvolvida neste trabalho.

O segundo tem a função de apresentar aportes teóricos e metodológicos utilizados na pesquisa, isto é, sob quais teorias e procedimentos metodológicos da educação Matemática e da didática da Matemática sustentaram a escolha e a elaboração da proposta do uso do RPG em formato de Livro-Jogo. E a partir da articulação destes modelos, se desenvolveu um quadro que guiou a elaboração da proposta.

No terceiro capítulo, capítulo abordou o Ensino da Função Exponencial, em vista a elaboração de atividades que consolidem os conteúdos relacionados a este objeto matemático. Inicia-se com uma revisão de literatura sobre documentos oficiais para o Ensino Médio, para entender como estes norteiam o ensino com foco na disciplina de Matemática. Em seguida, realiza-se uma revisão de dissertações relacionadas ao ensino da Função Exponencial, afim de identificar as tendências e métodos adotados pelos pesquisadores e verificar sua adequação às diretrizes oficiais. Por fim, é apresentada uma análise de três livros didáticos, com o intuito de

examinar como esses materiais introduzem a função exponencial, avaliar sua conformidade com as orientações oficiais e verificar se incluem elementos apontados pelas dissertações sobre o ensino desse conteúdo.

O quarto capítulo, é destinado um texto relacionado aos conteúdos de Função Exponencial com vistas a subsidiar a elaboração das atividades inseridas ao longo do jogo, bem como contribuir à formação inicial ou continuada do professor de matemática. O texto contém sobre as potencias, cujo o expoente pertence ao conjunto dos números reais; define-se Função e alguns conceitos, para desta forma definir a Função Exponencial, e após realizar a caracterização desta função.

O quinto capítulo, apresenta-se o *Roleplaying Game* e suas variantes, com vistas a seleção de uma dessas variantes que possibilite seu uso na consolidação de conteúdos matemáticos relacionados a função exponencial. Assim, o capítulo tem início com uma exposição sobre os jogos de RPG para aqueles que não estão familiarizados com esse gênero, com um pouco de sua definição, como jogar e as diferentes variações. Em seguida, é dissertado acerca do uso deste jogo em sala da aula, as quais apresenta potencialidades, tanto por conta dos argumentos sobre o uso de jogos no ensino, como por elementos exclusivos do jogo *Roleplaying Game.* E por fim, é argumenta-se sobre a seleção da variante do Livro-Jogo.

Após essa etapa, o sexto capítulo aborda o processo de elaboração do Livro-Jogo. Com a descrição do processo de construção dos problemas matemáticos integrados à narrativa, bem como a adaptação da história *"Conspiração Contaminante"*, presente em Barros e Sousa (2023), para o formato de Livro-Jogo; além de fornecer orientações que auxiliem professores interessados em aplicar o RPG em sala de aula, apresentando os procedimentos necessários para a criação de um Livro-Jogo voltado ao ensino de conteúdos matemáticos.

O sexto capítulo é dedicado à interpretação dos dados e à verificação dos indícios de aprendizagem, com o objetivo de validar a proposta elaborada (Livro-Jogo). Para isso, adotaram-se os princípios da Microgênese e da Análise de Discurso, conforme caracterizado no Capítulo 4. Foram realizadas análises dos segmentos de fala que representam as fases da Teoria das Situações Didáticas (TSD), buscando evidenciar indícios de aprendizagem dos alunos e verificar se as metas estabelecidas para cada momento do jogo — definidas a partir da articulação dos aportes de Brousseau (2008) e Grando (2000) — foram alcançadas em cada uma das etapas.

2. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

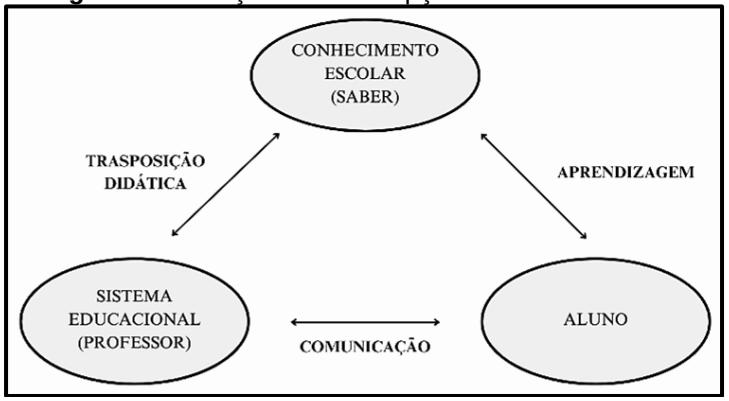
Agora cabe apresentar e dissertar sobre a fundamentação teórica e metodológica da pesquisa, isto é, sob quais teorias e procedimentos metodológicos da educação Matemática e da didática da Matemática sustentam a escolha e elaboração da proposta de uso do RPG em formato de livro-jogo para o ensino de função exponencial.

2.1.TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A primeira teoria que adoto é a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida pelo educador matemático francês Guy Brousseau. A escolha desta teoria ocorreu em razão de suas definições fundamentais estarem correlacionadas a dois dos elementos estruturantes da pesquisa, os sujeitos e o contexto. Este aporte desempenha papel de caracterizar os sujeitos e a relação destes com o professor e o conhecimento; definir, também, o contexto a ser planejado pelo professor, o que para Brousseau é tido como “meio” ou *milieu*; além das relações existentes entre os alunos e o meio (*milieu*).

Essa abordagem se apresenta como um instrumento científico que busca integrar e unificar as contribuições de diversas disciplinas, proporcionando uma compreensão mais abrangente das possibilidades de aprimoramento e regulação do ensino da matemática (Brousseau, 2008, p. 16). As origens da teoria das situações didáticas, provem da concepção de ensino tido como as relações o sistema educacional (o professor), o aluno e o conhecimento.

Figura 1 – Relações na concepção do ensino na TSD



Fonte: Adaptado de Brousseau (2008).

Nessa concepção, o conhecimento matemático assume diversas formas entre elas o saber matemático científico, que tem sua utilizado para a construção da matemática como ciência. Para então, facilitar sua transmissão e compreensão no ambiente educacional certas, isola-se a determinadas noções e propriedades que o conhecimento teve em sua origem, como seu sentido, sua motivação e sua utilização o transpondo para o contexto escolar. Logo, o papel do professor é realizar essa *recontextualização*, transformando os conhecimentos em saberes escolares que possam ser transmitidos por meio da interação entre professor e aluno, em um processo conhecido como transposição didática (Brousseau, 1996).

Nesse contexto, também, o trabalho do aluno vai além da mera resolução de problemas; ele deve refletir o trabalho científico, envolvendo formulação, prova, construção de modelos, conceitos, entre outros aspectos. Para viabilizar essa atividade, o professor precisa criar e propor situações em que o conhecimento matemático se apresente como uma solução passível de ser descoberta diante dos problemas propostos (Brousseau, 1996).

Brousseau (2008) define essas *situações* como um modelo de interação entre um indivíduo e um meio determinado. O sujeito utiliza um conjunto de decisões baseadas em conhecimento para lidar com esse meio. O meio, ou *Milieu*, é visto como um sistema autônomo, antagônico ao sujeito. Logo, como destacado pelo autor “ao tomarmos como objeto de estudo as circunstâncias que regem a difusão e a aquisição dos conhecimentos, vamos nos interessar pelas situações.” (Brousseau, 2008, p.21).

Na década de 70, Brousseau definiu as *situações didáticas* como "aquelas que servem para ensinar sem que seja levado em conta o papel do professor", como o uso diversos meios, como textos e materiais, para transmitir conhecimento. A engenharia didática focava na produção desses meios, enquanto o professor criava um ambiente no qual o aluno pudesse interagir. A situação era vista como o contexto ao redor do aluno, moldado pelo professor e visto como uma ferramenta.

Mais tarde, é definido as *situações matemáticas* como aquelas em que o aluno se envolve em uma atividade matemática sem a intervenção do professor. O termo "situações didáticas" passou a ser reservado para descrever os modelos que descrevem as atividades tanto do professor quanto do aluno. Portanto, segundo essa segunda concepção, a situação didática engloba todo o contexto que envolve o aluno, incluindo o professor e o sistema educacional (Brousseau, 2008).

Portanto, nessa concepção de ensino, o professor organiza o conhecimento que pretende se ensinar ao aluno por meio do uso de um dispositivo que deve ser colocado em ação para que uma pessoa ensine um conhecimento e controle a sua aquisição, ou seja o *Milieu,* como peças de um jogo, uma prova ou um problema. E assim o conhecimento é transmitido através de uma troca de interações entre o aluno e o meio didático proposto pelo professor (*Milieu*). Assim como destaca Brousseau (2008, p. 22) “Na perspectiva da teoria das situações, os alunos se tornam reveladores das características das situações às quais reagem.”.

Nas situações didáticas, o aluno percebe que os contextos ou problemas nos quais está inserido foram concebidos para que aprenda um conhecimento, mas deve igualmente saber que este conhecimento é justificado para além de somente razões didáticas. Pois, como ressalta Brousseau (2008), o conhecimento só será plenamente adquirido quando o aluno puder aplicá-lo fora do ambiente de ensino, sem instruções específicas. Essa situação é denominada de adidática.

Cada conhecimento possuiu então, uma ou várias situações adidáticas que preservam o seu sentido e significado, estas situações são chamadas de situação fundamental. Assim as situações adidáticas, criadas com propósitos didáticos, definem o conhecimento transmitido em um dado momento e significado particular que irá assumir em meio ao ambiente didático, por essa razão ocorrem restrições e deformações adicionadas na situação fundamental.

Para então permitir ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo o professor somente o papel de mediador, as situações didáticas são compostas de fases em 4 fases, sendo estas a situação de ação, de formulação, de validação e de institucionalização, cujas características apresento no quadro a seguir conforme Brousseau (1996), Brousseau (2008) e Teixeira (2013).

Quadro 1 – Tipologia das situações didáticas

TIPO	CARATERIZAÇÃO
Situação de ação	Momento no qual por meio da interação inicial com o *Milieu*, o aluno começa a refletir e simular tentativas, ao relacionar algumas informações às suas decisões (feedback), antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões. Assim, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema;
Situação de formulação	Momento em que ocorre troca de informação entre o aluno e o *milieu*, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal; ou seja, é quando o aluno expressa suas estratégias e resoluções, por meio da linguagem oral e/ou escrita;

Situação de validação	Quando os alunos tentam convencer os interlocutores veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada;
Situação de institucionalização	Momento em que os alunos destinam a promover o sentido e dão significado ao saber elaborado. E cabe ao professor institucionalizar a tarefa, formalizar e generalizar os conceitos pretendidos;

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Nesse sentido, as atividades são desenvolvidas para que o aluno através da interação com o meio crie estratégias, a refletir e simular tentativas para a resolução do problema, formule e valide tais estratégias, ou seja é necessário que do aluno passar por situações de ação, de formulação e de validação. Durante esses processos, são desenvolvidos modelos explicativos e esquemas teóricos, alinhados com as intervenções diretas do professor para confirmar ou questionar os modelos e esquemas construídos ao longo do caminho. O objetivo é que, ao final, o professor possa formalizar o conhecimento com rigor matemático adequado e consolidar esse entendimento.

Seguindo esses procedimentos, Passos e Teixeira (2013) destacam que o professor não fornece diretamente a resposta, incentivando assim a participação ativa do aluno no processo cognitivo. Dessa forma, o aluno tem a oportunidade de construir novos conhecimentos com base em suas experiências pessoais, com sua própria interação com o meio.

Na presente pesquisa, busquei obter um controle mais abrangente dos elementos e situações envolvidos na Transposição Didática Situada (TSD). Para isso, as seções que investigaram as dificuldades de aprendizagem na perspectiva dos estudantes e professores, juntamente com a revisão de estudos, foram fundamentais para caracterizar os participantes da pesquisa.

Além disso, o estudo aprofundado do objeto matemático proporcionou o embasamento epistemológico necessário para construir e aplicar um *milieu* potencialmente eficaz a consolidação de conteúdos relacionados a Função Exponencial.

2.2. JOGOS COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO

O emprego de jogos nas aulas de matemática como ferramenta metodológica na Educação Matemática representa uma tendência que busca promover o protagonismo do estudante no processo de ensino, aprendizagem e avaliação da disciplina. Essa abordagem desperta interesse entre os professores de matemática devido ao caráter motivador e lúdico associado a essa prática (Fiorentini & Miorim, 1990, p. 1). No entanto, ressalta-se que a justificativa para o uso de jogos não deve se limitar à ludicidade da atividade, pois muitas vezes os professores não têm clareza sobre as razões fundamentais que tornam os jogos importantes para o ensino-aprendizagem da matemática.

Como o *Roleplaying Game* (RPG) é, por natureza, um jogo, ele compartilha as mesmas potencialidades atribuídas ao uso de jogos na Educação Matemática. Nesse contexto, o RPG pode ser considerado uma ferramenta lúdica eficaz para consolidar o aprendizado da função exponencial.

Para embasar a utilização de jogos como instrumento metodológico, recorro principalmente aos estudos de Grando (1995, 2000), que apresenta elementos essenciais a serem considerados pelo professor ao planejar o trabalho com jogos em sala de aula. Tendo em vista que por melhor que seja o material ou o jogo aplicado, este somente não irá promover o aprendizado do aluno.

Quando se pondera o uso de jogos em sala de aula, um elemento de destaque é o caráter lúdico inerente a essa atividade. No contexto das aulas de matemática, esse aspecto é essencial, pois a disciplina é frequentemente considerada chata e incompreensível por muitos. Dessa forma, o jogo pode resgatar o prazer em aprender matemática.

Grando (2000, p. 26) aponta que o jogo capta o interesse dos alunos e os envolve e motiva desde o início da atividade. No entanto, não é apenas o ato de "jogar" que garante a aprendizagem. Embora o interesse inicial dos alunos seja assegurado, é responsabilidade do professor planejar a aplicação do jogo e intervir durante o processo para atingir os objetivos pedagógicos desejados, especialmente ao trabalhar com adolescentes e adultos.

Além disso, a autora ressalta que, ao utilizar o jogo como uma ferramenta metodológica nas aulas de matemática, ele facilita a aprendizagem de estruturas e conceitos matemáticos. Isso ocorre porque, ao desenvolver estratégias e planejar

suas ações, os alunos aprimoram suas habilidades de pensar, analisar e refletir sobre os conceitos matemáticos envolvidos no jogo.

O jogo cria um ambiente onde o aluno, ao jogar, investiga, explora e resolve problemas para ter sucesso e vencer. Esse processo pode ser associado a estratégias de ensino, permitindo que o aluno desenvolva e construa conceitos matemáticos. Cabe ao professor integrar esses conhecimentos no contexto do jogo (Grando, 2009, p. 32).

Com isso, o que justifica usar os jogos em sala, não se resume à ludicidade, mas por possibilitar tornar o aluno o protagonista do próprio processo de aprendizagem, criar um ambiente de sala de aula que incentive a imaginação, investigação, reflexão, criatividade e prazer pelo aprendizado do conhecimento matemático (Grando, 2000).

Além de ser possível verificar que os jogos desempenham, também, um papel crucial na promoção da socialização entre os alunos e no desenvolvimento de habilidades de trabalho em equipe, conforme estipulado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Esses documentos destacam a importância de competências como capacidade de trabalho em equipe, disposição para aceitar críticas e habilidades de comunicação, entre outras, no processo educacional (Brasil, 2000, p. 11-12).

No entanto, é crucial reconhecer que o uso de jogos não é uma solução universal para as aulas de matemática, pois apresenta desvantagens e limitações que requerem consideração por parte dos professores durante o planejamento das atividades (Grando, 2000). Desta forma, a autora destaca recomendações aos professores a serem seguidas ao utilizar os jogos em sala de aula.

Anterior a seleção do jogo, é crucial que o professor defina claramente os objetivos e finalidades do trabalho com jogos, refletindo sobre questões como os objetivos a serem alcançados e as habilidades a serem desenvolvidas. Dessa forma questionamentos, como “Por que pretendo utilizar o jogo em sala?”; “Qual objetivo que pretendo atingir?” “Qual habilidade busco desenvolver?”, necessitam ser refletidos para a melhor escolha do jogo e da preparação para este.

Ou seja, para tornar o jogo um suporte metodológico eficaz em qualquer nível de ensino, o professor deve ter objetivos claros, usar uma metodologia adequada ao nível de ensino e criar uma atividade desafiadora e estimulante que promova o planejamento e a tomada de decisão pelos alunos (Grando, 2009, p. 28).

O jogo escolhido deve apresentar desafios adequados ao nível dos alunos, pois para Grando (2000, p. 27) o desafio caracteriza como um aspecto importante, dado que este que irá proporcionar ao aluno a oportunidade de devolver estratégias próprias para a resolução de problemas. A autora trata com base em Piaget que os desafios presentes em muitos jogos ocasionam conflitos cognitivos nos alunos, fator importante para o desenvolvimento intelectual da pessoa, pois a fim de organizar o desequilíbrio cognitivo ocasionado pelo desafio leva a pessoa a estruturar e reorganizar o pensamento.

O professor desempenha um papel fundamental na criação de um ambiente propício para a imaginação dos alunos, a construção de estratégias e a reflexão sobre o desempenho; além de desencadear um processo de diálogo-ação entre o professor e os alunos e entre os alunos. É importante que o professor não force a participação dos alunos, preservando o caráter lúdico da atividade e evitando a perda de motivação.

É importante, também, evitar que os jogos se tornem meramente uma atividade aleatória, sem propósito educativo, perdendo sua eficácia como ferramenta de ensino. Além disso, é necessário controlar o tempo dedicado aos jogos, pois podem consumir demasiadamente o período de aula se não forem devidamente monitorados. Outro aspecto relevante é não cair na armadilha de acreditar que todos os conceitos matemáticos devem ser ensinados exclusivamente por meio de jogos, reconhecendo que essa abordagem pode limitar a compreensão dos alunos.

A natureza lúdica dos jogos não deve ser motivo para obrigar os alunos a participar; ao contrário, deve ser oferecida como uma oportunidade para engajar os estudantes de forma voluntária. A disponibilidade e acesso ao material também são questões a serem consideradas, uma vez que a falta de recursos pode comprometer a implementação eficaz dos jogos. Por fim, é essencial evitar interferências excessivas do professor durante o jogo, a fim de preservar a ludicidade e autonomia dos alunos durante a atividade.

Por fim é necessário que o professor planeje dentro do tempo estipulado da atividade a instauração de um momento para a discursão matemática. Momento este onde os alunos possam relacionar as experiências durante o jogo com os conceitos matemáticos, promovendo a reflexão e a compreensão das estruturas matemáticas envolvidas (Grando, 1995). Desta forma, sintetizo o dissertado acima por meio do quadro abaixo.

Quadro 2 – Potencialidades e recomendações sobre o uso de jogos.

POTENCIALIDADES	RECOMENDAÇÕES AO PROFESSOR
• Caráter lúdico inerente aos jogos; • Captar o interesse dos alunos e os envolve e motiva desde o início da atividade; • Facilitar a aprendizagem de estruturas e conceitos matemáticos; • Criação de um ambiente em que o aluno, ao jogar, investiga, explora e resolve problemas; • Incentivo a imaginação, investigação, reflexão e criatividade; • O desafios presentes nos jogos ocasionam conflitos cognitivos nos alunos, fator importante para o desenvolvimento intelectual da pessoa; • Tornar o aluno o protagonista do próprio processo de aprendizagem; • Promoção da socialização entre os alunos e no desenvolvimento de habilidades de trabalho em equipe;	• Conhecimento quanto aos objetivos e finalidades do trabalho com o jogo; • Não forçar a participação dos alunos; • Evitar que os jogos se tornem meramente uma atividade aleatória, sem propósito educativo • Controlar o tempo dedicado aos jogos, pois podem consumir demasiadamente o período de aula se não forem devidamente monitorados • O jogo escolhido deve apresentar desafios adequados ao nível dos alunos; • Evitar interferências excessivas do professor durante o jogo;

Fonte: Adaptado de Grando (2000).

Além dos elementos que necessitam ser considerados pelo professor ao objetivar o trabalho com jogos em sala de aula. Durante a realização de atividades de intervenção com jogos em situações de sala de aula, o procedimento de aplicação deste jogo poder ser sintetizado em momentos, cada um com sua especificidade e objetivos. Estas características servirão como base para a estruturação e elaboração do Livro-Jogo, para tanto então descrevo estes momentos, conforme Grando (2000).

Quadro 3 - Momentos do jogo

1°- Familiarização com o material do jogo	• Durante o estágio inicial da atividade, os alunos devem ser introduzidos ao material do jogo, que inclui elementos familiares como dados, peões e tabuleiros, entre outros; • Neste momento, é destinado a exploração do material por meio de simulações de jogadas, buscando compreender sua funcionalidade e dinâmica; • Estabelecer analogias com base em jogos já conhecidos, contribui para a familiarização e compreensão das regras e mecânicas do jogo em questão;
2° - Reconhecimento das regras	• As regras podem ser explicadas oralmente pelo orientador da atividade, lidas pelo grupo de alunos ou identificadas por meio da realização de partidas-modelo. Neste último caso, o orientador pode jogar várias partidas consecutivas com um aluno que já conhece as regras, enquanto os demais observam atentamente.
3° - O "Jogo pelo jogo": jogar para garantir regras	• Este momento representa a fase em que os alunos engajarão no jogo por si só, sem intervenções externas, visando garantir a compreensão das regras; • O foco principal é a internalização das regras por parte dos alunos, jogando-se com o propósito de assegurar que as regras tenham sido compreendidas e estão sendo seguidas corretamente; • Durante essa etapa, que as noções matemáticas presentes no jogo são exploradas;

4° - Intervenção pedagógica verbal	• Fase que envolve intervenção direta. Essas intervenções são conduzidas verbalmente pelo facilitador, durante o decorrer do jogo; • Caracterizado por questionamentos e observações que devem ser feitas pelo facilitador/professor com o intuito de instigar os alunos a analisarem suas próprias jogadas; • O foco está nos processos criados pelos alunos para resolver os problemas do jogo, buscando estabelecer conexões com a conceitualização matemática;
5° - Registro do jogo	• Momento que se distingue dependendo da natureza do jogo em questão e dos objetivos pedagógicos estabelecidos para o registro; • Onde o aluno registra os pontos, os procedimentos adotados ou mesmo os cálculos realizados; • Uma etapa de sistematização e formalização, utilizando uma linguagem específica, que, neste caso, seria a linguagem matemática.; • É essencial implementação de estratégias de intervenção pelo professor que estimule a necessidade do registro escrito durante o jogo, de modo que este não seja apenas uma obrigação arbitrária, mas sim uma prática significativa no contexto do jogo;
6° - Intervenção escrita	• Este momento engloba a resolução de situações-problema relacionadas ao jogo. Os alunos devem enfrentar desafios propostos pelo facilitador ou por outros participantes, abordando aspectos do jogo que podem não ter sido explorados durante as partidas regulares; • O facilitador irá direcionar a análise para os conceitos matemáticos subjacentes ao jogo, contribuindo à aprendizagem matemática; • Durante essa fase, o registro das atividades de jogo também é incentivado; • É importante ressaltar que, mesmo nesse contexto de sala de aula, o aspecto competitivo do jogo deve ser mantido, garantindo o engajamento dos alunos. Portanto, o objetivo principal dessas atividades continua sendo a busca pela vitória no jogo;
7° - Jogar com "competência"	• O último estágio marca o retorno à situação real do jogo, incorporando todas as análises e intervenções anteriores; • É crucial ao jogar a aplicação pelos alunos das estratégias desenvolvidas e examinadas durante os momentos anteriores; • Esse estágio é denominado "jogar com competência", enfatizando que os alunos adquirem habilidades específicas no jogo à medida que jogam e refletem sobre suas ações e possíveis jogadas; • Esse processo amplia a compreensão do jogo sob diferentes perspectivas que podem não ter sido inicialmente consideradas; • Este estágio final auxilia a mitigar uma preocupação comum relacionada à utilização pedagógica de jogos: a perda do caráter lúdico do jogo;

Fonte: Adaptado de Grando (2000).

Para a condução deste estudo, os elementos intrínsecos ao planejamento e à estruturação do uso de jogos em sala de aula baseados em Grando (1995, 2000) serão empregados no auxílio à elaboração do livro-jogo. Essa abordagem visa mitigar o risco de utilização inadequada da atividade, garantindo que ela não se restrinja meramente à dimensão lúdica. É essencial evitar que os alunos se concentrem exclusivamente na dinâmica do jogo, com a negligência a compreensão dos conceitos matemáticos subjacentes. Esta escolha metodológica se justifica pela escassez de um repertório consolidado de práticas no contexto educacional, especialmente no que tange à elaboração de um jogo de *Roleplaying Game* (RPG) em formato de livro-jogo.

2.3. MICROGNÉTICA E ANÁLISE DO DISCURSO

Após a experimentação e implementação da proposta, será necessário conduzir o tratamento e análise dos dados para validar a proposta de Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, destinado a alunos do ensino médio, com vista a consolidar conteúdos relacionados a Função Exponencial. Esse processo envolverá a investigação dos indícios de aprendizagem do aluno diante a aplicação do Livro-Jogo e das intervenções orais do professor. Para isso, optei por utilizar a análise microgenética e análise do discurso como ferramentas metodológicas para realizar esse tratamento e análise.

A abordagem metodológica da análise microgenética consiste em uma análise que integra campos da educação e da psicologia, visando investigar processos em contextos educativos, sendo a abordagem exclusiva ou com a articulação com outros procedimentos para compor, por exemplo, um estudo de caso ou uma pesquisa participante. Com o aporte de Goés (2000) é definida esta abordagem metodológica da seguinte forma:

> De um modo geral, trata-se de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos. (Goés, 2000, pp. 9-10).

Essa abordagem, segundo a autora, fundamenta-se nas proposições de Vygotsky sobre o funcionamento humano. Dentre as diretrizes metodológicas exploradas por ele, inclui a análise minuciosa de um processo, com o intuito de compreender sua origem social e as transformações ao longo do tempo. Essa perspectiva investigativa foi denominada por seus seguidores como "análise microgenética".

Essa abordagem envolve um acompanhamento detalhado da formação de um processo, por meio do registro das ações dos sujeitos e as interações entre eles. Geralmente, essa observação se limita a uma ou poucas sessões, seja em configurações experimentais planejadas ou em segmentos interativos breves em ambientes naturais. É essencialmente um tipo de estudo que busca capturar a evolução das ações dos participantes e a transição do funcionamento intersubjetivo para o intrassubjetivo. Por esse motivo, é comum que essa abordagem esteja

intimamente ligada ao uso de videogravação, exigindo habilidades para filmagem e transcrição minuciosa das interações (Goés, 2000).

Contudo Goes ressalta que:

> [...] essa análise não é *micro* porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura. É genética, como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais. (Goés, 2000)

Nos termos desta pesquisa esta abordagem permitirá construir segmentos que possam evidenciar a consolidação de conteúdos relacionados a Função Exponencial em meio a manipulação do Livro-Jogo pelo aluno e das intervenções entre o aluno e o professor. Pois como Goés (2000) sugere, nesta análise é orientada para:

> minúcias, detalhes e ocorrências residuais, como indícios, pistas, signos de aspectos relevantes de um processo em curso; que elege episódios típicos ou atípicos (não apenas situações prototípicas) que permitem interpretar o fenômeno de interesse (Goés, 2000, p. 21).

Dentre as vertentes da análise microgenética, a utilizada no pressente trabalho, a qual também é dada ênfase por Goes (2000), trata da perspectiva enunciado-descritiva, que é composta pelo estudo da análise microgenética em conjunto as contribuições da análise do discurso. Visto que os seguimentos serão obtidos e construídos por meio dos restritos da oralidade e da linguagem dos alunos no momento de validação, para tanto, necessitei me aportar em Mortimer e Scott (2002) para realizar a análise do discurso em cada recorte a ser estudado.

Mortimer e Scott (2002) apresentam uma ferramenta para analisar a forma como os professores podem agir para guiar as interações dos alunos em sala, e estas que irão resultar na construção de significados. Esta estrutura analítica é baseada em cinco aspectos interrelacionados, que focalizam o papel do professor durante o processo, e a qual Silva (2020) sintetiza de forma objetivas os principais elementos da ferramenta de Mortimer e Scott (2002), como o que pode ser observado no quadro abaixo.

Quadro 4 – Estrutura da Análise do Discurso

Aspectos		
Focos no ensino	**Intenções do professor**	O professor necessita ter ciência de quais serão ou quais foram as intenções e foco durante a atividade. Como: - Engajar os estudantes, intelectual e emocionalmente; - Elicitar e explorar as visões e entendimentos dos estudantes sobre ideias e fenômenos específicos. - Dar oportunidades aos estudantes de falar e pensar com as novas ideias científicas, em pequenos grupos e por meio de atividades com a classe; - Dar suporte aos estudantes para aplicar as ideias científicas ensinadas a uma variedade de contextos e transferir aos estudantes controle e responsabilidade pelo uso dessas ideias; -Prover comentários sobre o desenrolar da 'estória científica', de modo a ajudar os estudantes a seguir seu desenvolvimento e a entender suas relações com o currículo de ciências como um todo.
	Conteúdo	Os conteúdos nas aulas podem ser categorizados em: -**Descrição**: envolve enunciados que se referem a um sistema, objeto ou fenômeno, em termos de seus constituintes ou dos deslocamentos espaço-temporais desses constituintes. -**Explicação**: envolve importar algum modelo teórico ou mecanismo para se referir a um fenômeno ou sistema específico. -**Generalização**: envolve elaborar descrições ou explicações que são independentes de um contexto específico.
Abordagem	**Abordagem comunicativa**	A 'abordagem comunicativa' trata-se da natureza de como o professor interage com os alunos, a qual pode se caracterizar em 4 tipos: -**Interativo/dialógico**: professor e estudantes exploram ideias, formularam perguntas autênticas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista. -**Não-interativo/dialógico**: professor reconsidera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças. -**Interativo/de autoridade**: professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma sequência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. -**Não-interativo/ de autoridade**: professor apresenta um ponto de vista específico
Ações	**Padrões de ação**	São os padrões de interações que emergem na medida em que professor e alunos alternam turnos de fala na sala de aula: Tipos: **I-R-A**: Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação do professor; **I-R-P-R-P**: Iniciação do professor, Resposta do aluno, P uma ação discursiva de permitir o prosseguimento da fala do aluno; **I-R-F-R-F**: Iniciação do professor, Resposta do aluno, F um *feedback* para que o aluno elabore um pouco mais sua fala.
	Intervenções do professor	São os tipos de intervenção do professor durante a atividade: -**Introduz** um termo novo; parafraseia uma resposta do estudante; mostra a diferença entre dois significados. -**Considera** a resposta do estudante na sua fala; -**Repete** um enunciado; pede aos estudantes que repita um enunciado; estabelece uma sequência I-R-A com um estudante para confirmar uma idéia; usa um tom de voz particular para realçar certas partes do enunciado -**Repete** a idéia de um estudante para toda a classe; pede a um estudante que repita um enunciado para a classe; compartilha resultados dos diferentes grupos com toda a classe; pede aos estudantes que organizem suas idéias ou dados de experimentos para relatarem para toda a classe. -**Pede** a um estudante que explique melhor sua idéia; solicita aos estudantes que escrevam suas explicações; verifica se há consenso da classe sobre determinados significados. -**Sintetiza** os resultados de um experimento particular; recapitula as atividades de uma aula anterior; revê o progresso no desenvolvimento da estória científica até então.

Fonte: Adaptado Silva (2020).

Essa estrutura orienta a utilização da análise do discurso em harmonia com os elementos da análise microgenética, na busca de compreender como a aplicação do livro-jogo possibilita guiar os alunos na construção de significados e promove a aprendizagem dos conteúdos de função exponencial. A partir dessas metodologias, visa-se obter uma visão dos processos de aprendizagem, com destaque a importância da mediação do professor e da participação ativa dos alunos. Com isso, torna-se possível identificar indícios claros de consolidação dos conteúdos matemáticos, avaliando, assim, a eficácia do livro-jogo para este fim.

2.4. CORRELAÇÃO ENTRE OS APORTES

Os aportes teóricos adotados ao longo deste capítulo foram estrategicamente definidos, cada qual com um papel específico, e convergem para o objetivo geral desta pesquisa: Elaborar um Livro-Jogo, uma variante do *Roleplaying Game*, destinado a alunos do ensino médio, com o intuito de consolidar conteúdos de função exponencial. O quadro a seguir sintetiza como os aportes teóricos de minha pesquisa podem ser articulados afim de estruturar e analisar o livro-jogo.

Quadro 5 - Correlação TSD x Jogos x Análise do Discurso.

Situações da TSD	Momentos do Jogo	Abordagem comunicativa	Correlação
Situação de ação	1°- Familiarização com o material do jogo	Interativo/dialógico	Exploração inicial do jogo e reconhecimento das regras; Momento em que os alunos engajarão no jogo por si só, Reflexão e simulação das tentativas para o desenvolvimentos de estratégias com o objetivo de vencer o jogo;
	2° - Reconhecimento das regras		
	3° - O “Jogo pelo jogo”: jogar para garantir regras		
Situação de formulação	4° - Intervenção pedagógica verbal	Interativo/dialógico	Momento de troca de informação entre o aluno e o jogo; Sistematização de processos para resolver os problemas do jogo; O aluno expressa suas estratégias e/ou resoluções, por meio da linguagem oral e/ou escrita;
	5° - Registro do jogo		
	6° - Intervenção escrita		

Situação de validação	7° - Jogar com “competência”	Interativo/dialógico Interativo/de autoridade	Validação das estratégias e resoluções aos problemas e desafios do jogo; Amplia a compreensão do jogo sob diferentes perspectivas que podem não ter sido inicialmente consideradas;
Situação de institucionalização		Não-interativo/de autoridade	Momento em que os alunos destinam a promover o sentido e dão significado ao saber elaborado. E cabe ao professor institucionalizar a tarefa, formalizar e generalizar os conceitos pretendidos;

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A estratégia adotada para o uso destes aportes segue a intenção de utilizar os fundamentos da Teoria das Situações Didáticas, aliados às contribuições de Grando (1995, 2000) sobre o uso de jogos no ensino de matemática, para orientar a elaboração do Livro-Jogo. Além disso, a Análise Microgenética e a Análise do Discurso foram adotadas para identificar indícios de consolidação dos conteúdos matemáticos, permitindo avaliar a eficácia do Livro-Jogo nesse contexto. Dessa forma, a versão final do Livro-Jogo apresentada ao término deste trabalho foi estruturada e analisada com base nos critérios metodológicos estabelecidos ao longo deste capítulo.

Nos capítulos subsequentes, disserta-se sobre o percurso metodológico que fundamentou a escolha do uso de jogos em conjunto do conteúdo de Função Exponencial. Para tanto, investiga-se como os documentos oficiais norteiam o ensino de matemática e, em seguida, analisa-se o que dissertações e teses recentes destacam como elementos essenciais ao processo de aprendizagem da Função Exponencial.

Realiza-se, então, uma análise comparativa com o intuito de verificar se os livros didáticos adotados contemplam tais elementos. Diante das lacunas identificadas, o Roleplaying Game é apresentado como uma proposta de recurso pedagógico capaz de suprir as carências observadas, configurando-se como uma alternativa para consolidar o ensino do referido conteúdo.

3. SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo, aborda o Ensino da Função Exponencial, em vista a elaboração de atividades que consolidem os conteúdos relacionados a este objeto matemático. Inicia-se com uma revisão de literatura sobre documentos oficiais para o Ensino Médio, para entender como estes norteiam o ensino com foco na disciplina de Matemática. Em seguida, realizou-se uma revisão de dissertações relacionadas ao ensino da Função Exponencial, afim de identificar as tendências e métodos adotados pelos pesquisadores e verificar sua adequação às diretrizes oficiais. Por fim, é apresentada uma análise de três livros didáticos, com o intuito de examinar como esses materiais introduzem a função exponencial, avaliar sua conformidade com as orientações oficiais e verificar se incluem elementos apontados pelas dissertações sobre o ensino desse conteúdo.

3.1. A FUNÇÃO EXPONENCIAL EM DOCUMENTOS OFICIAIS

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), em seu Art. 35, estabelece que o Ensino Médio é a etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos. Como continuidade do ensino fundamental, o Ensino Médio apresenta a característica de terminalidade, tem por finalidade proporcionar aos cidadãos a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores. Além disso, deve possibilitar o prosseguimento dos estudos, preparar o educando para o trabalho e o exercício da cidadania, promover a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico, e permitir a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, integrando teoria e prática no ensino de cada disciplina (Brasil, 2017).

Para a efetivação desse propósito, o documento destaca a necessidade de que os currículos do Ensino Médio sejam concebidos de forma a considerar a formação integral do aluno. Esse enfoque deve contemplar a construção do projeto de vida do estudante e sua formação nos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais.

Ao analisar a Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para o ensino médio, o documento em consonância com a LDB, define que o ensino médio em todas as suas modalidades de ensino e as suas formas de organização e oferta, deve ser orientado

com base seguintes princípios específicos, como:

> I. formação integral do estudante, expressa por valores, aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais;
> II. pesquisa como prática pedagógica para inovação, criação e construção de novos conhecimentos;
> III. compreensão da diversidade e realidade dos sujeitos, das formas de produção e de trabalho e das culturas;
> IV. Indissociabilidade entre teoria e prática no processo de ensino-aprendizagem. (Brasil, 2018b).

Com base nesses princípios, as DCNs para o Ensino Médio estabelecem que o currículo deve incorporar um tratamento metodológico que evidencie a contextualização, a diversificação e a transdisciplinaridade, além de outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos. Este enfoque deve incluir vivências práticas e vincular a educação escolar ao mundo do trabalho e à prática social, permitindo, assim, o aproveitamento de estudos e o reconhecimento de saberes adquiridos nas experiências pessoais, sociais e profissionais dos estudantes.

Assim, é notável a preocupação destes documentos em promover um ensino em definir o processo de ensino que não se concentre apenas no conteúdo a ser ensinado, mas que também objetive desenvolver nos alunos habilidades relacionadas a processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas. O ensino deve então, promover condições para a inserção do estudante num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional.

No âmbito da disciplina de matemática, esta perspectiva de ensino, que visa formar estudantes capazes de investigar, construir e resolver problemas, é evidenciada em documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Nos PCNs para o Ensino Médio, o ensino da Matemática assume três papéis principais: um caráter formativo que contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico, raciocínio lógico e capacidade de resolver problemas; um caráter instrumental que fornece um conjunto de técnicas e estratégias aplicáveis a outras áreas do conhecimento e à atividade profissional; e uma visão da Matemática como ciência, sendo vista como uma disciplina com suas características estruturais específicas.

Esses papéis culminam em uma abordagem da Matemática no Ensino Médio, que permite aos alunos ampliar e desenvolver os conhecimentos adquiridos durante o Ensino Fundamental. Os alunos devem, portanto, ser capacitados a utilizar essas habilidades de maneira mais ampla, incluindo a abstração, o raciocínio lógico, a resolução de problemas variados, a investigação, a análise e a compreensão de conceitos matemáticos, bem como a interpretação da realidade (Brasil, 1999).

Para promover esse tipo de aprendizagem, a BNCC propõe a utilização de diversos recursos didáticos como um dos caminhos a serem seguidos para assegurar uma aprendizagem matemática eficaz. Entre esses recursos estão malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, que desempenham um papel essencial na compreensão e utilização das noções matemáticas. No entanto, esses materiais devem estar integrados a situações que incentivem a reflexão e a sistematização, permitindo, assim, o início de um processo de formalização (Brasil, 2018a).

Entre os conteúdos matemáticos abordados no ensino médio, o tópico de Funções é particularmente destacado, especialmente durante essa etapa de ensino, visto a presença em 15 das 43 habilidades distribuídas entre as 4 das 5 competências específicas de matemática voltadas ao Ensino Médio. Esse destaque se deve ao fato de que esse conteúdo permite não apenas a investigação e construção de modelos capazes de representar diversos fenômenos presentes na realidade do aluno, mas também desenvolve a capacidade de resolver problemas. Além disso, o estudo de Funções possibilita o uso de recursos didáticos na exploração de seus tópicos.

O autor ainda destaca que, muitas vezes, o ensino das funções se baseia na resolução de equações e cálculos que estão desvinculados das orientações presentes nos documentos oficiais. Portanto, busca-se verificar o que os estudos, Teses e Dissertações, dissertam sobre o porquê e como conciliar o ensino de funções com as orientações de documentos oficiais.

3.2. REVISÃO DA LITERATURA DO ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para a realização do processo de levantamento bibliográfico para realizar a revisão de literatura no que se refere ao ensino da Função Exponencial, realizou-se uma pesquisa nas plataformas digitais, Portal de Periódicos CAPES (Banco de

Dissertações e Teses), e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Para a realização da busca nas plataformas selecionadas é necessário a seleção de palavras-chave para o filtro de quais serão as pesquisas serão exibidas, visto que o tipo de busca nas plataformas selecionadas é do tipo busca automática, que tem como opção de verificar no escopo todo corpo do texto a presença das palavras selecionadas, no qual em ambas plataformas foram utilizadas as seguintes palavras-chave: “ensino”, “função exponencial”. Além disso as plataformas disponibilizam filtros de seleção dos anos de defesa dos estudos de interesse a qual foi utilizado para serem retornados somente estudos dos anos entre 2020 e 2024.

E para a seleção dos estudos, o processo foi divido em três etapas. Na primeira etapa foi realizada uma busca nas plataformas de acordo com a estratégia definida acima, primeiramente no Catálogo de Teses e Dissertações do Portal CAPES, e depois na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

No referente a realização do primeiro no Catálogo de Teses e Dissertações do Portal CAPES a partir disso, dos 19 estudos retornados após a busca automática com o uso das palavras-chave e do filtro para a seleção dos anos de interesse. Em relação ao mapeamento inicial na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), resultou no retorno de 10 estudos. Assim com um total de 29 estudos, sem nenhuma exclusão prévio por conta da não relevância para as questões investigadas.

Em seguida, definiu-se os critérios de inclusão e exclusão para a identificação dos trabalhos a serem analisados, por meio da leitura do resumo e conclusão, para extração dos dados. Para tal, elegeu-se os seguintes critérios:

- **Critério de Inclusão:** Teses e Dissertações completas em português ou inglês que estejam disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações – CAPES e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD);
- **Critérios de Exclusão:**

  E1: Não abordar sobre função exponencial como foco;

  E2: Não estar diretamente relacionado com o ensino de matemática;

  E3: Estudos similares, repetidos e duplicados;

Com base, nestes critérios ao final da análise, foram incluídos ao final 20 estudos foram incluídos, como mostra a tabela abaixo:

Quadro 6 - Processo de seleção

Sistema de Busca	Estudos retornados	Excluídos			Incluídos
		Não aborda função exponencial	Não relacionado ao ensino de Matemática	Repetidos/duplicados	
Portal CAPES	**19**	**1**	**0**	**0**	**18**
BDTD	**10**	**5**	**0**	**4**	**1**
Total	**29**	**6**	**0**	**4**	**20**

Fonte: Autor (2024).

Por fim, os estudos incluídos foram documentados, assim cada estudo primário foi lido na busca de trabalhos que apresentam o mesmo objeto matemático da pesquisa, com a intenção de observar algumas metodologias da educação matemática estão em destaque nos trabalhos observados, além de verificar trabalhos que investiguem como trabalhar funções exponenciais integrado as diretrizes oficiais. Nesse sentido foram selecionados, cinco trabalhos dos vinte pré-incluídos, sendo os seguintes trabalhos que serão a base teórica para a discussão da presente pesquisa.

Quadro 7 - Sínteses das pesquisas escolhidas para estudo

TÍTULO	AUTOR	ANO	TIPO
O Ensino de Funções Exponenciais no Novo Ensino Médio: Aspectos Legais, Análise de Livros Didáticos e a Visão de Professores de Matemática	Genaldo Gomes Ferreira	2023	Dissertação
Potencialidades do uso do celular na matemática escolar: atividades investigativas de função exponencial	Dielle Cruz da Costa	2023	Dissertação
Um Estudo Sobre a Função Exponencial: Propostas De Atividades Lúdicas	Sebastiao da Silva Lima Junior	2022	Dissertação
Função Exponencial: Uma abordagem guiada pela BNCC	Atilio Vieira Costa	2021	Dissertação
Modelagem Matemática Aliada à Experimentação no Ensino de Funções Exponenciais	Silvana Emer	2020	Dissertação

Fonte: Autor (2024).

3.2.1. Sobre a dissertação de Ferreira (2023)

A dissertação de Ferreira (2023) cujo título é "*O Ensino de Funções Exponenciais no Novo Ensino Médio: Aspectos Legais, Análise de Livros Didáticos e a Visão de Professores de Matemática*", no qual o autor teve por objetivo investigar o ensino de funções exponenciais de acordo com as diretrizes educacionais oficiais decorrentes da Nova Base Curricular Comum Brasileira e da recente Reforma do Ensino Médio no Brasil.

O trabalho inicia com uma abordagem do autor, na introdução, sobre a problemática relacionada à recente implementação de novas diretrizes nacionais para a educação, com ênfase no Novo Ensino Médio. Nesse contexto, o autor busca analisar o ensino de funções exponenciais à luz das orientações dessa nova estrutura educacional. Em seguida, o texto apresenta um resumo da divisão dos seis capítulos que compõem a dissertação.

O estudo começa com uma análise de dois bancos de teses e dissertações: o do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e o do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEDMAT, 2022) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). A partir dos resultados dessa pesquisa, o autor destacou dissertações de mestrado que abordam funções exponenciais, as quais passaram a compor o referencial bibliográfico da dissertação.

Dentre as dissertações citadas, destaca-se a de Gomes (2023), em que o autor analisa livros didáticos e a forma como apresentam as funções, utilizando a teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval. Esse enfoque se assemelha ao que Ferreira (2023) também pretende realizar, porém sob a perspectiva das diretrizes do Novo Ensino Médio.

O autor faz um breve histórico dos livros didáticos no Brasil, com menção às origens do Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) e ressalta a importância do livro didático no contexto das escolas públicas. E, com base na fundamentação teórica sobre o Novo Ensino Médio, a BNCC e o Currículo de Referência de Minas Gerais, o autor realiza a análise de três livros didáticos, adotados pelas três escolas estaduais do município de Itabirito, em Minas Gerais.

A análise dos livros é bem estruturada e organizada, com a descrição dos autores, informações gerais sobre os livros e a exploração da seção dedicada à função exponencial. O autor ressalta que a resolução de problemas é a principal estratégia adotada pelos autores dos três livros para introduzir o tema. No entanto, um dos pontos destacados é que muitos dos problemas se baseiam em "semirrealidades", ou seja, situações que combinam elementos de uma realidade construída, que podem ou não estar próximos do cotidiano dos alunos. E também, outras considerações levantas pelo autor são que os livros apresentam atividades resolvidas com o uso da tecnologia e atividades relacionadas ao ENEM e vestibulares.

Além de analisar a configuração dos livros diante do Novo Ensino Médio, o autor também investigou a percepção dos professores em relação a essa nova

abordagem. Para isso, aplicou um questionário a sete professores de matemática que atuam no primeiro ano do ensino médio em Itabirito, MG.

O autor apresentou o questionário, detalhou o processo de aplicação e analisou os dados obtidos. Entre as conclusões, observou-se uma maior contextualização dos conteúdos nos livros. Contudo, em relação ao uso de tecnologias, incentivado pelo Novo Ensino Médio, os professores não se sentem preparados para aplicar essa metodologia, e as escolas ainda não possuem infraestrutura adequada. Outros aspectos, como a redução da carga horária por turma, que obriga os professores a assumirem mais turmas, além do elevado número de alunos por sala, são apontados pelo autor como fatores que tornam a demanda de aulas desgastante aos docentes.

Dessa forma, o trabalho oferece uma análise essencial das diretrizes do Novo Ensino Médio, alinhadas com documentos como a BNCC. O autor investiga tanto a adaptação dos livros didáticos a essas novas diretrizes quanto a percepção dos professores sobre as mudanças, o que evidencia o esforço em avaliar o ensino de Funções Exponenciais nesse novo contexto educacional.

De maneira geral, a dissertação analisada neste tópico se aproxima do que propomos em um momento posterior deste capítulo, uma vez que também envolve a análise de livros didáticos. Assim, oferece uma perspectiva sobre uma ótica diferente da que será desenvolvida neste trabalho.

Além disso, a dissertação contribui para a compreensão de como a integração das novas diretrizes, fundamentadas nas orientações vigentes, se concretiza na prática e como essas mudanças são recebidas pelos profissionais da educação, com base na situação observada na cidade de Itabirito, MG.

3.2.2. Sobre a dissertação de Costa (2023)

A dissertação do autor Costa (2023) de título “*Potencialidades do uso do celular na matemática escolar: Atividades investigativas de função exponencial*”, buscou responder a seguinte questão de pesquisa “Quais as potencialidades do uso do celular nos processos de ensino e aprendizagem da Função Exponencial?”, e para isso o autora teve por objetivo investigar as potencialidades do uso do celular no estudo da Função Exponencial no Ensino Médio.

Na apresentação deste trabalho, a autora refletiu sobre as motivações que a levaram a investigar o uso de tecnologias digitais, especialmente o celular, no ensino de matemática. Em seguida, descreveu a organização da dissertação. Além da apresentação inicial, o capítulo 2 detalha a metodologia de pesquisa adotada. Os capítulos seguintes consistem em artigos, cada um com sua própria introdução, metodologia, análise dos dados, resultados, considerações e referências.

A metodologia adotada no trabalho foi definido como de cunho qualitativo. Ademais, a atividade foi realizada em uma escola em forma de oficinas em um instituição pública localizada na cidade de Castanhal no Estado do Pará. A participação dos alunos se deu de forma voluntária, foram totalizados três encontros na oficina, em que os alunos exploraram o objeto de funções exponenciais por meio do software GeoGebra.

O primeiro artigo, intitulado “USO DO CELULAR NO ENSINO DE MATEMÁTICA: relato de uma experiência com Atividade Investigativa de Função Exponencial”, apresenta a experiência da autora ao aplicar uma oficina junto aos alunos, utilizando o software GeoGebra para realizar as atividades. A autora destacou que as maiores dificuldades surgiram nos primeiros encontros, fato atribuído à falta de familiaridade dos alunos com a abordagem de ensino utilizada. No entanto, a atividade possibilitou engajar os alunos no envolvimento com o tema e com os colegas, com a exploração das propriedades matemáticas e com a produção de conhecimento matemático de uma forma dinâmica, criativa e atrativa, além de favorecer a interação com a aprendizagem matemática e oferecendo praticidade.

No segundo artigo, intitulado "Elaboração de atividades investigativas de função exponencial com o GeoGebra no celular", a autora discute os elementos essenciais para a criação de atividades investigativas sobre Função Exponencial. Esses elementos incluem: a intencionalidade do professor na elaboração dos enunciados, visando proporcionar uma visão ampla da função estudada; a formulação de questões que envolvam conceitos e representações simbólicas diversas sobre a Função Exponencial; a adoção de uma perspectiva transdisciplinar que vá além das disciplinas escolares e explore situações reais vivenciadas pelos alunos; a integração de diferentes áreas da matemática sob uma perspectiva intradisciplinar; e o uso didático das tecnologias digitais, com o objetivo de explorar as propriedades da Função Exponencial através dos recursos interativos oferecidos pelo aplicativo GeoGebra.

Por fim, o terceiro artigo, cujo título é: Investigação De Função Exponencial E Covid-19 Com Geogebra No Smartphone. Debate sobre a construção do conhecimento de função exponencial por meio das tecnologias digitais e a relação com a Covid-19, que estava em vigor no momento de realização da oficina. Assim, com esta atividade foi a autora conclui por meio dos dados analisados, que a pesquisa realizada possibilitou a compreensão do conceito da Função Exponencial, bem como sua relação com o desenvolvimento da Covid-19, ou seja, é possível engajar os alunos no estudo de conteúdos matemáticos com a metodologia das investigações matemáticas com smartphone na sala de aula.

Em suma, esta dissertação explora diferentes perspectivas sobre o uso de tecnologias digitais, com destaque para o celular, no ensino de função exponencial. Um dos aspectos interessantes do trabalho é que, além de demonstrar as potencialidades do uso do celular, o artigo II oferece uma reflexão sobre a elaboração de atividades investigativas. Isso proporciona aos professores uma base sólida para desenvolverem suas próprias atividades.

Por fim destacamos o artigo III, visto que a autora utiliza o contexto da Covid-19 como tema central das atividades, o que se mostrou uma abordagem enriquecedora para os alunos. Estudar este tópico em um momento tão relevante, como apontado pela autora, “estimulou a dedicação dos alunos na realização das atividades, contribuindo para a compreensão dos conteúdos matemáticos.” (Costa, 2023, p. 103). Ou seja, em um momento de dificuldades a professora conseguiu moldar de forma que se pudesse tornar a aula enriquecedora aos alunos.

3.2.3. Sobre a dissertação de Junior (2022)

A dissertação de Junior (2022), intitulada de “*Um Estudo sobre a Função Exponencial: Propostas de Atividades Lúdicas*”, cujo o objetivo principal do autor foi fazer um estudo da função exponencial, propondo aos professores atividades lúdicas, a partir da utilização de jogos e histórias em quadrinhos, para serem aplicadas em sala de aula, como uma maneira estratégica para complementar e facilitar o entendimento desse conteúdo aos alunos do Ensino Médio.

Para tal, iniciou-se o trabalho com uma introdução bem fundamentada, no qual o autor justifica de funções exponenciais como seu objeto de estudo, visto este

conteúdo está presente em diversas situações do cotidiano, em destaque a situações de modelagem da transmissão da Covid-19. E em meio a esta situação deliciada, o autor notou a necessidade de buscar estratégias promover a aprendizagem da função exponencial, assim é proposto o uso de atividades lúdicas.

O autor apresentou de forma concisa a função exponencial, com destaque ao seu surgimento a partir de duas propriedades discutidas por matemático da época, sobre as quais o autor discorre detalhadamente. Esse contexto histórico permite compreender as problemáticas que levaram à criação desse tipo de função. Em seguida, é traçado um paralelo com a pandemia de Covid-19, demonstrando como o conhecimento da taxa de transmissibilidade pode ser modelado como uma função exponencial. Tal exemplo pode servir como uma problematização cotidiana, tornando o ensino da função exponencial mais significativo para os alunos.

Com o objetivo de aprofundar seu conhecimento sobre a função exponencial o autor desenvolveu um capítulo destinado apresentar a definição, propriedades, características e como se comporta o gráfico de uma função exponencial. Assim, nesta secção do trabalho, tratou-se de um texto matemático destinado a compreender melhor o objeto matemático, e formas de aplicação deste. E de forma complementar foi realizado outro estudo sobre a função exponencial, desta vez relacionado a como este conteúdo é abordado em documentos curriculares oficiais e em teses/dissertações.

Com base nesta revisão teórica, o autor apresenta as propostas de atividades lúdicas desenvolvidas na pesquisa. Foram elaboradas quatro sequências didáticas: três integrando jogos adaptados pelo autor e uma utilizando histórias em quadrinhos também criadas por ele. As atividades foram bem elaboradas, e não é necessário apresentá-las de forma sequencial, o que permite ao professor leitor escolher qualquer uma das atividades para trabalhar em sala de aula.

Além disso, o autor conclui o capítulo sobre atividades lúdicas com um importante alerta aos professores. Embora tais atividades sejam eficazes no processo de ensino e aprendizagem, por facilitar as interações entre professor e aluno e promovendo a socialização entre os próprios alunos, é crucial que o professor realize uma mediação eficiente. Os alunos precisam compreender que essas atividades não se limitam a meras brincadeiras, mas fazem parte de um processo de aprendizado mais profundo.

Assim, este trabalho disserta sobre como o uso de atividades lúdicas possui potencialidades quando voltado ao ensino de função exponencial. Tal abordagem está totalmente condizente ao que fora apontado da BNCC na secção anterior, ao integrar o uso de recursos didáticos (as atividades lúdicas) a a situações que incentivem a reflexão e a sistematização (como o contexto da Covid-19).

As atividades desenvolvidas podem ser utilizadas e diversas etapas durante o processo de ensino de função exponencial, o que dá ao leitor uma gama de possibilidades em como utilizar estas atividades em sala. Contudo, no trabalho não é mostrado se foram realizadas aplicações destas atividades para valida-las, impede a verificação do real potencial dessas atividades.

Em resumo, esta dissertação possibilitou verificar algumas propostas que demostram importância de tornar o aluno uma peça central no próprio processo de ensino, além de fomentar a troca de ideias e promover a socialização entre os alunos, contribuindo para um ambiente de aprendizagem mais colaborativo.

3.2.4. Sobre a dissertação de Costa (2021)

A dissertação de Costa (2021) intitulada de "*Função Exponencial: Uma abordagem guiada pela BNCC*", destaco a relevância deste trabalho para a presente pesquisa desenvolver o tema função exponencial com uma abordagem guiada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ou seja, a partir dele é possível compreender como desenvolver um trabalho com este objeto matemático, com base as orientações de documentos oficiais.

A dissertação se inicia com a introdução, em que o autor detalha os objetivos gerais do trabalho "Conhecer a BNCC" e "Apresentar características e propriedades da função exponencial". Seguido de uma apresentação e resumo sobre a divisão dos quatro capítulos que compõem a dissertação.

O autor, inicialmente, propôs uma apresentação sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), abordando sua definição, os marcos legais e os fundamentos pedagógicos que orientaram sua elaboração. Contudo, o foco principal recai sobre as competências matemáticas, em especial as habilidades associadas à função exponencial. O autor ressalta que o objetivo do trabalho é oferecer suporte ao desenvolvimento dessas habilidades aos alunos.

Em sequência, o autor dedica um capítulo ao objeto matemático da Função Exponencial, apresentando demonstrações de propriedades, proposições e teoremas que a caracterizam. O capítulo também inclui exemplos de aplicações da função exponencial e uma análise de gráficos, culminando com a demonstração de que a função logarítmica é a inversa da função exponencial.

Com base nos dois capítulos anteriores, o autor integrou as habilidades que a BNCC visa desenvolver nos alunos do ensino médio com os fundamentos matemáticos da função exponencial, o que resultou em atividades orientadas pela base curricular. Nesse contexto, o autor seleciona algumas habilidades e elabora situações-problema correspondentes, totalizando seis problemas.

Em seguida, são propostas atividades lúdicas voltadas ao desenvolvimento de habilidades relacionadas à função exponencial, conforme descritas na BNCC. Duas das atividades abordam a habilidade EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais que demandem a compreensão e interpretação da variação das grandezas envolvidas, em contextos como Matemática Financeira, entre outros. A terceira atividade, além da habilidade EM13MAT304, contempla também a habilidade EM13MAT508: Identificar e associar progressões geométricas a funções exponenciais de domínios discretos, para a análise de propriedades, dedução de fórmulas e resolução de problemas.

As atividades propostas são bem estruturadas e organizadas para modelar funções exponenciais com base em experimentos. Para isso, os alunos exploram situações de caráter exponencial e, a partir do registro das observações e coleta de dados, interpretam a situação e modelam a função que melhor representa o experimento. Com o auxílio do software Geogebra, eles também visualizam a representação gráfica dos dados coletados. Com isso, estão consoantes ao requerido pela habilidade EM13MAT304.

O trabalho oferece uma abordagem interessante ao criar situações-problema e atividades lúdicas centradas na função exponencial, alinhadas com as habilidades que a BNCC visa desenvolver nos alunos. Dessa forma, além de proporcionar experiências práticas para os estudantes, o trabalho também serve como um recurso valioso para ajudar outros professores e pesquisadores a conhecerem a BNCC e assim desenvolverem suas atividades de função exponencial com base nas diretrizes do documento.

Um elemento a qual o texto carece é de uma aplicação das atividades, contudo o autor destaca devido à situação de pandemia implicou na suspensão das aulas presenciais, por conta disso não foi possível a aplicação das atividade para se ter uma análise dos resultados nas escolas.

Em suma, a dissertação “Função Exponencial: Uma abordagem guiada pela BNCC”, possui uma contribuição em mostrar uma alternativa de como utilizar o ensino de funções exponenciais em paralelo as orientações dos documentos oficiais, no caso a BNCC. Assim pode guiar professores/pesquisadores em como realizar os seus trabalhos guiados pela Base, contudo carece em mostrar qual a implicação deste tipo de proposta no processo de ensino e aprendizagem.

3.2.5. Sobre a dissertação de Emer (2020)

A dissertação de Emer (2020), intitulada de “*Modelagem Matemática aliada à Experimentação no Ensino de Funções Exponenciais*” aborda uma prática pedagógica explorada à luz da Modelagem Matemática, sendo esta uma das diversas alternativas pedagógicas e didáticas que vem sendo trabalhando no ensino da matemática. O objetivo deste trabalho, foi identificar a contribuição da Modelagem Matemática aliada à experimentação no ensino da função exponencia, o que pode permitir ser verificada outro tipo de metodologia a ser aliada no ensino de função exponencial e suas potencialidades.

Na introdução, o autor reflete sobre sua prática pedagógica anterior, que se limitava à reprodução do método de ensino vigente. A partir do encontro com a Modelagem Matemática, o autor ressignificou sua abordagem pedagógica. Em seguida, ele apresenta os objetivos do trabalho, que visam identificar de forma geral a contribuição da Modelagem Matemática, aliada à experimentação, no ensino de função exponencial para turmas do 1º ano do Ensino Médio. A introdução finaliza com uma visão geral sobre a divisão dos cinco capítulos da dissertação.

O trabalho segue com uma fundamentação teórica bem estruturada, começando pela definição e aplicação da Modelagem Matemática, discutindo o que é, como aplicá-la e os desafios encontrados ao utilizá-la em sala de aula. Em seguida, aborda a importância de integrar a experimentação à modelagem. O capítulo continua com uma análise detalhada do conteúdo de funções exponenciais, incluindo

fenômenos que podem ser modelados por essa função, além de definições, elementos, características e propriedades. O autor também levanta a produção científica relacionada ao ensino de funções exponenciais.

E a partir dessa fundamentação, o autor desenvolveu a aplicação das ações realizadas. As experimentações realizadas foram a “Experimento-simulação da despoluição de um lago” e o “Processo de diluição de uma substância ácida em água, com medição do pH”, justificado por este ser uma problemática local. O professor no momento inicial apresentou aos alunos a proposta de modelagem matemática, e conforme as atividades foram sendo desenvolvidas o professor explicava os objetivos de cada experimentação e instigava os alunos a registrar as observações e desenvolver modelos.

Para a validação da proposta, o autor utilizou de observações, fotos, filmagens, por meio de questionários, relatórios e anotações no diário de bordo, e por meio da orientações da análise textual discursiva, o autor realizou a analise dos dados coletados. Com isso, o autor utilizou das produções e fala dos alunos para investigar a construção coletiva do modelo matemático.

Assim, este trabalho propõe uma abordagem em que a função exponencial é explorada a partir de uma problemática local dos alunos, permitindo que eles desenvolvam e analisem seus próprios modelos por meio da Modelagem Matemática. Um ponto interessante é que, durante a aplicação, o autor incentivou a colaboração e a interação entre os alunos, o que promoveu discussões tanto dentro dos grupos quanto entre eles, o que facilitou o processo de aprendizagem coletiva.

De modo geral, a dissertação apresenta uma proposta pedagógica inovadora e bem fundamentada para o ensino da função exponencial. Emer (2020), ao utilizar a Modelagem Matemática, promove a participação ativa dos alunos, transformando-os em construtores do conhecimento, incentivando a socialização e o debate. Os resultados da pesquisa evidenciaram que a experimentação e a Modelagem Matemática se complementam, esta integração potencializa o ensino da função exponencial e a construção coletiva de modelos matemáticos, assim despertam nos alunos um compromisso com a validação de modelos, resultados e com a ética profissional.

3.2.6. Considerações sobre as dissertações estudadas

Diante do exposto, inicialmente verificamos a necessidade de entender como este conteúdo pode ser trabalhado à luz dos documentos oficiais. Através do estudo de Ferreira (2023), percebemos que o livro didático oferece possibilidades para o professor desenvolver o conteúdo. No entanto, a contextualização, sempre destacada nas diretrizes do Novo Ensino Médio, ainda não atingiu plenamente seus objetivos. Esse fato reforça a necessidade de utilizar alternativas que promovam essa contextualização, além de superar o modelo tradicional em que o professor é o protagonista e o aluno, um mero espectador.

Já por meio do trabalho de Costa (2021), trouxe uma perspectiva de como desenvolver atividades que possam seguir as orientações da Base Nacional Comum curricular, por meio das relações entre competências e habilidades expressas na BNCC que auxiliam no desenvolvimento de determinados conteúdos como, por exemplo, o de função exponencial; além de apontar as tecnologias como um possível recurso auxiliador no processo de ensino.

Os referenciais de Costa (2023) e Emer (2020), mostraram que atividades permitem ao aluno explorar o conhecimento matemático a partir de situações problema, em que o aluno investigue, tome decisões, analise, crie e testes modelos matemáticos possuem grande potencial no ensino de função exponencial.

Ademais, Junior (2022) aponta a importância de utilizar atividades lúdicas que possibilitem ao professor uma autoavaliação sobre planejamento e metodologia de ensino aplicados sobre determinado conteúdo programático, além da promoção da socialização entre os alunos e a turma com o docente ao mesmo tempo que facilita a formação do conhecimento e da aprendizagem.

Para atender estes pontos levantados pelos autores, o presente trabalho busca elaborar um Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, destinado a alunos do ensino médio, com vistas a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial. Assim os referencias de Ferreira (2023) e Costa (2021), contribuem para o desenvolvimento desta proposta com base nas orientações oficiais.

Esta proposta, também, permite que alunos investiguem o conhecimento matemático das funções exponencias a partir de situações problema, assim como em Costa (2023) e Emer (2020). Isto ocorre, pois, como destacado posteriormente neste trabalho, a imersão gerada pela narrativa do o *Roleplaying Game* permite que os

jogadores investiguem e pratiquem a tomada de decisões em cenários adversos de forma segura.

Além de que o *Roleplaying Game*, por se tratar de um tipo de jogo, também possui potencialidades em relação ao lúdico, ou seja pode possuir tantas potencialidades quanto as atividades exploradas por Junior (2022). Como promover a interação entre os colegas, entre o aluno e o docente e facilitar a formação do conhecimento e a aprendizagem.

Dito isso, antes de dissertarmos sobre o Roleplaying Game no ensino de Função Exponencial, é necessário realizar um estudo a respeito dos livros didáticos que são necessários para o ensino de função exponencial, já que estes são importantes instrumentos no processo de ensino ao público-alvo desta pesquisa, os estudantes de escolas públicas.

3.3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL EM LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático é um recurso característico em sala de aula, utilizado pelo professor muitas vezes para estruturar os conteúdos ministrados no semestre, como um auxiliar ao ministrar a aula, entre outros usos. E o uso do livro não se limita ao professor, o livro em posse dos alunos permite que estes tenham como estudar de forma autônoma fora da escola, e até revisem os conteúdos ministrados.

A importância do livro didático para a educação pública brasileira é tanta que existe um programa chamado Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) dedicado à a avaliar os didáticos oferecidos pelas Editoras e a disponibilizar, não somente os livros didáticos, como outras obras e acervos, aos estudantes matriculados nas escolas públicas (Brasil, 2017). O investimento ao programa pelo governo federal, é tanta que, como o Ministério da Educação (MEC) destaca chegou a R$ 2,1 bilhões em 2024 (Brasil, 2024).

Amorim (2017), destaca que o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi criado através do Decreto Nº 91.542, de 19 de agosto de 1985, e em 1996 houve a primeira avaliação dos livros publicada pela primeira vez em um material do MEC intitulado Guia do PNLD. E de acordo com Bittencourt (2004), nesta avaliação vários livros até aquele momento, os mais vendidos aos governos estadual e federal, foram excluídos da listados aprovados por conta de erros conceituais.

E o programa continua a publicar o Guia do PNLD, a qual traz resenhas e informações acerca de cada uma das obras aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), apresentando análises, reflexões e orientações quanto ao conteúdo e estrutura das obras e suas potencialidades para a prática pedagógica para, assim, auxiliar na escolha da coleção a ser utilizada em sala, pelos professores.

O PNLD possibilita então que haja uma melhor qualidade nos livros didáticos que são disponibilizados em sala de aula. E o livro didático pode não ser o único recurso pedagógico a ser utilizado pelo professor, contudo como argumenta Lajolo (1996) ele é um elemento que pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado. Assim, percebe-se que realizar uma análise dos livros didáticos, é necessária para verificar se os conteúdos estão sendo trabalhados de forma correta.

Para ser desenvolvido a análise dos dados, foram realizadas pesquisas em três coleções de diferentes editoras e que estão presentes no Guia do PNLD 2021, edição do Guia a qual contém as obras didáticas específicas que foram elaboradas com base nas diretrizes da reforma do Ensino Médio. Dessa forma é possível analisar as formas com o qual o objeto matemático Função Exponencial está sendo trabalhado nas turmas de Ensino Médio, nos livros já adaptados as orientações dos documentos oficiais. Segue o quadro com as informações dos Livros Analisados:

Quadro 8 - Livros Analisados

Ordem	Coleção	Editora	Editor Responsável	Ano
Livro 1	Conexões Matemática e suas tecnologias: Funções e Aplicações	Editora Moderna	Fabio Martins de Leonardo	2020
Livro 2	Matemática em Contextos: Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequencias	Editora Ática	Luiz Roberto Dante e Fernando Viana	2020
Livro 3	Matemática Interligada: Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica	Editora Scipione	Thais Marcelle de Andrade	2020

Fonte: Autor (2024).

Ao realizar a análise dos livros mencionados, procuraremos identificar os capítulos o objeto matemático Função Exponencial é tratado. E a partir disso faremos a análise dos livros didáticos através de forma semelhante ao desenvolvido por Silva (2024) por meio da Metodologia de Masetti (2016), a qual resumimos a partir do quadro abaixo:

Quadro 9 - Critérios de análise de livros didático

Categorias	Subcategorias		Definição
Introdução	Introdução/Motivação		Analisar o tipo de situação de ensino que o autor propõe para introduzir/motivar o conteúdo;
	Exemplos – tarefas resolvidas		A forma com o qual o autor propõe exercícios e os resolve;
	Tarefas propostas	Conhecimentos prévios	Tarefas para revisão dos pré-requisitos, que se considerem necessários para promover a continuidade dos estudos;
		Conhecimentos emergentes	Tarefas em que são explorados os conhecimentos novos; Tipos: Representação Gráfica, Exploração, Manipulação, Conjecturar/Argumentar, Provar, Modelar e Resolução de Problemas.
Linguagem	Formal		Momentos em que o autor linguagem formal;
	Informal		Momentos em que o autor linguagem informal;
Conceitos	Explícitos ou Implícitos?		Os conceitos utilizados pelos autores são explícitos, caso o autor expõe os conceitos matemáticos de forma direta. E Implícitos caso exponha de forma indireta;
Proposições	Análise de como foram apresentadas as propriedades pelo livro didático.		A exposição foi formal, lógico dedutivo ou informal, lógico indutiva?
			As propriedades foram justificadas ou só as expuseram?
			Após a apresentação das propriedades, eles as utilizam em exercícios resolvidos ou só as expuseram como recordação de regras?
Procedimentos	Os autores sugerem maneiras diferentes de ser resolver um exercício		O Autor utiliza-se de vários procedimentos para se resolver as situações/tarefas ou apenas um em cada caso?
			Os procedimentos utilizados na resolução dos exercícios são justificados?
			Tecnologias são utilizadas?
Argumentação	Mostra utilidade no desenvolvimento		Utiliza uma prática discursiva baseada na linguagem verbal?
		Tipos de Prova	Método de demonstração matemática utilizada. Prova direta, prova por contraposição ou por absurdo.

Fonte: Adaptado de Silva (2024) e Masetti (2016).

Para exemplificar melhor os tipos de tarefas de conhecimentos emergentes, trazemos com base em Masetti (2016) as características de cada uma delas no quadro abaixo:

Quadro 10 - Caracterização dos Tipos de Tarefas

Tipos de tarefas	Caracterização
Representação Gráfica	São aquelas que o autor deve oferecer tarefas para que o aluno represente graficamente a função;
Exploração	As tarefas que buscam desenvolver o raciocínio, com o uso de conhecimentos prévios;
Manipulação	Caracteriza-se pelo cálculo algorítmico com ênfase na destreza, rotinização, sistematização e aplicação de regras e fórmulas, em que as situações propostas possuem uma única resposta correta;
Conjecturar/Argumentar	Buscam levar o aluno a prever um determinado resultado e apresentar uma justificativa lógica que sustente sua previsão;
Provar	Visam desenvolver no aluno a capacidade de argumentação necessária para justificar a validade de uma proposição ou de um procedimento.
Modelar	Baseadas na Tendência da Modelagem Matemática, em que os alunos necessita descobrir a expressão algébrica que melhor se adapta à situação descrita;
Resolução de Problemas	Baseadas na Tendência da Resolução de Problemas, no qual o autor apresenta problemas para serem resolvidos, assim promovem o desenvolvimento da a capacidade investigativa dos alunos.

Fonte: Elaborado com base em Masetti (2016).

Dessa forma, visto a importância que o livro didático apresenta para os professores de matemática, nesse sentido busca estudar como os objetos matemáticos são abordados e a forma como esse conteúdo é de fundamental importância. Com isso, realizou-se observações sobre a seção dos livros destinadas a função exponencial por meio de uma análise à luz dos procedimentos definidos por Masetti (2016) em conjunto ao aporte de Silva (2024).

3.3.1. Conexões Matemática e suas tecnologias: Funções e Aplicações – Editora Moderna

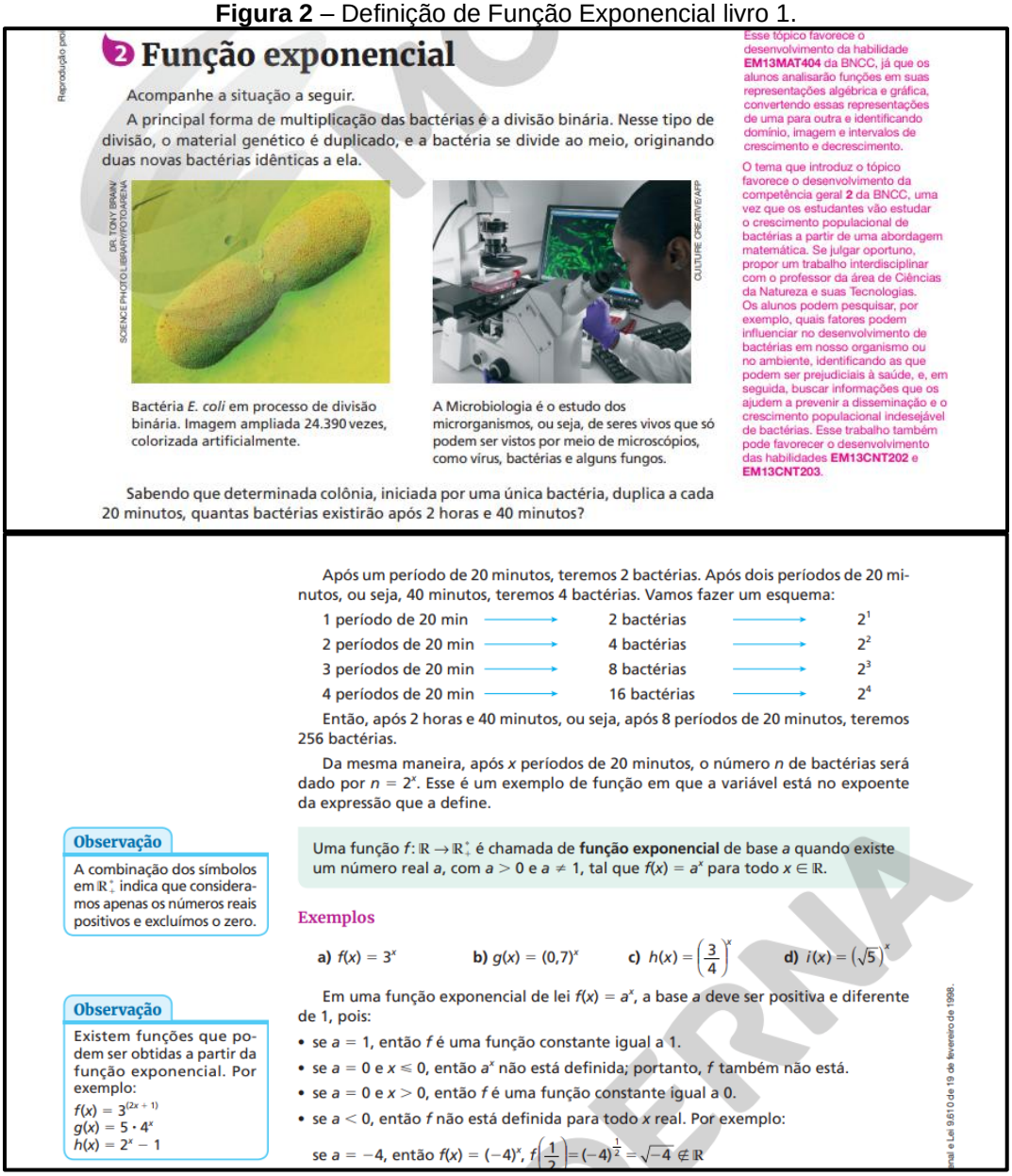
O livro didático Conexões Matemática e suas tecnologias publicado pela Editora Moderna, com editor responsável Fabio Martins de Leonardo Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo, foi publicado no ano de 2020, possui a obra completa em um total de seis volumes, sendo esta analisado focado no tópico de Funções e Aplicações. O livro possui uma secção destinada ao professor, que contem Pressupostos teórico-metodológicos da elaboração do livro, como a BNCC, além da organização e estrutura da obra e sugestões de consulta para o professor.

Os autores iniciam o assunto de Função exponencial no capítulo 3, através de um texto a qual trata do acidente de Césio-137 ocorrido em Goiânia, para que por meio do contexto da radioatividade e meia vida, introduzir a função exponencial,

sugerindo até o uso de uma planilha eletrônica para modelar o cálculo de uma situação problema de crescimento populacional.

Após isso, anterior a abordagem ao conteúdo de Funções Exponencias, os autores trabalham os conteúdos de potenciação com expoentes, naturais, inteiro negativo, racional e irracional, respetivamente, com sua definição e propriedades.

Figura 2 – Definição de Função Exponencial livro 1.



2 Função exponencial

Acompanhe a situação a seguir.

A principal forma de multiplicação das bactérias é a divisão binária. Nesse tipo de divisão, o material genético é duplicado, e a bactéria se divide ao meio, originando duas novas bactérias idênticas a ela.

Bactéria *E. coli* em processo de divisão binária. Imagem ampliada 24.390 vezes, colorizada artificialmente.

A Microbiologia é o estudo dos microrganismos, ou seja, de seres vivos que só podem ser vistos por meio de microscópios, como vírus, bactérias e alguns fungos.

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, já que os alunos analisarão funções em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento.

O tema que introduz o tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC, uma vez que os estudantes vão estudar o crescimento populacional de bactérias a partir de uma abordagem matemática. Se julgar oportuno, propor um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Os alunos podem pesquisar, por exemplo, quais fatores podem influenciar no desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente, identificando as que podem ser prejudiciais à saúde, e, em seguida, buscar informações que os ajudem a prevenir a disseminação e o crescimento populacional indesejável de bactérias. Esse trabalho também pode favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT202** e **EM13CNT203**.

Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, duplica a cada 20 minutos, quantas bactérias existirão após 2 horas e 40 minutos?

Após um período de 20 minutos, teremos 2 bactérias. Após dois períodos de 20 minutos, ou seja, 40 minutos, teremos 4 bactérias. Vamos fazer um esquema:

1 período de 20 min → 2 bactérias → 2^1
2 períodos de 20 min → 4 bactérias → 2^2
3 períodos de 20 min → 8 bactérias → 2^3
4 períodos de 20 min → 16 bactérias → 2^4

Então, após 2 horas e 40 minutos, ou seja, após 8 períodos de 20 minutos, teremos 256 bactérias.

Da mesma maneira, após x períodos de 20 minutos, o número n de bactérias será dado por $n = 2^x$. Esse é um exemplo de função em que a variável está no expoente da expressão que a define.

Observação
A combinação dos símbolos em $\mathbb{R}_+^*$ indica que consideramos apenas os números reais positivos e excluímos o zero.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é chamada de **função exponencial** de base a quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos

a) $f(x) = 3^x$ **b)** $g(x) = (0{,}7)^x$ **c)** $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **d)** $i(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$

Observação
Existem funções que podem ser obtidas a partir da função exponencial. Por exemplo:
$f(x) = 3^{(2x+1)}$
$g(x) = 5 \cdot 4^x$
$h(x) = 2^x - 1$

Em uma função exponencial de lei $f(x) = a^x$, a base a deve ser positiva e diferente de 1, pois:

- se $a = 1$, então f é uma função constante igual a 1.
- se $a = 0$ e $x \leqslant 0$, então a^x não está definida; portanto, f também não está.
- se $a = 0$ e $x > 0$, então f é uma função constante igual a 0.
- se $a < 0$, então f não está definida para todo x real. Por exemplo:

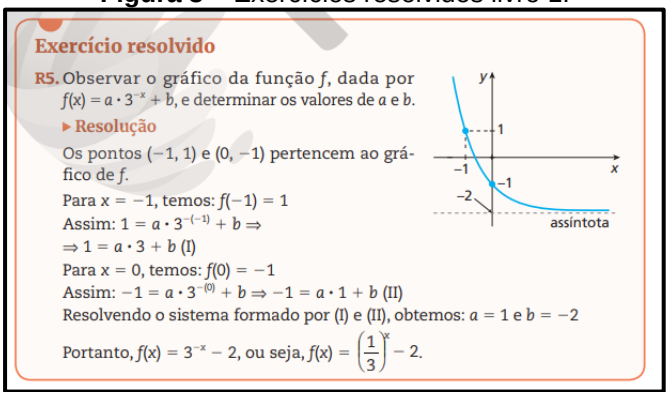
se $a = -4$, então $f(x) = (-4)^x$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

Fonte: Leonardo (2020, pp. 203-204).

Os autores, então utilizam de uma situação problema sobre multiplicação bacteriana como um contexto para que assim, seja definido a função exponencial, como mostrado na figura acima, assim realiza a definição de forma explicita. Após alguns exemplos de funções, o autor parte para trabalhar os gráficos da função.

Ao exemplificar os tipos de gráfico, o autor novamente pede para que os alunos montem um gráfico de uma função exponencial em um *software* de construção de gráficos, contudo sem especificar o *software* e como indicar o procedimento de como montar estes gráficos. E após isso, conceitua os casos de crescimento e decrescimento usando como exemplo das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(1/2\right)^x$. E com isso o autor apresenta um exercício resolvido de análise de um gráfico para determinar uma expressão.

Figura 3 – Exercícios resolvidos livro 1.



Exercício resolvido

R5. Observar o gráfico da função f, dada por $f(x) = a \cdot 3^{-x} + b$, e determinar os valores de a e b.

▸ **Resolução**

Os pontos $(-1, 1)$ e $(0, -1)$ pertencem ao gráfico de f.

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 1$

Assim: $1 = a \cdot 3^{-(-1)} + b \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = a \cdot 3 + b$ (I)

Para $x = 0$, temos: $f(0) = -1$

Assim: $-1 = a \cdot 3^{-(0)} + b \Rightarrow -1 = a \cdot 1 + b$ (II)

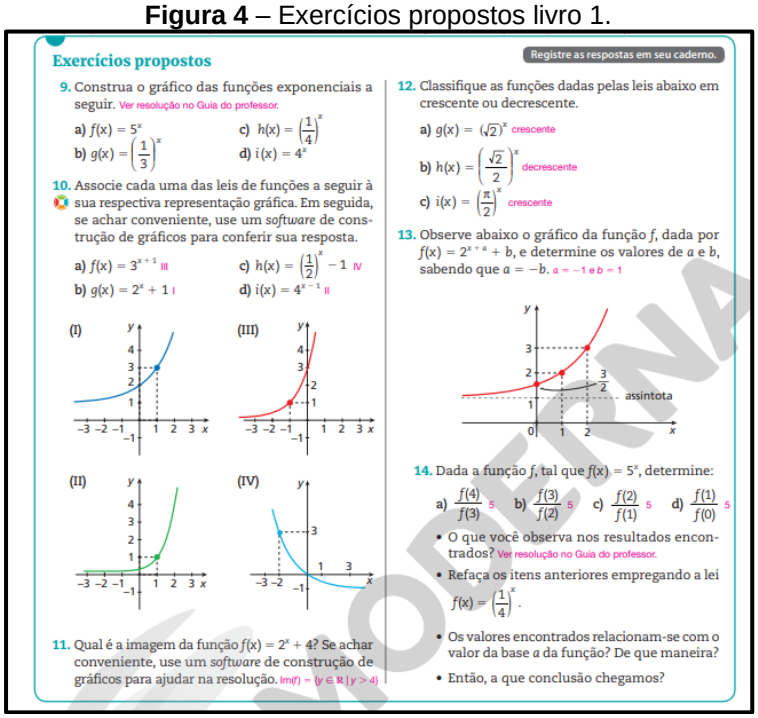
Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos: $a = 1$ e $b = -2$

Portanto, $f(x) = 3^{-x} - 2$, ou seja, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

Fonte: Leonardo (2020, pp. 203-204).

Assim se segue com uma página com cinco exercícios propostos de Conhecimentos emergentes, com as quatro primeiras questões do tipo de Representação Gráfica e uma questão de exploração.

Figura 4 – Exercícios propostos livro 1.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

9. Construa o gráfico das funções exponenciais a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $i(x) = 4^x$

10. Associe cada uma das leis de funções a seguir à sua respectiva representação gráfica. Em seguida, se achar conveniente, use um *software* de construção de gráficos para conferir sua resposta.

a) $f(x) = 3^{x+1}$ III

b) $g(x) = 2^x + 1$ I

c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ IV

d) $i(x) = 4^{x-1}$ II

(I) (III) (II) (IV)

11. Qual é a imagem da função $f(x) = 2^x + 4$? Se achar conveniente, use um *software* de construção de gráficos para ajudar na resolução. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$

12. Classifique as funções dadas pelas leis abaixo em crescente ou decrescente.

a) $g(x) = (\sqrt{2})^x$ crescente

b) $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ decrescente

c) $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$ crescente

13. Observe abaixo o gráfico da função f, dada por $f(x) = 2^{x+a} + b$, e determine os valores de a e b, sabendo que $a = -b$. $a = -1$ e $b = 1$

14. Dada a função f, tal que $f(x) = 5^x$, determine:

a) $\frac{f(4)}{f(3)}$ 5 b) $\frac{f(3)}{f(2)}$ 5 c) $\frac{f(2)}{f(1)}$ 5 d) $\frac{f(1)}{f(0)}$ 5

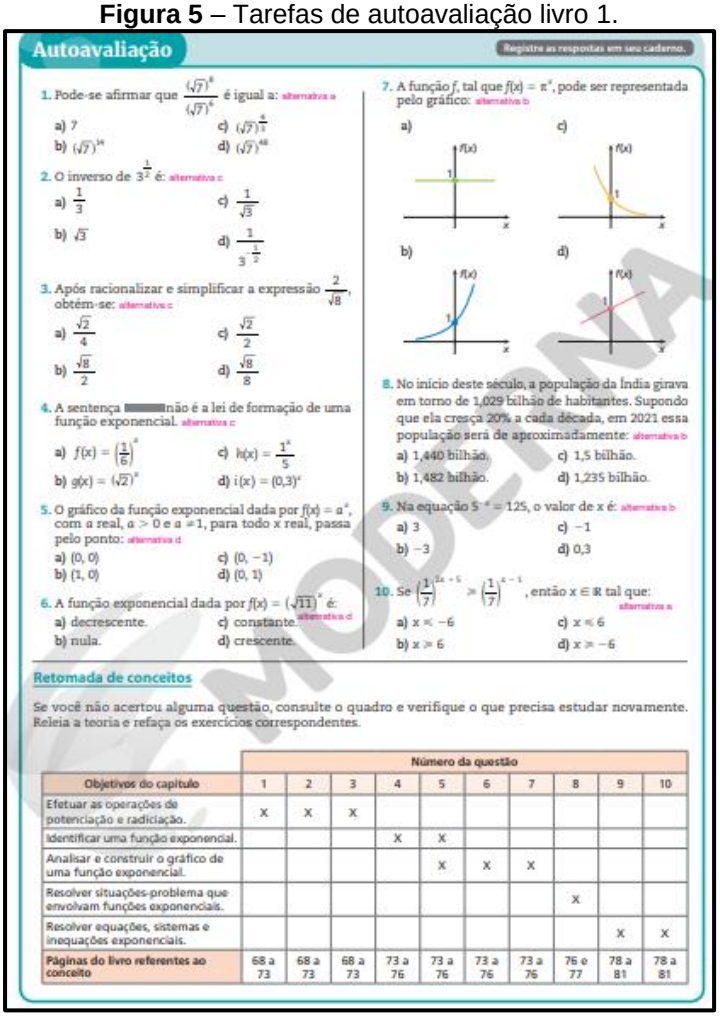
- O que você observa nos resultados encontrados? Ver resolução no Guia do professor.
- Refaça os itens anteriores empregando a lei $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor da base a da função? De que maneira?
- Então, a que conclusão chegamos?

Fonte: Leonardo (2020, p. 206)

Dessa forma os livro segue com as secções de Aplicações da função exponencial, Equações exponenciais e sistemas, e Inequações exponenciais, a qual seguem a mesma estrutura das seções anteriores, de conceituação e/ou apresentação de exemplos seguidos de exercícios propostos.

Na seção dedicada às Aplicações da Função Exponencial, os autores apresentam três exemplos práticos que ilustram o uso dessa função em cálculos, demonstrando o processo de resolução para cada caso. Um aspecto relevante é o elemento "Explore", que propõe aos alunos a criação de perguntas com base nos exemplos discutidos, incentivando a interação e a troca de conhecimentos com os colegas. A seção de Equações Exponenciais e Sistemas aborda de forma concisa as equações exponenciais, seguida por exercícios resolvidos que explicam a solução desse tipo de equação. Por fim, a seção de Inequações Exponenciais apresenta uma abordagem semelhante à de equações, destacando a diferenciação nos casos de inequações para funções crescentes e decrescentes.

Figura 5 – Tarefas de autoavaliação livro 1.



Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Pode-se afirmar que $\frac{(\sqrt{7})^8}{(\sqrt{7})^6}$ é igual a: alternativa a

a) 7 c) $(\sqrt{7})^{\frac{4}{3}}$

b) $(\sqrt{7})^{14}$ d) $(\sqrt{7})^{48}$

2. O inverso de $3^{\frac{1}{2}}$ é: alternativa c

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$

3. Após racionalizar e simplificar a expressão $\frac{2}{\sqrt{8}}$, obtém-se: alternativa c

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{8}}{8}$

4. A sentença [redacted] não é a lei de formação de uma função exponencial. alternativa c

a) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ c) $h(x) = \frac{1^x}{5}$

b) $g(x) = (\sqrt{2})^x$ d) $i(x) = (0{,}3)^x$

5. O gráfico da função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo x real, passa pelo ponto: alternativa d

a) (0, 0) c) (0, −1)

b) (1, 0) d) (0, 1)

6. A função exponencial dada por $f(x) = (\sqrt{11})^x$ é: alternativa d

a) decrescente. c) constante.

b) nula. d) crescente.

7. A função f, tal que $f(x) = \pi^x$, pode ser representada pelo gráfico: alternativa b

a)

c)

b)

d)

8. No início deste século, a população da Índia girava em torno de 1,029 bilhão de habitantes. Supondo que ela cresça 20% a cada década, em 2021 essa população será de aproximadamente: alternativa b

a) 1,440 bilhão. c) 1,5 bilhão.

b) 1,482 bilhão. d) 1,235 bilhão.

9. Na equação $5^{-x} = 125$, o valor de x é: alternativa b

a) 3 c) −1

b) −3 d) 0,3

10. Se $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: alternativa a

a) $x \leqslant -6$ c) $x \leqslant 6$

b) $x \geqslant 6$ d) $x \geqslant -6$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

Objetivos do capítulo	Número da questão									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efetuar as operações de potenciação e radiciação.	X	X	X							
Identificar uma função exponencial.				X	X					
Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.					X	X	X			
Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.								X		
Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.									X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	68 a 73	68 a 73	68 a 73	73 a 76	73 a 76	73 a 76	73 a 76	76 e 77	78 a 81	78 a 81

Fonte: Leonardo (2020, p. 206)

Ao concluir, o autor apresenta as seções de Exercícios Complementares. Seguidas por uma seção de Autoavaliação composta por 10 questões, cada uma relacionada a um dos tópicos abordados ao longo do capítulo, um aspecto interessante desta seção é a inclusão de um quadro que direciona o aluno a revisitar tópicos específicos: caso cometa um erro em alguma questão, o quadro indica a página correspondente no livro para que o aluno possa revisitar e reforçar o conteúdo.

Uma característica interessante de alguns das tarefas propostas pelos autores é solicitação para os alunos utilizem de *softwares* ou calculadoras para auxiliar na resolução. Além disso, existem pequenas caixas de textos ao longo do capítulo com título “observação” e “reflita”, que tem por objetivo explicar tópicos que podem gerar dúvida no aluno, e de levar o aluno a reflexão sobre observações vistas, respectivamente, ao longo da leitura.

Outra situação de destaque no Livro de Leonardo (2020), é a finalização do capítulo com o uso de uma das histórias presentes no Livro de Malba Tahan, o problema dos mil dinares, apresentado em seu livro Novas lendas orientais, no qual a solução envolve colocar 1 moeda na primeira caixa, 2 na segunda, 4 na terceira, e assim por diante, seguindo uma progressão binária.

Por fim, após estas observações, sistematizo as categorias identificadas no livro didático Conexões Matemática e suas tecnologias, à luz dos procedimentos definidos por Masetti (2016) em conjunto ao aporte de Souza (2023), para assim complementar a análise do livro didático por meio dos descritores escolhidos.

Quadro 11 - Análise do livro Conexões Matemática e suas tecnologias.

Categorias	**Subcategorias**		**Definição**	
Introdução	Introdução/Motivação		Os autores apresentam situações da própria matemática, de outras ciências e da vida real.	
	Exemplos – tarefas resolvidas		Apresenta o conteúdo novo por meio de exemplos e os exercícios resolvidos são utilizados para exemplificar as formas de resolver as tarefas que envolvem o tópico apresentado.	
	Tarefas propostas	Conhecimentos prévios: 31	Regras operatórias com Potências e radiciação 29, sendo 3 delas na seção de autoavaliação, 1 problema contextualizado e 1 questão para analisar uma potência cujo expoente é uma raiz quadrada;	
		Conhecimentos emergentes: 104	Representação Gráfica	17
			Exploração	1
			Manipulação	73
			Conjecturar/Argumentar	12
			Provar	0
			Modelar	0
			Resolução de Problemas	1

Linguagem	Formal ou Informal?	A linguagem formal é predominante tanto quando o autores buscam introduzir os assuntos e quando formalizam os conhecimentos matemáticos e para isso ele utiliza-se do rigor matemático para tal fim. Além do uso das linguagens algébrica, numérica, gráfica e tabelar.
Conceitos	Explícitos ou Implícitos?	Os conceitos utilizados pelos autores são explícitos, de modo que o autor expõe os conceitos matemáticos de forma direta.
Proposições (Análise de como foram apresentadas as propriedades)	Como foram apresentadas?	De forma formal com o uso do raciocínio lógico dedutivo.
	São provadas, demonstradas ou justificadas?	Somente justificadas.
	Mostram sua utilização em exercícios ou só as expões?	Utilizam de exemplos resolvidos para mostrar a utilização das propriedades;
Procedimentos	Utilizam diversas maneiras diferentes de se resolver um exercício?	Há o uso de diferentes abordagens para resolver a mesma situação de forma analítica e geométrica, contudo há o predomínio da forma analítica
	Justificam ou não a resolução?	Justificam.
	Utilizam as novas tecnologias?	Sim, há questões em que os autores sugerem ou pedem o uso de softwares de construção de gráficos para a resolução; Além de existirem questões cujo os autores solicitam o uso de calculadora;
Argumentação	Utiliza uma prática discursiva baseada na linguagem verbal?	Utilizam uma prática discursiva baseada na linguagem verbal e também gráfica com a apresentação de muitas imagens, gráficos e planilhas que colaboram para o melhor entendimento do leitor dos conceitos e propriedades e também como forma de ilustrar exemplos.
	Tipos de Prova	Não a o uso de demonstrações ou provas, somente de justificativas, procurando desenvolver exercícios de maneira lógico-dedutiva.

Fonte: Adaptado de Silva (2024) e Masetti (2016).

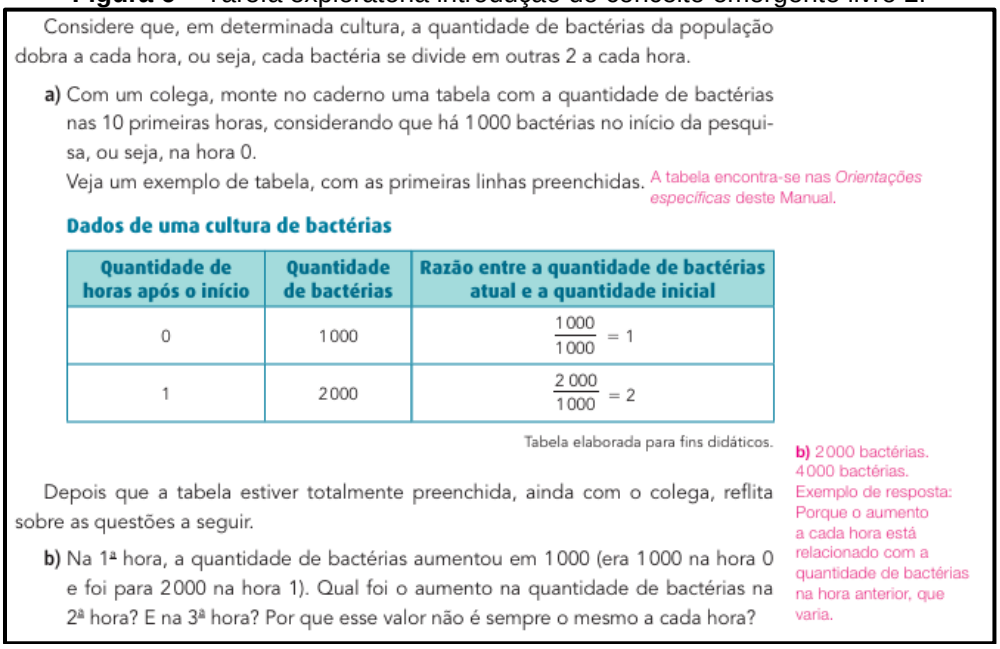
3.3.2. Matemática em Contextos: Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequencias – Editora Ática

O livro didático Matemática em Contextos: Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequencias é uma obra de autoria de Luís Roberto Dante e Fernando Viana, Doutor em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e Doutor em Engenharia Mecânica pela UFPB, respectivamente. Publicado no ano de 2020 e completo em 6 volumes.

Neste livro didático, o conteúdo de função exponencial é o primeiro capítulo a ser trabalhado, e assim os autores iniciam o capítulo com uma problemática da disciplina de biologia com uma situação problema que envolve a multiplicação de

bactéria, e com este texto introdutório os autores já apresentam tarefas para que os alunos sejam introduzidos ao modelo matemático de função exponencial.

Figura 6 – Tarefa exploratória introdução do conceito emergente livro 2.



Considere que, em determinada cultura, a quantidade de bactérias da população dobra a cada hora, ou seja, cada bactéria se divide em outras 2 a cada hora.

a) Com um colega, monte no caderno uma tabela com a quantidade de bactérias nas 10 primeiras horas, considerando que há 1 000 bactérias no início da pesquisa, ou seja, na hora 0.
Veja um exemplo de tabela, com as primeiras linhas preenchidas.

A tabela encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Dados de uma cultura de bactérias

Quantidade de horas após o início	Quantidade de bactérias	Razão entre a quantidade de bactérias atual e a quantidade inicial
0	1 000	$\frac{1\,000}{1\,000} = 1$
1	2 000	$\frac{2\,000}{1\,000} = 2$

Tabela elaborada para fins didáticos.

Depois que a tabela estiver totalmente preenchida, ainda com o colega, reflita sobre as questões a seguir.

b) Na 1ª hora, a quantidade de bactérias aumentou em 1 000 (era 1 000 na hora 0 e foi para 2 000 na hora 1). Qual foi o aumento na quantidade de bactérias na 2ª hora? E na 3ª hora? Por que esse valor não é sempre o mesmo a cada hora?

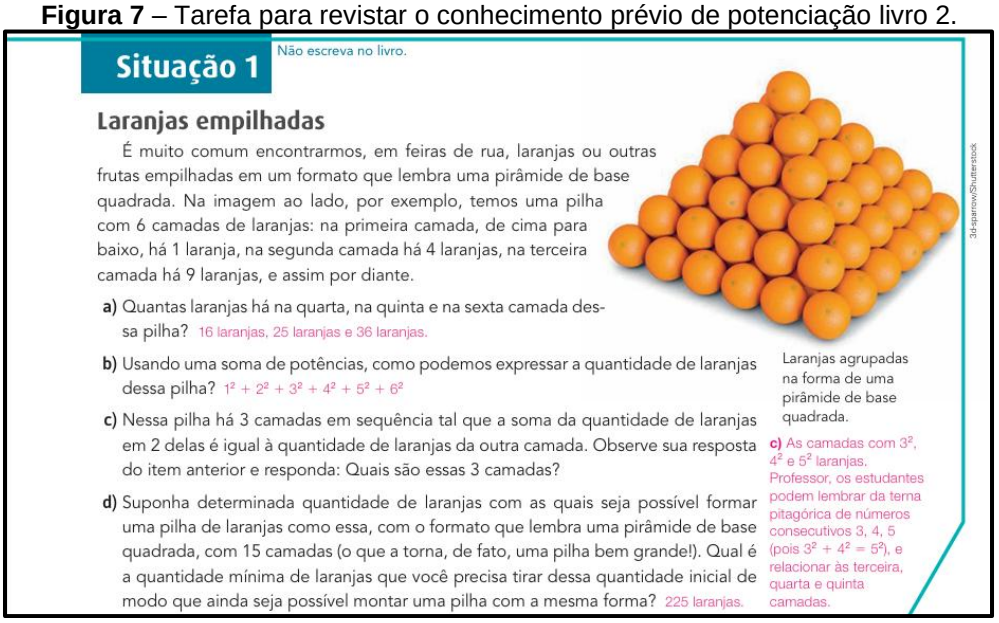
b) 2 000 bactérias. 4 000 bactérias. Exemplo de resposta: Porque o aumento a cada hora está relacionado com a quantidade de bactérias na hora anterior, que varia.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 11).

Após essa tarefa, o livro apresenta uma seção intitulada "Conheça o Capítulo", na qual são destacados os objetivos que o capítulo pretende que os alunos alcancem. Além disso, a seção oferece uma justificativa para o ensino da função exponencial e indica quais competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) são desenvolvidas ao longo do capítulo. E assim o capítulo é segmentado em três partes, uma para retomar e aprofundar a operação de potenciação, em seguida do mesmo para a operação radiciação, para que desta forma se inicie o estudo da função exponencial.

Na primeira parte do capítulo, então, Dante e Viana (2020) iniciam a revisitação ao conteúdo de potenciação, por meio de quatro tarefas intituladas “Situação”, no qual trazem um texto de uma situação, e por meio de tarefas, os alunos exploram o conteúdo matemático de potenciação, como forma revistar os conhecimentos prévios.

Figura 7 – Tarefa para revistar o conhecimento prévio de potenciação livro 2.



Situação 1

Não escreva no livro.

Laranjas empilhadas

É muito comum encontrarmos, em feiras de rua, laranjas ou outras frutas empilhadas em um formato que lembra uma pirâmide de base quadrada. Na imagem ao lado, por exemplo, temos uma pilha com 6 camadas de laranjas: na primeira camada, de cima para baixo, há 1 laranja, na segunda camada há 4 laranjas, na terceira camada há 9 laranjas, e assim por diante.

Laranjas agrupadas na forma de uma pirâmide de base quadrada.

3d-sparrow/Shutterstock

a) Quantas laranjas há na quarta, na quinta e na sexta camada dessa pilha? 16 laranjas, 25 laranjas e 36 laranjas.

b) Usando uma soma de potências, como podemos expressar a quantidade de laranjas dessa pilha? $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

c) Nessa pilha há 3 camadas em sequência tal que a soma da quantidade de laranjas em 2 delas é igual à quantidade de laranjas da outra camada. Observe sua resposta do item anterior e responda: Quais são essas 3 camadas?

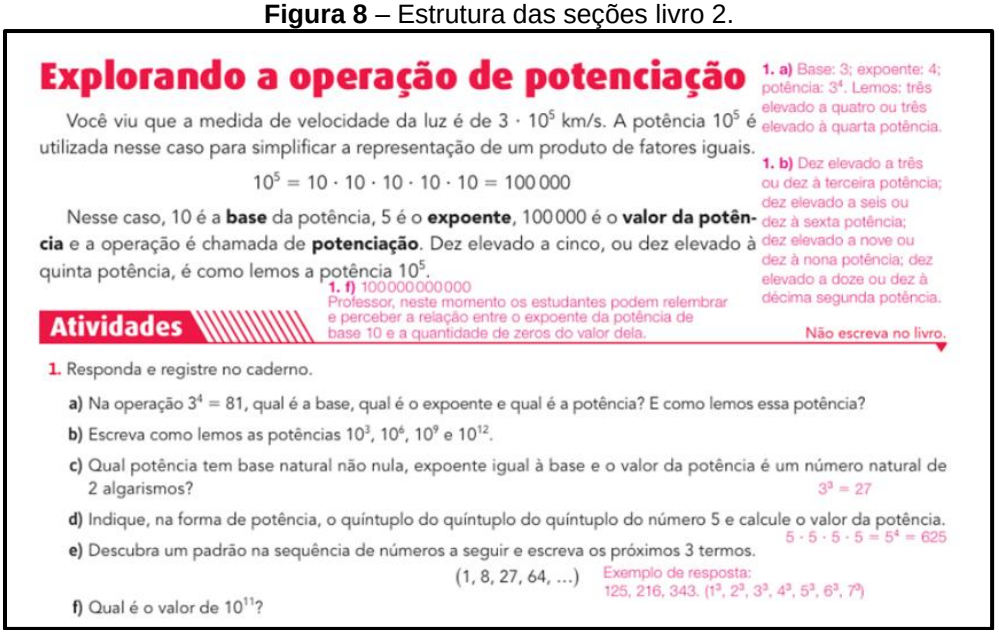
c) As camadas com 3^2, 4^2 e 5^2 laranjas. Professor, os estudantes podem lembrar da terna pitagórica de números consecutivos 3, 4, 5 (pois $3^2 + 4^2 = 5^2$), e relacionar às terceira, quarta e quinta camadas.

d) Suponha determinada quantidade de laranjas com as quais seja possível formar uma pilha de laranjas como essa, com o formato que lembra uma pirâmide de base quadrada, com 15 camadas (o que a torna, de fato, uma pilha bem grande!). Qual é a quantidade mínima de laranjas que você precisa tirar dessa quantidade inicial de modo que ainda seja possível montar uma pilha com a mesma forma? 225 laranjas.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 14).

Após isso, são tratadas seções intituladas de "Explorando a Operação de Potenciação," "Formalizando a Operação de Potenciação" e "Formalizando o Conceito de Notação Científica." Na primeira seção, os alunos são incentivados a explorar a operação de potenciação por meio de tarefas. Na segunda, é apresentada a definição formal de potenciação e os significados das potências nos diferentes conjuntos numéricos. Por fim, na terceira seção, a notação científica é introduzida. Ao final de cada uma dessas seções, há tarefas para os alunos resolverem sobre o conteúdo revisado.

Figura 8 – Estrutura das seções livro 2.



Explorando a operação de potenciação

Você viu que a medida de velocidade da luz é de $3 \cdot 10^5$ km/s. A potência 10^5 é utilizada nesse caso para simplificar a representação de um produto de fatores iguais.

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$$

Nesse caso, 10 é a **base** da potência, 5 é o **expoente**, 100 000 é o **valor da potência** e a operação é chamada de **potenciação**. Dez elevado a cinco, ou dez elevado à quinta potência, é como lemos a potência 10^5.

1. a) Base: 3; expoente: 4; potência: 3^4. Lemos: três elevado a quatro ou três elevado à quarta potência.

1. b) Dez elevado a três ou dez à terceira potência; dez elevado a seis ou dez à sexta potência; dez elevado a nove ou dez à nona potência; dez elevado a doze ou dez à décima segunda potência.

1. f) 100000000000
Professor, neste momento os estudantes podem relembrar e perceber a relação entre o expoente da potência de base 10 e a quantidade de zeros do valor dela.

Atividades

Não escreva no livro.

1. Responda e registre no caderno.

a) Na operação $3^4 = 81$, qual é a base, qual é o expoente e qual é a potência? E como lemos essa potência?

b) Escreva como lemos as potências 10^3, 10^6, 10^9 e 10^{12}.

c) Qual potência tem base natural não nula, expoente igual à base e o valor da potência é um número natural de 2 algarismos? $3^3 = 27$

d) Indique, na forma de potência, o quíntuplo do quíntuplo do quíntuplo do número 5 e calcule o valor da potência. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

e) Descubra um padrão na sequência de números a seguir e escreva os próximos 3 termos.
(1, 8, 27, 64, ...) Exemplo de resposta: 125, 216, 343. (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3)

f) Qual é o valor de 10^{11}?

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 16).

O tópico sobre potenciação é concluído com dois textos que abordam temas relacionados à aplicação prática do conteúdo. O primeiro texto trata dos algarismos significativos em instrumentos de medida usados no cotidiano dos alunos, enquanto o segundo aborda a tribo indígena Palikur e os métodos utilizados por eles para medir comprimentos. Cada texto é acompanhado de atividades para reforçar o aprendizado.

Assim é iniciado a revisitação à operação de radiciação, no qual segue uma estrutura semelhante ao de potenciação, visto que iniciam por meio de três tarefas de “Situação”, no qual trazem um texto de uma situação e tarefas, como forma de recordar os alunos aos conhecimentos prévios de radiciação.

Figura 9 – Tarefa para revistar o conhecimento prévio de radiciação livro 2.

Situação 2 Não escreva no livro.

Medida de área

Ao fazer um projeto residencial ou comercial, o arquiteto deve levar em consideração muitas informações, como o público a que se destina, o propósito de uso do ambiente e o espaço disponível, bem como o custo orçado para o projeto.

Reflita sobre a seguinte situação: Um arquiteto está projetando uma casa em que o piso da sala terá a forma quadrada. Após estudos, ele verificou que seria interessante se a medida de área desse piso fosse de 25 m^2.

archideaphoto/Shutterstock

Vista aérea da sala de uma casa.

a) Como você calcularia a medida de comprimento de cada lado do piso dessa sala? O resultado seria um número inteiro? Exemplo de resposta: Extraindo a raiz quadrada de 25, que é igual a 5. Sim.

Posteriormente, o arquiteto decidiu manter o formato do piso da sala, mas reduzir a medida de área para 20 m^2.

b) Qual seria a medida de comprimento de cada lado do piso nesse caso? Essa medida estaria entre quais números inteiros? $\sqrt{20}$ m ou $2\sqrt{5}$ m. Entre 4 e 5.

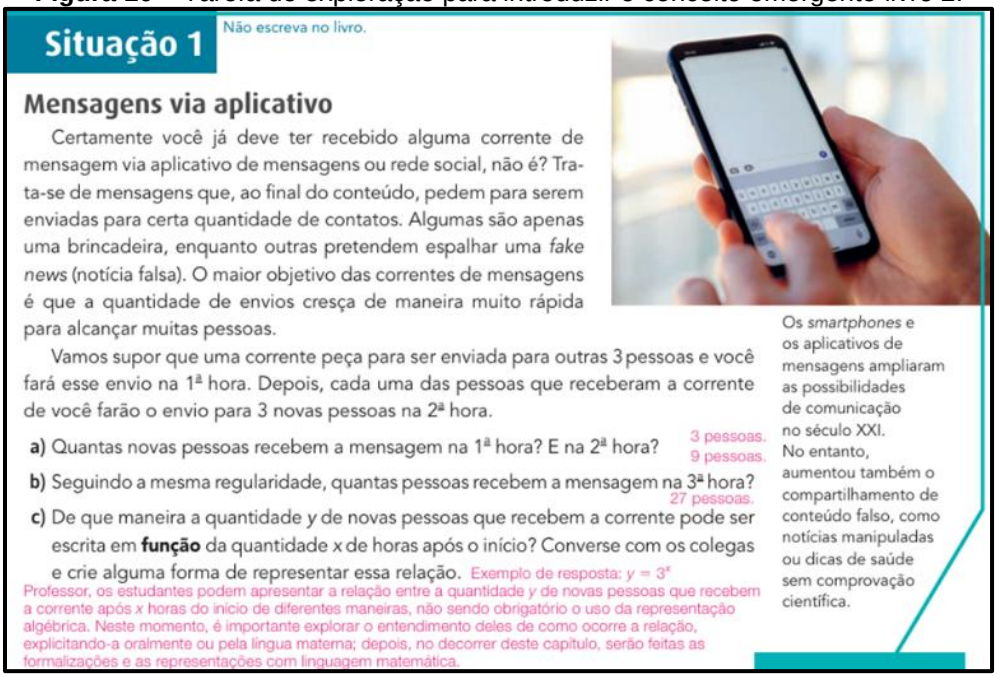
Fonte: Dante e Viana (2020, p. 30).

Após isso, são tratadas as seções de "Explorando a Operação de Radiciação," "Um pouco da história da radiciação" e Formalizando a operação de radiciação". Na primeira seção, os alunos são incentivados a explorar a operação de radiciação por meio de tarefas. Na segunda, há 4 parágrafos que trazem um pouco da história desta operação. Por fim, na terceira seção, é apresentada a definição formal de radiciação e as operações entre radicais, sendo finalizada com exercícios resolvidos e 17 tarefas a serem resolvidas.

Em seguida, inicia-se o tópico da Função Exponencial. Similar às seções anteriores, essa parte é introduzida por meio de Tarefas de "Situação", que agora são descritas como tarefas de conhecimento emergente. Segundo Masetti (2016, p. 62), essas tarefas visam "desenvolver o raciocínio utilizando os conhecimentos prévios".

Assim o autor introduz o tema função exponencial contando uma situação na qual aborda a disseminação das chamadas *fake News* (notícias falsas), no qual os autores buscam desenvolver o pensamento de crescimento exponencial, e que ao final os alunos consigam perceber certos padrões nas anotações obtidas, os quais lhes permitam chegar a uma fórmula, para descrever esse fenômeno. O mesmo tipo de pensamento é desenvolvido por meio da situação 2, de título “Influenciador digital”, no qual o aluno explora a situação do crescimento do número de visualizações de um influenciador digital.

Figura 10 – Tarefa de exploração para introduzir o conceito emergente livro 2.



Situação 1 Não escreva no livro.

Mensagens via aplicativo

Certamente você já deve ter recebido alguma corrente de mensagem via aplicativo de mensagens ou rede social, não é? Trata-se de mensagens que, ao final do conteúdo, pedem para serem enviadas para certa quantidade de contatos. Algumas são apenas uma brincadeira, enquanto outras pretendem espalhar uma *fake news* (notícia falsa). O maior objetivo das correntes de mensagens é que a quantidade de envios cresça de maneira muito rápida para alcançar muitas pessoas.

Vamos supor que uma corrente peça para ser enviada para outras 3 pessoas e você fará esse envio na 1ª hora. Depois, cada uma das pessoas que receberam a corrente de você farão o envio para 3 novas pessoas na 2ª hora.

a) Quantas novas pessoas recebem a mensagem na 1ª hora? E na 2ª hora? 3 pessoas. 9 pessoas.

b) Seguindo a mesma regularidade, quantas pessoas recebem a mensagem na 3ª hora? 27 pessoas.

c) De que maneira a quantidade *y* de novas pessoas que recebem a corrente pode ser escrita em **função** da quantidade *x* de horas após o início? Converse com os colegas e crie alguma forma de representar essa relação. Exemplo de resposta: $y = 3^x$

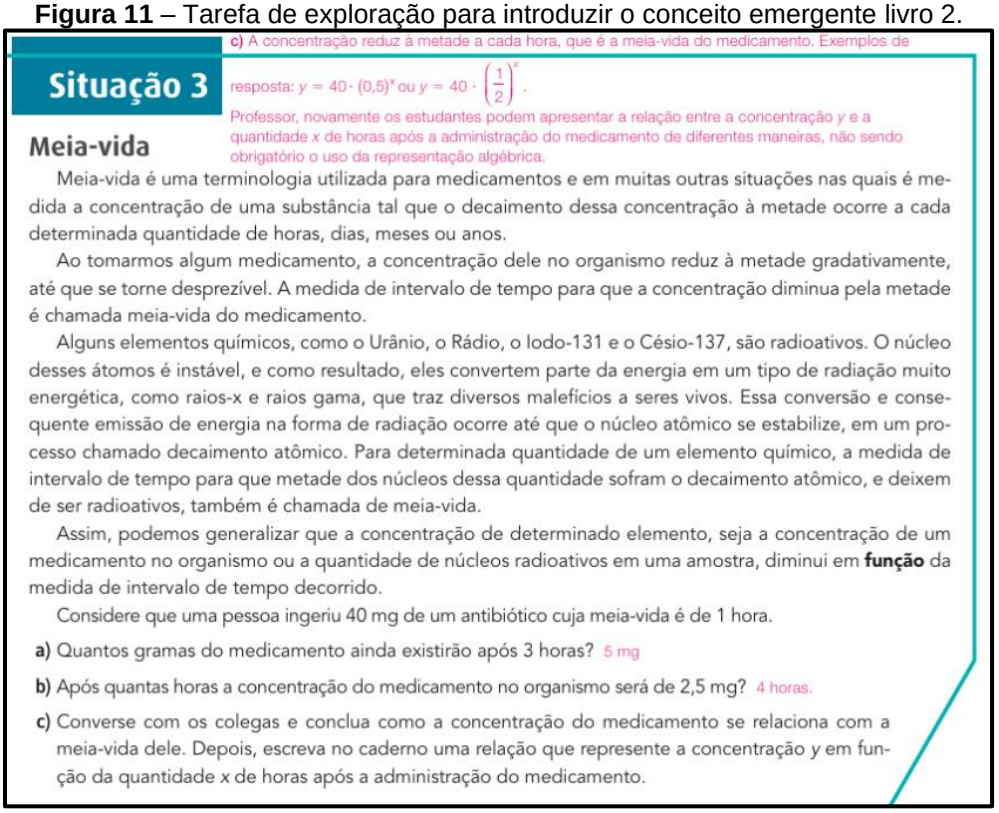
Professor, os estudantes podem apresentar a relação entre a quantidade *y* de novas pessoas que recebem a corrente após *x* horas do início de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica. Neste momento, é importante explorar o entendimento deles de como ocorre a relação, explicitando-a oralmente ou pela língua materna; depois, no decorrer deste capítulo, serão feitas as formalizações e as representações com linguagem matemática.

Os *smartphones* e os aplicativos de mensagens ampliaram as possibilidades de comunicação no século XXI. No entanto, aumentou também o compartilhamento de conteúdo falso, como notícias manipuladas ou dicas de saúde sem comprovação científica.

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 35).

As situações seguinte, abordam o decrescimento exponencial, uma por meio do conceito de meia-vida, oriundo das disciplinas de ciências naturais, no qual é o corresponde ao tempo necessário para que a medida de concentração de uma substância decaia a metade do seu valor anterior, e por meio desta tarefa os autores buscam, novamente, que os alunos intuitivamente consigam perceber certos padrões nas anotações obtidas, os quais lhes permitam chegar a uma fórmula, para descrever esse fenômeno. Por fim, as situações são finalizadas por meio da apresentação de um caso de depreciação do valor de um carro em função do tempo.

Figura 11 – Tarefa de exploração para introduzir o conceito emergente livro 2.



c) A concentração reduz à metade a cada hora, que é a meia-vida do medicamento. Exemplos de resposta: $y = 40 \cdot (0{,}5)^x$ ou $y = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Professor, novamente os estudantes podem apresentar a relação entre a concentração y e a quantidade x de horas após a administração do medicamento de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica.

Situação 3

Meia-vida

Meia-vida é uma terminologia utilizada para medicamentos e em muitas outras situações nas quais é medida a concentração de uma substância tal que o decaimento dessa concentração à metade ocorre a cada determinada quantidade de horas, dias, meses ou anos.

Ao tomarmos algum medicamento, a concentração dele no organismo reduz à metade gradativamente, até que se torne desprezível. A medida de intervalo de tempo para que a concentração diminua pela metade é chamada meia-vida do medicamento.

Alguns elementos químicos, como o Urânio, o Rádio, o Iodo-131 e o Césio-137, são radioativos. O núcleo desses átomos é instável, e como resultado, eles convertem parte da energia em um tipo de radiação muito energética, como raios-x e raios gama, que traz diversos malefícios a seres vivos. Essa conversão e consequente emissão de energia na forma de radiação ocorre até que o núcleo atômico se estabilize, em um processo chamado decaimento atômico. Para determinada quantidade de um elemento químico, a medida de intervalo de tempo para que metade dos núcleos dessa quantidade sofram o decaimento atômico, e deixem de ser radioativos, também é chamada de meia-vida.

Assim, podemos generalizar que a concentração de determinado elemento, seja a concentração de um medicamento no organismo ou a quantidade de núcleos radioativos em uma amostra, diminui em **função** da medida de intervalo de tempo decorrido.

Considere que uma pessoa ingeriu 40 mg de um antibiótico cuja meia-vida é de 1 hora.

a) Quantos gramas do medicamento ainda existirão após 3 horas? 5 mg

b) Após quantas horas a concentração do medicamento no organismo será de 2,5 mg? 4 horas.

c) Converse com os colegas e conclua como a concentração do medicamento se relaciona com a meia-vida dele. Depois, escreva no caderno uma relação que represente a concentração y em função da quantidade x de horas após a administração do medicamento.

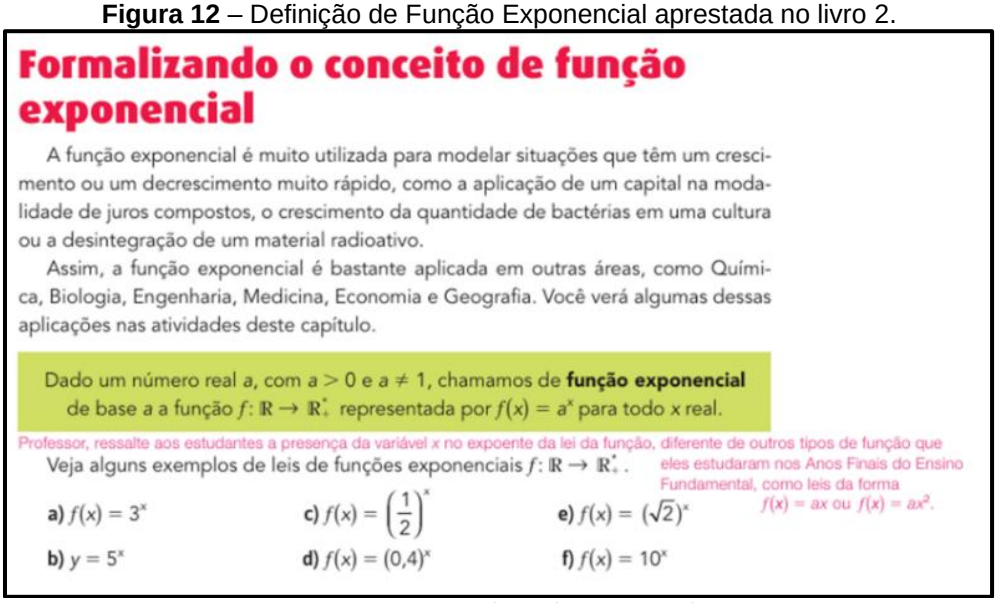
Fonte: Dante e Viana (2020, p. 35).

Depois dessas tarefas iniciais, os autores revisitam conhecimentos prévios relacionados à função exponencial por meio dos tópicos "Explorando a ideia de função", "Um pouco da história das funções" e "Formalizando a ideia de Função". No primeiro tópico, os alunos são incentivados a explorar a ideia de função por meio de uma situação envolvendo a sequência dos possíveis resultados do lançamento de uma moeda, em função do número de lançamentos. Essa seção é acompanhada por tarefas que buscam que o aluno descubra mais sobre o conceito de função.

Em "Um pouco da história das funções", é utilizado da história da matemática para tratar um pouco sobre o desenvolvimento e surgimento do conceito funcional dentro da matemática. E em "Formalizando a ideia de Função", os autores trazem o a definição explicita de função, de domínio e contradomínio e tratam sobre o gráfico de uma função, cada uma destas etapas é seguida de tarefas a serem desenvolvidas.

Com isso, os autores inicializam o estudo específico sobre a Função exponencial, com a apresentação da formalização de definição explícita da Função Exponencial. Seguida de tarefas de manipulação e exploração.

Figura 12 – Definição de Função Exponencial aprestada no livro 2.



Formalizando o conceito de função exponencial

A função exponencial é muito utilizada para modelar situações que têm um crescimento ou um decrescimento muito rápido, como a aplicação de um capital na modalidade de juros compostos, o crescimento da quantidade de bactérias em uma cultura ou a desintegração de um material radioativo.

Assim, a função exponencial é bastante aplicada em outras áreas, como Química, Biologia, Engenharia, Medicina, Economia e Geografia. Você verá algumas dessas aplicações nas atividades deste capítulo.

Dado um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de **função exponencial** de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ representada por $f(x) = a^x$ para todo x real.

Professor, ressalte aos estudantes a presença da variável x no expoente da lei da função, diferente de outros tipos de função que eles estudaram nos Anos Finais do Ensino Fundamental, como leis da forma $f(x) = ax$ ou $f(x) = ax^2$.

Veja alguns exemplos de leis de funções exponenciais $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

a) $f(x) = 3^x$

b) $y = 5^x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = (0{,}4)^x$

e) $f(x) = (\sqrt{2})^x$

f) $f(x) = 10^x$

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 45).

E anterior ao estudo do gráfico da função exponencial, os autores, apresentam um tópico chamado de “Tecnologias digitais” no qual apresentam o uso de *softwares* livres de construção de gráfico. Neste tópico é ensinado aos alunos como utilizar o *software* Geogebra para a construção e manipulação do gráfico da função exponencial, seguido de exercícios para que os alunos explorem e testem.

E assim, é iniciado o estudo dos gráficos, como construção e características do gráfico, como crescimento e decrescimento, além de interseção com o eixo das ordenadas, seguido de atividades resolvidas e tarefas de representação gráfica, manipulação e argumentação.

Após isso, o capítulo explora a função exponencial em variados contextos e por diferentes abordagens. Inicialmente, o tema é abordado por meio de exemplos de juros compostos, com a apresentação de um exemplo prático e três atividades de exploração que incentivam o entendimento do conceito. São oferecidas questões resolvidas e exercícios que utilizam o contexto financeiro para reforçar a compreensão dos alunos.

Os autores também incluem o uso de tecnologia, recorrendo ao software GeoGebra para a construção de gráficos de funções do tipo exponencial. Um tutorial passo a passo é fornecido, seguido de atividades práticas que exploram o uso do software para criar gráficos. Outros contextos abordados incluem o uso de anticoncepcionais e a ideia de meia-vida, além do clássico problema da Torre de Hanói, explorando a relação entre o número de discos e o número mínimo de

movimentos necessários. Em ambos os casos, atividades complementares auxiliam na fixação do conteúdo.

O capítulo avança para exercícios resolvidos e propostos sobre função exponencial, incluindo um estudo sobre o crescimento exponencial relacionado à pandemia de COVID-19. Este contexto é explorado por meio de atividades práticas e incentivo à pesquisa autônoma dos alunos para aprofundamento. Finalmente, os autores mostram como o conteúdo foi abordado em exames como o Enem e outros vestibulares, oferecendo uma síntese da aplicação do conceito em provas externas.

Conclui-se que o conteúdo de função exponencial é abordado de maneira bastante abrangente neste livro didático, iniciando desde os conhecimentos prévios sobre potenciação e radiciação. Nota-se o esforço dos autores em explorar o conteúdo em diferentes contextos, tanto para a introdução quanto para a consolidação da aprendizagem, além de ressaltar a importância do uso de tecnologias pelo professor e pelos alunos.

Por fim, após estas observações, sistematizo as categorias identificadas no livro didático Matemática em Contextos, à luz dos procedimentos definidos por Masetti (2016) em conjunto ao aporte de Silva (2024), para assim complementar a análise do livro didático por meio dos descritores escolhidos.

Quadro 12 - Análise do livro Matemática em Contextos.

Categorias	Subcategorias		Definição	
Introdução	Introdução/Motivação		Os autores apresentam contextos da própria matemática, de outras ciências e da vida real.	
	Exemplos – tarefas resolvidas		Apresenta o conteúdo novo por meio de exemplos e os exercícios resolvidos são utilizados para exemplificar as formas de resolver as tarefas que envolvem o tópico apresentado.	
	Tarefas propostas	Conhecimentos prévios: 97	Atividades contextualizadas, Regras e propriedades operatórias sobre potenciação e radicação; notação científica.	
		Conhecimentos emergentes: 165	Representação Gráfica	8
			Exploração	38
			Manipulação	56
			Conjecturar/Argumentar	34
			Provar	0
			Modelar	4
			Resolução de Problemas	25
Linguagem	Formal ou Informal?		A linguagem formal é predominante tanto quando o autores buscam introduzir os assuntos e quando formalizam os conhecimentos matemáticos e para isso ele utiliza-se do rigor matemático para tal fim. Além do uso das linguagens algébrica, numérica, gráfica e tabelar.	

Conceitos	Explícitos ou Implícitos?	Os conceitos utilizados pelos autores são explícitos, de modo que o autor expõe os conceitos matemáticos de forma direta.
Proposições (Análise de como foram apresentadas as propriedades)	Como foram apresentadas?	De forma formal com o uso do raciocínio lógico dedutivo.
	São provadas, demonstradas ou justificadas?	Somente justificadas.
	Mostram sua utilização em exercícios ou só as expões?	Utilizam de exemplos resolvidos para mostrar a utilização das propriedades;
Procedimentos	Utilizam diversas maneiras diferentes de se resolver um exercício?	Há o uso de diferentes abordagens para resolver a mesma situação de forma analítica e geométrica, contudo há o predomínio da forma analítica. Além da existência de questões em que o uso de softwares no processo de resolução.
	Justificam ou não a resolução?	Justificam.
	Utilizam as novas tecnologias?	Sim, a tecnologia é bem explorada, com atividades que dedicadas a exploração de softwares de construção de gráficos, além de questões em que o uso de tecnologia como os softwares e calculadores são sugestões oferecidas pelo autores.
Argumentação	Utiliza uma prática discursiva baseada na linguagem verbal?	Utilizam uma prática discursiva baseada na linguagem verbal e também gráfica com a apresentação de muitas imagens, gráficos e tabelas que colaboram para o melhor entendimento do leitor dos conceitos e propriedades e também como forma de ilustrar exemplos.
	Tipos de Prova	Não há o uso de demonstrações ou provas, somente de justificativas, procurando desenvolver exercícios de maneira lógico-dedutiva.

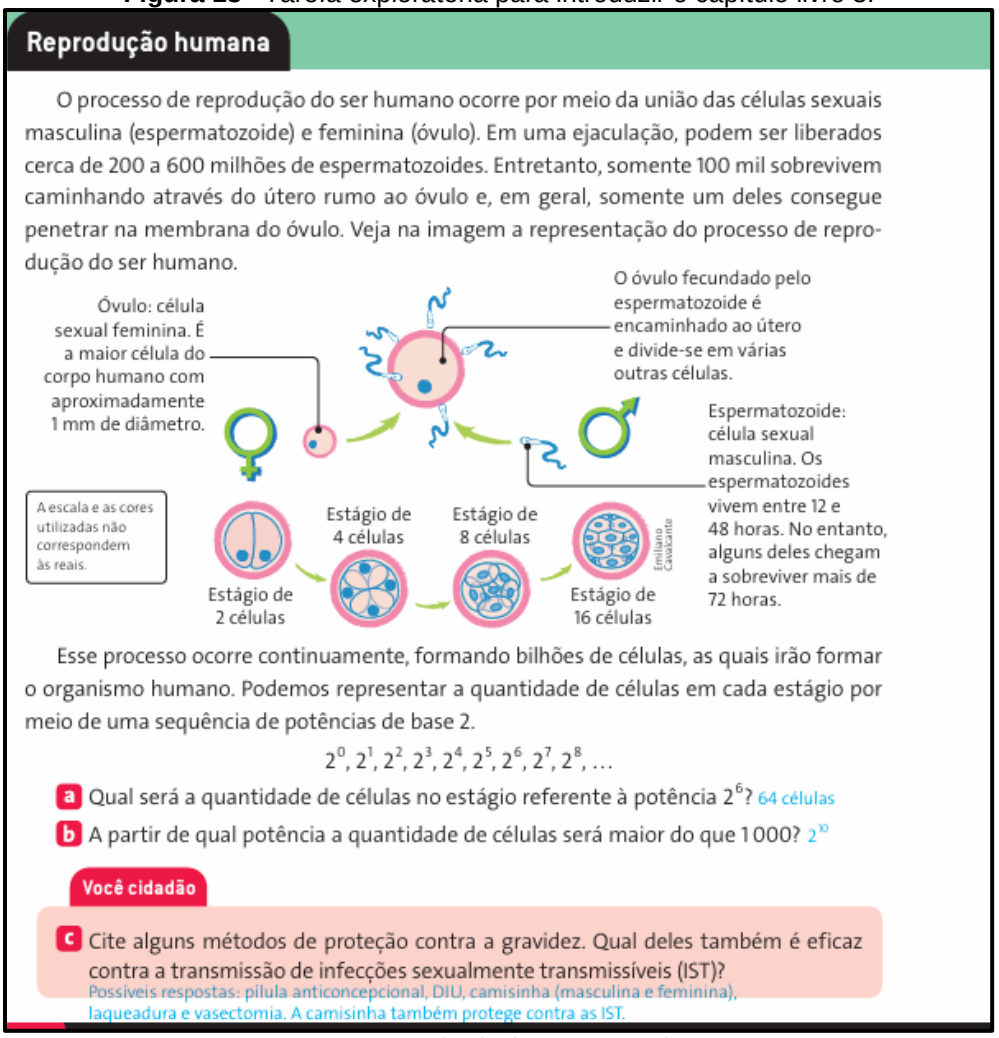
Fonte: Adaptado de Silva (2024) e Masetti (2016).

3.3.3. Matemática Interligada: Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica

O livro intitulado Matemática Interligada: Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, lançado no ano de 2020. É uma obra da Editora responsável a Especialista em Educação Matemática, Thais Marcelle de Andrade, e é completa em um total de 6 volumes. Neste livro, o capítulo de Função Exponencial e logarítmica está presente no capítulo 5, sendo este o último capítulo, este fato pode acarretar dificuldades no ensino deste conteúdo, pois de acordo com Silva (2024), quando o professor da educação básica utiliza o livro didático como base para o ensino, geralmente segue a ordem apresentada. No entanto, conteúdos alocados nos capítulos finais podem acabar não sendo abordados com os alunos devido a restrições de tempo, o que impacta a aprendizagem.

O capítulo inicia com um pequeno texto e tarefas exploratórias, em que é abordado a ideia de crescimento exponencial por meio da situação da biologia da reprodução humana, em que há o crescimento da quantidade de células humanas a partir de potências de base 2.

Figura 13 –Tarefa exploratória para introduzir o capítulo livro 3.



Reprodução humana

O processo de reprodução do ser humano ocorre por meio da união das células sexuais masculina (espermatozoide) e feminina (óvulo). Em uma ejaculação, podem ser liberados cerca de 200 a 600 milhões de espermatozoides. Entretanto, somente 100 mil sobrevivem caminhando através do útero rumo ao óvulo e, em geral, somente um deles consegue penetrar na membrana do óvulo. Veja na imagem a representação do processo de reprodução do ser humano.

Esse processo ocorre continuamente, formando bilhões de células, as quais irão formar o organismo humano. Podemos representar a quantidade de células em cada estágio por meio de uma sequência de potências de base 2.

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, \ldots$$

a Qual será a quantidade de células no estágio referente à potência 2^6? 64 células

b A partir de qual potência a quantidade de células será maior do que 1 000? 2^{10}

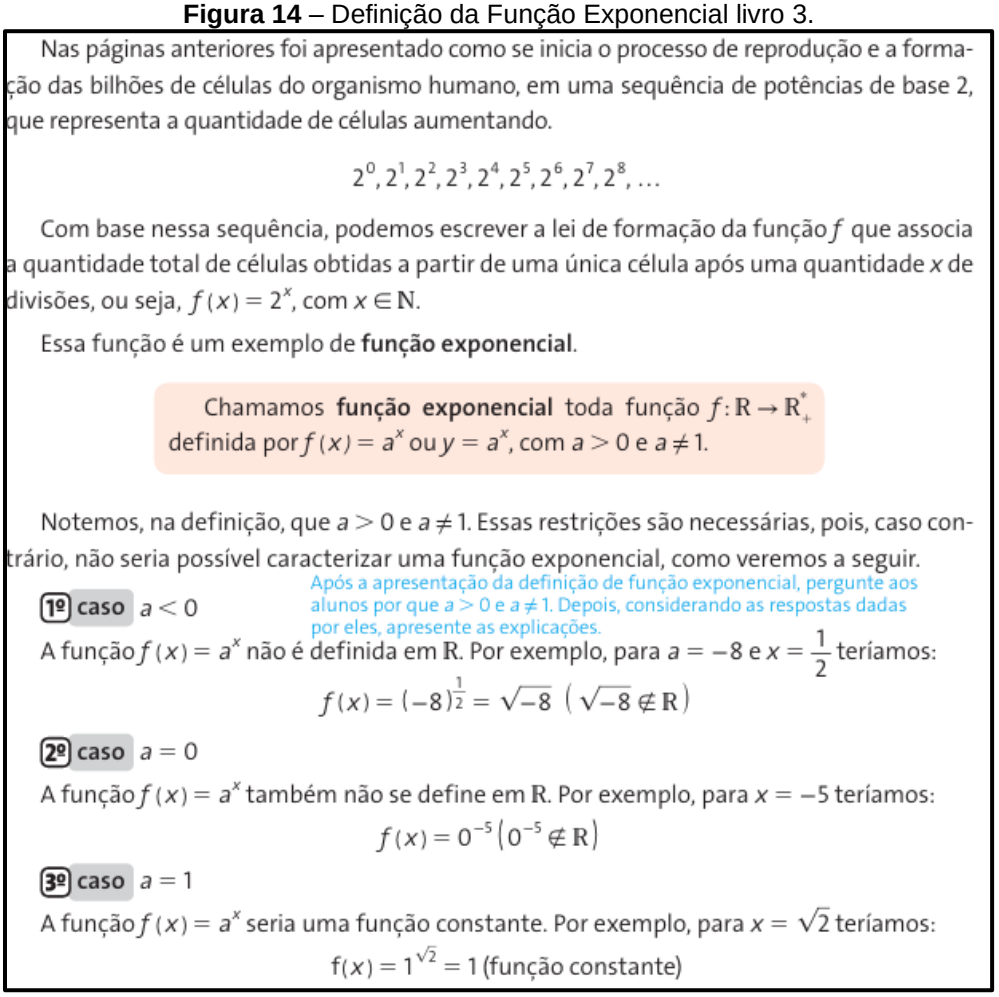
Você cidadão

c Cite alguns métodos de proteção contra a gravidez. Qual deles também é eficaz contra a transmissão de infecções sexualmente transmissíveis (IST)?
Possíveis respostas: pílula anticoncepcional, DIU, camisinha (masculina e feminina), laqueadura e vasectomia. A camisinha também protege contra as IST.

Fonte: Andrade (2020, p. 115).

Assim, o capítulo já aborda a definição de Função Exponencial, com o uso do exemplo da reprodução humana e a sequência de base 2. Expondo dessa forma o a definição de forma explícita, seguido da conceituação dos casos da função, em que o valor da base pode ser maior, igual a zero e igual a 1. Seguido de 3 tarefas de argumentação para com que os alunos conjecturem e pensem sobre este tipo novo de função apresentada.

Figura 14 – Definição da Função Exponencial livro 3.



Nas páginas anteriores foi apresentado como se inicia o processo de reprodução e a formação das bilhões de células do organismo humano, em uma sequência de potências de base 2, que representa a quantidade de células aumentando.

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, \ldots$$

Com base nessa sequência, podemos escrever a lei de formação da função f que associa a quantidade total de células obtidas a partir de uma única célula após uma quantidade x de divisões, ou seja, $f(x) = 2^x$, com $x \in \mathbb{N}$.

Essa função é um exemplo de **função exponencial**.

Chamamos **função exponencial** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Notemos, na definição, que $a > 0$ e $a \neq 1$. Essas restrições são necessárias, pois, caso contrário, não seria possível caracterizar uma função exponencial, como veremos a seguir.

Após a apresentação da definição de função exponencial, pergunte aos alunos por que $a > 0$ e $a \neq 1$. Depois, considerando as respostas dadas por eles, apresente as explicações.

1º caso $a < 0$

A função $f(x) = a^x$ não é definida em $\mathbb{R}$. Por exemplo, para $a = -8$ e $x = \frac{1}{2}$ teríamos:

$$f(x) = (-8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-8} \quad \left(\sqrt{-8} \notin \mathbb{R}\right)$$

2º caso $a = 0$

A função $f(x) = a^x$ também não se define em $\mathbb{R}$. Por exemplo, para $x = -5$ teríamos:

$$f(x) = 0^{-5} \left(0^{-5} \notin \mathbb{R}\right)$$

3º caso $a = 1$

A função $f(x) = a^x$ seria uma função constante. Por exemplo, para $x = \sqrt{2}$ teríamos:

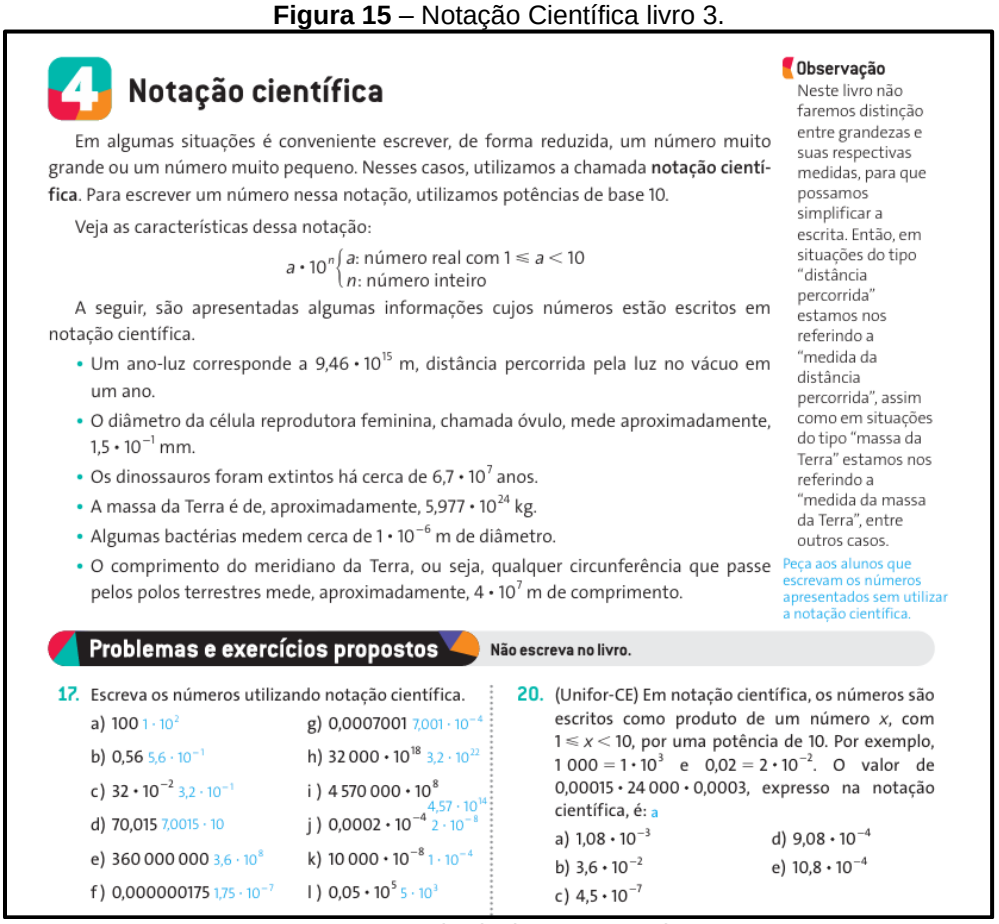
$$f(x) = 1^{\sqrt{2}} = 1 \text{ (função constante)}$$

Fonte: Andrade (2020, p. 116).

Na sequência, o livro expõe de forma explícita as propriedades da potenciação e o gráfico da função exponencial. As propriedades da potenciação são ilustradas por meio de duas tarefas resolvidas que cobrem todas as propriedades essenciais, destacando o uso. Já para o estudo do gráfico da função exponencial, são apresentadas duas tarefas exploratórias, no qual os alunos analisam uma tabela e figuras de gráficos, de modo que compreendam como a base da função determina o comportamento de crescimento ou decrescimento do gráfico, seguido da definição formal para estes casos.

Após isso, o capítulo prossegue com problemas e exercícios propostos que abordam todos os conteúdos abordados inicialmente. Em seguida, introduz o tópico de notação científica, com a explicação o conceito e apresentando exemplos de números nessa forma, logo após, são propostas tarefas específicas para este tópico.

Figura 15 – Notação Científica livro 3.



4 Notação científica

Em algumas situações é conveniente escrever, de forma reduzida, um número muito grande ou um número muito pequeno. Nesses casos, utilizamos a chamada **notação científica**. Para escrever um número nessa notação, utilizamos potências de base 10.

Veja as características dessa notação:

$$a \cdot 10^n \begin{cases} a\text{: número real com } 1 \leq a < 10 \\ n\text{: número inteiro} \end{cases}$$

A seguir, são apresentadas algumas informações cujos números estão escritos em notação científica.

- Um ano-luz corresponde a $9{,}46 \cdot 10^{15}$ m, distância percorrida pela luz no vácuo em um ano.
- O diâmetro da célula reprodutora feminina, chamada óvulo, mede aproximadamente, $1{,}5 \cdot 10^{-1}$ mm.
- Os dinossauros foram extintos há cerca de $6{,}7 \cdot 10^7$ anos.
- A massa da Terra é de, aproximadamente, $5{,}977 \cdot 10^{24}$ kg.
- Algumas bactérias medem cerca de $1 \cdot 10^{-6}$ m de diâmetro.
- O comprimento do meridiano da Terra, ou seja, qualquer circunferência que passe pelos polos terrestres mede, aproximadamente, $4 \cdot 10^7$ m de comprimento.

Observação

Neste livro não faremos distinção entre grandezas e suas respectivas medidas, para que possamos simplificar a escrita. Então, em situações do tipo "distância percorrida" estamos nos referindo a "medida da distância percorrida", assim como em situações do tipo "massa da Terra" estamos nos referindo a "medida da massa da Terra", entre outros casos.

Peça aos alunos que escrevam os números apresentados sem utilizar a notação científica.

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

17. Escreva os números utilizando notação científica.

a) 100 $1 \cdot 10^2$

b) 0,56 $5{,}6 \cdot 10^{-1}$

c) $32 \cdot 10^{-2}$ $3{,}2 \cdot 10^{-1}$

d) 70,015 $7{,}0015 \cdot 10$

e) 360 000 000 $3{,}6 \cdot 10^8$

f) 0,000000175 $1{,}75 \cdot 10^{-7}$

g) 0,0007001 $7{,}001 \cdot 10^{-4}$

h) $32\,000 \cdot 10^{18}$ $3{,}2 \cdot 10^{22}$

i) $4\,570\,000 \cdot 10^8$ $4{,}57 \cdot 10^{14}$

j) $0{,}0002 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-8}$

k) $10\,000 \cdot 10^{-8}$ $1 \cdot 10^{-4}$

l) $0{,}05 \cdot 10^5$ $5 \cdot 10^3$

20. (Unifor-CE) Em notação científica, os números são escritos como produto de um número x, com $1 \leq x < 10$, por uma potência de 10. Por exemplo, $1\,000 = 1 \cdot 10^3$ e $0{,}02 = 2 \cdot 10^{-2}$. O valor de $0{,}00015 \cdot 24\,000 \cdot 0{,}0003$, expresso na notação científica, é: a

a) $1{,}08 \cdot 10^{-3}$

b) $3{,}6 \cdot 10^{-2}$

c) $4{,}5 \cdot 10^{-7}$

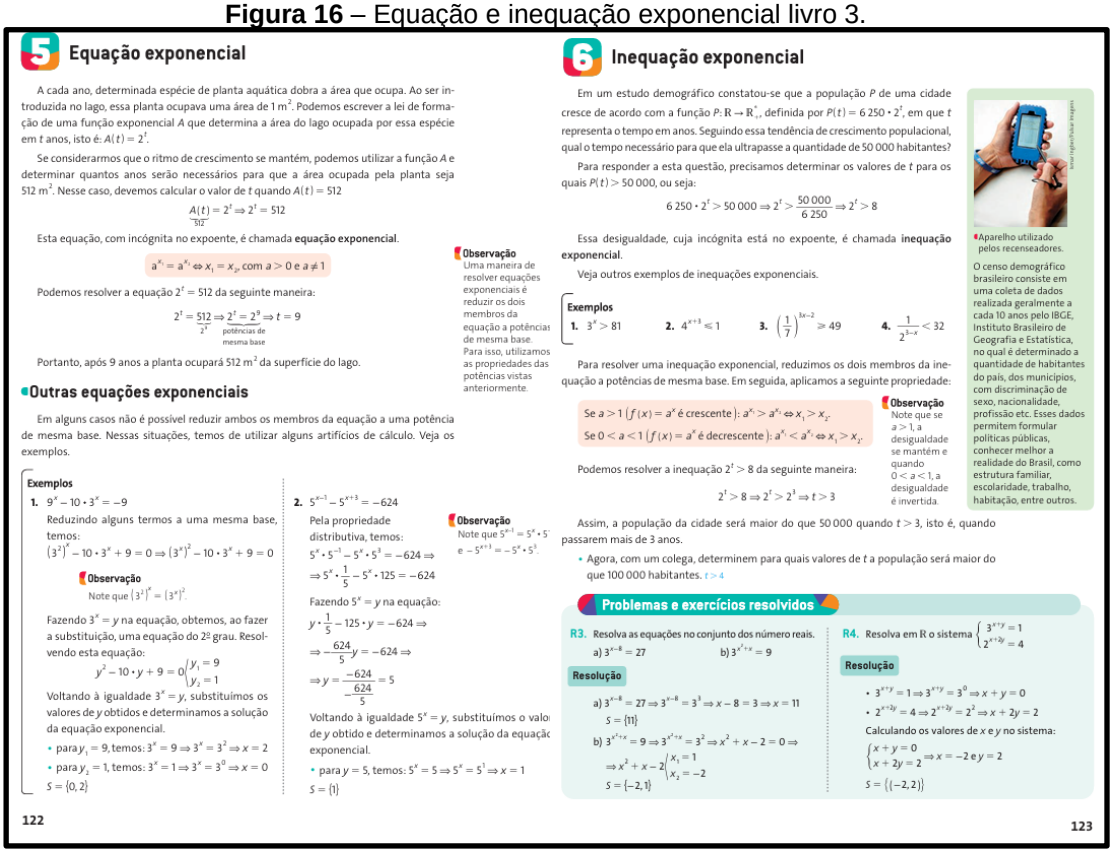
d) $9{,}08 \cdot 10^{-4}$

e) $10{,}8 \cdot 10^{-4}$

Fonte: Andrade (2020, p. 121).

O tópico seguinte aborda equações exponenciais, introduzidas por meio de uma situação fictícia sobre uma planta aquática cuja área dobra anualmente. A partir desse contexto, são explicados o conceito de equação exponencial e as exemplos de resolução. Em sequência, o capítulo trata das inequações exponenciais, usando o exemplo de crescimento populacional para investigar o momento em que a população ultrapassará 50 mil habitantes. Assim, o conceito de inequação exponencial é introduzido, acompanhado de uma atividade prática para ser realizada pelos alunos em duplas. Após a introdução das equações e inequações exponenciais, o capítulo oferece uma sequência de tarefas resolvidas, seguidos de tarefas e problemas adicionais para os alunos.

Figura 16 – Equação e inequação exponencial livro 3.



5 Equação exponencial

A cada ano, determinada espécie de planta aquática dobra a área que ocupa. Ao ser introduzida no lago, essa planta ocupava uma área de 1 m². Podemos escrever a lei de formação de uma função exponencial A que determina a área do lago ocupada por essa espécie em t anos, isto é: $A(t) = 2^t$.

Se considerarmos que o ritmo de crescimento se mantém, podemos utilizar a função A e determinar quantos anos serão necessários para que a área ocupada pela planta seja 512 m². Nesse caso, devemos calcular o valor de t quando $A(t) = 512$

$$\frac{A(t)}{512} = 2^t \Rightarrow 2^t = 512$$

Esta equação, com incógnita no expoente, é chamada **equação exponencial**.

$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

Observação
Uma maneira de resolver equações exponenciais é reduzir os dois membros da equação a potências de mesma base. Para isso, utilizamos as propriedades das potências vistas anteriormente.

Podemos resolver a equação $2^t = 512$ da seguinte maneira:

$$2^t = \frac{512}{2^t} \Rightarrow \underbrace{2^t = 2^9}_{\text{potências de mesma base}} \Rightarrow t = 9$$

Portanto, após 9 anos a planta ocupará 512 m² da superfície do lago.

Outras equações exponenciais

Em alguns casos não é possível reduzir ambos os membros da equação a uma potência de mesma base. Nessas situações, temos de utilizar alguns artifícios de cálculo. Veja os exemplos.

Exemplos

1. $9^x - 10 \cdot 3^x = -9$

Reduzindo alguns termos a uma mesma base, temos:
$(3^2)^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

Observação
Note que $(3^2)^x = (3^x)^2$.

Fazendo $3^x = y$ na equação, obtemos, ao fazer a substituição, uma equação do 2º grau. Resolvendo esta equação:

$$y^2 - 10 \cdot y + 9 = 0 \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Voltando à igualdade $3^x = y$, substituímos os valores de y obtidos e determinamos a solução da equação exponencial.

- para $y_1 = 9$, temos: $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$
- para $y_2 = 1$, temos: $3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

$S = \{0, 2\}$

2. $5^{x-1} - 5^{x+3} = -624$

Pela propriedade distributiva, temos:
$5^x \cdot 5^{-1} - 5^x \cdot 5^3 = -624 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^x \cdot \frac{1}{5} - 5^x \cdot 125 = -624$

Observação
Note que $5^{x-1} = 5^x \cdot 5^{-1}$ e $5^{x+3} = 5^x \cdot 5^3$.

Fazendo $5^x = y$ na equação:

$$y \cdot \frac{1}{5} - 125 \cdot y = -624 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-624}{5} y = -624 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{-624}{-\frac{624}{5}} = 5$$

Voltando à igualdade $5^x = y$, substituímos o valor de y obtido e determinamos a solução da equação exponencial.

- para $y = 5$, temos: $5^x = 5 \Rightarrow 5^x = 5^1 \Rightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

6 Inequação exponencial

Em um estudo demográfico constatou-se que a população P de uma cidade cresce de acordo com a função $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $P(t) = 6\,250 \cdot 2^t$, em que t representa o tempo em anos. Seguindo essa tendência de crescimento populacional, qual o tempo necessário para que ela ultrapasse a quantidade de 50 000 habitantes?

Para responder a esta questão, precisamos determinar os valores de t para os quais $P(t) > 50\,000$, ou seja:

$$6\,250 \cdot 2^t > 50\,000 \Rightarrow 2^t > \frac{50\,000}{6\,250} \Rightarrow 2^t > 8$$

Essa desigualdade, cuja incógnita está no expoente, é chamada **inequação exponencial**.

Veja outros exemplos de inequações exponenciais.

Exemplos

1. $3^x > 81$ **2.** $4^{x+3} \leqslant 1$ **3.** $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2} \geqslant 49$ **4.** $\frac{1}{2^{3-x}} < 32$

Para resolver uma inequação exponencial, reduzimos os dois membros da inequação a potências de mesma base. Em seguida, aplicamos a seguinte propriedade:

Se $a > 1$ ($f(x) = a^x$ é crescente): $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
Se $0 < a < 1$ ($f(x) = a^x$ é decrescente): $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Observação
Note que se $a > 1$, a desigualdade se mantém e quando $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

Podemos resolver a inequação $2^t > 8$ da seguinte maneira:

$$2^t > 8 \Rightarrow 2^t > 2^3 \Rightarrow t > 3$$

Assim, a população da cidade será maior do que 50 000 quando $t > 3$, isto é, quando passarem mais de 3 anos.

- Agora, com um colega, determinem para quais valores de t a população será maior do que 100 000 habitantes. $t > 4$

Aparelho utilizado pelos recenseadores.

O censo demográfico brasileiro consiste em uma coleta de dados realizada geralmente a cada 10 anos pelo IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, no qual é determinado a quantidade de habitantes do país, dos municípios, com discriminação de sexo, nacionalidade, profissão etc. Esses dados permitem formular políticas públicas, conhecer melhor a realidade do Brasil, como estrutura familiar, escolaridade, trabalho, habitação, entre outros.

Problemas e exercícios resolvidos

R3. Resolva as equações no conjunto dos números reais.
a) $3^{x-8} = 27$ b) $3^{x^2+x} = 9$

Resolução

a) $3^{x-8} = 27 \Rightarrow 3^{x-8} = 3^3 \Rightarrow x - 8 = 3 \Rightarrow x = 11$
$S = \{11\}$

b) $3^{x^2+x} = 9 \Rightarrow 3^{x^2+x} = 3^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + x - 2 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$
$S = \{-2, 1\}$

R4. Resolva em R o sistema $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 4 \end{cases}$

Resolução

- $3^{x+y} = 1 \Rightarrow 3^{x+y} = 3^0 \Rightarrow x + y = 0$
- $2^{x+2y} = 4 \Rightarrow 2^{x+2y} = 2^2 \Rightarrow x + 2y = 2$

Calculando os valores de x e y no sistema:

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -2$ e $y = 2$

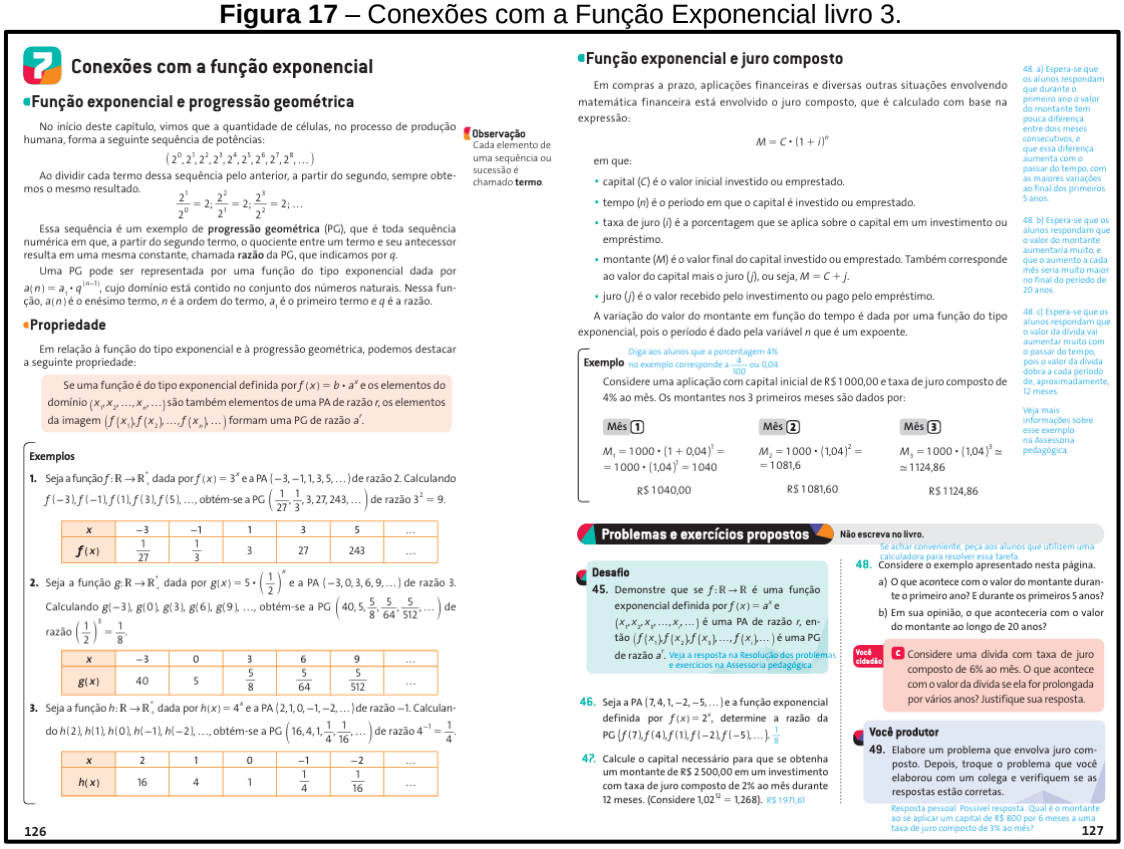
$S = \{(-2, 2)\}$

122 123

Fonte: Andrade (2020, pp. 122-123).

O capítulo conclui com uma análise das conexões entre a função exponencial e outros conteúdos matemáticos, como a progressão geométrica e os juros compostos. Para ilustrar a progressão geométrica, a autora retoma a situação inicial do capítulo, que apresenta uma sequência de potências com base 2, definindo-a como um exemplo de progressão geométrica e, seguido da propriedade que a relaciona com a função exponencial, acompanhada de exemplos. Em relação aos juros compostos, é apresentada a fórmula de cálculo do montante, detalhando o que representa cada elemento da fórmula e com exemplos que demonstram sua aplicação. Ao final, tarefas específicas são oferecidas para consolidar o entendimento desses dois tópicos.

Figura 17 – Conexões com a Função Exponencial livro 3.



Conexões com a função exponencial

Função exponencial e progressão geométrica

No início deste capítulo, vimos que a quantidade de células, no processo de produção humana, forma a seguinte sequência de potências:

$(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, \ldots)$

Ao dividir cada termo dessa sequência pelo anterior, a partir do segundo, sempre obtemos o mesmo resultado.

$$\frac{2^1}{2^0} = 2; \frac{2^2}{2^1} = 2; \frac{2^3}{2^2} = 2; \ldots$$

Essa sequência é um exemplo de **progressão geométrica** (PG), que é toda sequência numérica em que, a partir do segundo termo, o quociente entre um termo e seu antecessor resulta em uma mesma constante, chamada **razão** da PG, que indicamos por q.

Uma PG pode ser representada por uma função do tipo exponencial dada por $a(n) = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, cujo domínio está contido no conjunto dos números naturais. Nessa função, $a(n)$ é o enésimo termo, n é a ordem do termo, a_1 é o primeiro termo e q é a razão.

Observação
Cada elemento de uma sequência ou sucessão é chamado **termo**.

Propriedade

Em relação à função do tipo exponencial e à progressão geométrica, podemos destacar a seguinte propriedade:

Se uma função é do tipo exponencial definida por $f(x) = b \cdot a^x$ e os elementos do domínio $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ são também elementos de uma PA de razão r, os elementos da imagem $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$ formam uma PG de razão a^r.

Exemplos

1. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = 3^x$ e a PA $(-3, -1, 1, 3, 5, \ldots)$ de razão 2. Calculando $f(-3), f(-1), f(1), f(3), f(5), \ldots$, obtém-se a PG $\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{3}, 3, 27, 243, \ldots\right)$ de razão $3^2 = 9$.

x	-3	-1	1	3	5	...
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}$	3	27	243	...

2. Seja a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e a PA $(-3, 0, 3, 6, 9, \ldots)$ de razão 3. Calculando $g(-3), g(0), g(3), g(6), g(9), \ldots$, obtém-se a PG $\left(40, 5, \frac{5}{8}, \frac{5}{64}, \frac{5}{512}, \ldots\right)$ de razão $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

x	-3	0	3	6	9	...
$g(x)$	40	5	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{512}$	...

3. Seja a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $h(x) = 4^x$ e a PA $(2, 1, 0, -1, -2, \ldots)$ de razão -1. Calculando $h(2), h(1), h(0), h(-1), h(-2), \ldots$, obtém-se a PG $\left(16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ de razão $4^{-1} = \frac{1}{4}$.

x	2	1	0	-1	-2	...
$h(x)$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	...

126

Função exponencial e juro composto

Em compras a prazo, aplicações financeiras e diversas outras situações envolvendo matemática financeira está envolvido o juro composto, que é calculado com base na expressão:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

em que:

- capital (C) é o valor inicial investido ou emprestado.
- tempo (n) é o período em que o capital é investido ou emprestado.
- taxa de juro (i) é a porcentagem que se aplica sobre o capital em um investimento ou empréstimo.
- montante (M) é o valor final do capital investido ou emprestado. Também corresponde ao valor do capital mais o juro (j), ou seja, $M = C + j$.
- juro (j) é o valor recebido pelo investimento ou pago pelo empréstimo.

A variação do valor do montante em função do tempo é dada por uma função do tipo exponencial, pois o período é dado pela variável n que é um expoente.

Exemplo Diga aos alunos que a porcentagem 4% no exemplo corresponde a $\frac{4}{100}$ ou 0,04.

Considere uma aplicação com capital inicial de R$ 1 000,00 e taxa de juro composto de 4% ao mês. Os montantes nos 3 primeiros meses são dados por:

Mês 1
$M_1 = 1000 \cdot (1 + 0{,}04)^1 = 1000 \cdot (1{,}04)^1 = 1040$
R$ 1 040,00

Mês 2
$M_2 = 1000 \cdot (1{,}04)^2 = 1081{,}6$
R$ 1 081,60

Mês 3
$M_3 = 1000 \cdot (1{,}04)^3 \simeq 1124{,}86$
R$ 1 124,86

Problemas e exercícios propostos

Não escreva no livro.

Se achar conveniente, peça aos alunos que utilizem uma calculadora para resolver essa tarefa.

Desafio

45. Demonstre que se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função exponencial definida por $f(x) = a^x$ e $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ é uma PA de razão r, então $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots)$ é uma PG de razão a^r. Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

46. Seja a PA $(7, 4, 1, -2, -5, \ldots)$ e a função exponencial definida por $f(x) = 2^x$, determine a razão da PG $(f(7), f(4), f(1), f(-2), f(-5), \ldots)$. $\frac{1}{8}$

47. Calcule o capital necessário para que se obtenha um montante de R$ 2 500,00 em um investimento com taxa de juro composto de 2% ao mês durante 12 meses. (Considere $1{,}02^{12} = 1{,}268$). R$ 1 971,61

48. Considere o exemplo apresentado nesta página.
a) O que acontece com o valor do montante durante o primeiro ano? E durante os primeiros 5 anos?
b) Em sua opinião, o que aconteceria com o valor do montante ao longo de 20 anos?

Você cidadão
C Considere uma dívida com taxa de juro composto de 6% ao mês. O que acontece com o valor da dívida se ela for prolongada por vários anos? Justifique sua resposta.

Você produtor

49. Elabore um problema que envolva juro composto. Depois, troque o problema que você elaborou com um colega e verifiquem se as respostas estão corretas.

Resposta pessoal. Possível resposta: Qual é o montante ao se aplicar um capital de R$ 800 por 6 meses à uma taxa de juro composto de 3% ao mês?

48. a) Espera-se que os alunos respondam que durante o primeiro ano o valor do montante tem pouca diferença entre dois meses consecutivos, e que essa diferença aumenta com o passar do tempo, com as maiores variações ao final dos primeiros 5 anos.

48. b) Espera-se que os alunos respondam que o valor do montante aumentaria muito, e que o aumento a cada mês seria muito maior no final do período de 20 anos.

48. c) Espera-se que os alunos respondam que o valor da dívida vai aumentar muito com o passar do tempo, pois o valor da dívida dobra a cada período de, aproximadamente, 12 meses.

Veja mais informações sobre esse exemplo na Assessoria pedagógica.

127

Fonte: Andrade (2020, pp. 126-127).

Por fim, após estas observações, sistematizo as categorias identificadas no livro didático Matemática em Contextos, à luz dos procedimentos definidos por Masetti (2016) em conjunto ao aporte de Silva (2024), para assim complementar a análise do livro didático por meio dos descritores escolhidos.

Quadro 13 - Análise do livro Matemática Interligada.

Categorias	Subcategorias		Definição	
Introdução	Introdução/Motivação		Os autores apresentam contextos da própria matemática e de outras ciências.	
	Exemplos – tarefas resolvidas		Apresenta o conteúdo novo por meio de exemplos e os exercícios resolvidos são utilizados para exemplificar as formas de resolver as tarefas que envolvem o tópico apresentado.	
	Tarefas propostas	Conhecimentos prévios: 20.	Atividades de aplicação das propriedades de potências.	
		Conhecimentos emergentes: 104	Representação Gráfica	7
			Exploração	4
			Manipulação	75
			Conjecturar/Argumentar	10
			Provar	1
			Modelar	3
			Resolução de Problemas	4
Linguagem	Formal ou Informal?		A linguagem formal é predominante tanto quando o autores buscam introduzir os assuntos e quando formalizam os conhecimentos matemáticos e para isso ele utiliza-se do rigor matemático para tal fim.	

		Além do uso das linguagens algébrica, numérica, gráfica e tabelar.
Conceitos	Explícitos ou Implícitos?	Os conceitos utilizados pelos autores são explícitos, de modo que o autor expõe os conceitos matemáticos de forma direta.
Proposições (Análise de como foram apresentadas as propriedades)	Como foram apresentadas?	De forma formal com o uso do raciocínio lógico dedutivo.
	São provadas, demonstradas ou justificadas?	Somente justificadas.
	Mostram sua utilização em exercícios ou só as expões?	Utilizam de exemplos resolvidos para mostrar a utilização das propriedades;
Procedimentos	Utilizam diversas maneiras diferentes de se resolver um exercício?	Há o uso de diferentes abordagens para resolver a mesma situação de forma analítica e geométrica, contudo há o predomínio da forma analítica.
	Justificam ou não a resolução?	Justificam.
	Utilizam as novas tecnologias?	Sim, algumas questões solicitam o uso da calculadora.
Argumentação	Utiliza uma prática discursiva baseada na linguagem verbal?	Utilizam uma prática discursiva baseada na linguagem verbal e também gráfica com a apresentação de muitas imagens, gráficos e tabelas que colaboram para o melhor entendimento do leitor dos conceitos e propriedades e como forma de exemplificar.
	Tipos de Prova	Não há o uso de demonstrações ou provas, somente de justificativas, procurando desenvolver exercícios de maneira lógico-dedutiva.

Fonte: Adaptado de Silva (2024) e Masetti (2016).

3.3.4. Considerações sobre os livros didáticos analisados.

A análise dos livros didáticos revela que todos utilizam situações contextualizadas — seja da matemática, de outras ciências ou da vida cotidiana — para introduzir e motivar o estudo da função exponencial. Esse tipo de abordagem está em consonância com as prescrições curriculares, como indicado nos PCN-EM que destacam a importância de contextualizar o conteúdo com a vida pessoal e o cotidiano dos alunos, o que torna o aprendizado mais significativo e aumentando a motivação para o estudo do tema (Brasil, 2000).

Após a contextualização inicial, os livros 1 e 2 prosseguem com uma revisão dos tópicos de potenciação e radiciação, como forma de revistar estes conhecimentos prévios, necessários para promover a continuidade dos estudos. Essa revisão ocorre por meio de situações contextualizadas, seguido da apresentação de regras e propriedades operatórias, e culmina com a aplicação de tarefas. Em contraste, o livro 3 apenas expõe, somente, as propriedades de potência e propõe atividades focadas

exclusivamente no trabalho com essas propriedades.

Em relação as atividades propostas sobre os conhecimentos emergentes, ou seja, os conhecimentos novos trabalhados, em todos os livros é perceptível predominância de questões do tipo manipulação, caracterizada pelo cálculo algorítmico com ênfase na destreza, rotinização, sistematização e aplicação de regras e fórmulas. O que mostra que os livros ainda possuem grande foco na função exponencial no cálculo, principalmente sobre as variáveis dependentes e independentes. Somente no livro 2, que a distribuição de tarefas apresenta o número considerável, também de questões que exigem a exploração e a argumentação do aluno sobre as situações que envolvem a função.

Na análise das tendências da Educação Matemática, observou-se que o uso da Modelagem Matemática e da Resolução de Problemas aparece em todos os livros, exceto no Livro 1, onde não há aplicação da modelagem. Entretanto, essa presença é mínima se comparada ao número de tarefas de manipulação. Esse cenário é semelhante ao encontrado por Masetti (2016), que também verificou uma baixa incidência de problemas que exigem modelagem nos livros analisados, além de que muitas das situações contextualizadas já são apresentadas modeladas, limitando a resolução ao processo de manipulação. Ainda segundo a autora, essas características divergem das diretrizes curriculares, especialmente em relação ao ensino de função exponencial.

Quanto a linguagem empregada, em todos os livros é a linguagem formal a predominante, tanto quando os autores buscam introduzir os assuntos e quando formalizam os conhecimentos matemáticos e para isso ele utiliza-se do rigor matemático para tal fim, e há o uso das linguagens algébrica, numérica, gráfica e tabelar.

Quanto os conceitos e as proposições, em todos os livros os conceitos utilizados pelos autores são explícitos, de modo que o autor expõe os conceitos matemáticos de forma direta e as proposições são apresentadas de forma formal com o uso do raciocínio lógico dedutivo. Contudo em nenhum dos livros existe demonstrações que provem as proposições mostradas aos alunos, estas são somente justificadas, e ao não trazerem demonstrações, Masetti (2016) aponta que isto também vai de encontro com as diretrizes curriculares.

Sobre os procedimentos, ou seja, as formas com que os autores sugerem de ser resolver um exercício. Em ambos os livros, também, há o uso de diferentes

abordagens para resolver a mesma situação de forma analítica e geométrica, contudo há o predomínio da forma analítica. Uma característica interessante é a inserção das tecnologias na resolução dos exercícios, a calculadora é a que está presente em todos os livros analisados, contudo nos dois primeiros há também o uso de softwares de construção gráfica, como o Geogebra. Tal fato mostra como as tecnologias começam a estar mais presentes nos livros, consequentemente nas aulas de matemática, o que segue as descrições da BNCC quanto a aprendizagem de matemática.

Quanto à Argumentação, Masetti (2016) destaca que as diretrizes curriculares enfatizam a importância de incentivar o professor a incluir provas e demonstrações na formação dos alunos. Contudo, nos livros analisados, observa-se a ausência de demonstrações formais e provas, havendo apenas justificativas que procuram desenvolver os exercícios de forma lógico-dedutiva. Apenas no Livro 3 há uma tarefa específica que solicita ao aluno a demonstração de uma proposição com base em proposições anteriores. Essa abordagem, portanto, diverge do que é recomendado nas diretrizes curriculares.

Na análise dos livros didáticos sobre o ensino de função exponencial, observa-se uma estrutura semelhante, com poucas variações. Predomina uma abordagem tradicional, onde o conceito é exposto seguido de exercícios práticos, sendo este método pouco desafiado pelos autores. Entretanto, um ponto de destaque, em todos os livros analisados, é o uso de situações extraídas da própria matemática, de outras ciências ou do cotidiano do aluno como ponto de partida para abordar a função exponencial. Essa abordagem está em consonância com a orientação da BNCC para o ensino médio, que busca promover uma visão integrada da matemática, aplicada de maneira contextualizada e conectada à realidade em múltiplos cenários (Brasil, 2018a).

Contudo, observa-se que, na maioria dos casos, essas situações são utilizadas apenas para introduzir o conteúdo. A aplicação de metodologias da educação matemática, como a Modelagem e a Resolução de Problemas, que permitem uma exploração mais profunda de situações reais em conexão com a aprendizagem matemática, ainda é escassa nos materiais analisados. E como observado na dissertação de Emer (2020), a Modelagem Matemática é uma abordagem potencializa o ensino da função exponencial, ao promover a participação ativa dos alunos, transformando-os em construtores do conhecimento, incentivando a socialização e o debate.

Constatou-se também uma escassez de metodologias lúdicas nos livros analisados. O único exemplo encontrado foi no livro Matemática em Contextos de Dante e Viana (2020), onde o jogo matemático Torre de Hanoi é utilizado para explorar a função exponencial. Esse tipo de abordagem é destacado por ser incentivado por diretrizes oficiais, como o Documento Curricular do Estado do Pará, que orienta o professor a ultrapassar o papel de mero transmissor e promover uma aprendizagem lúdica, contextualizada, colaborativa e interativa, com participação ativa dos alunos (Pará, 2021).

Essa abordagem também é amplamente investigada por pesquisadores, como na dissertação de Junior (2022), intitulada *"*Um Estudo sobre a Função Exponencial: Propostas de Atividades Lúdicas*"*, anteriormente analisada. Sua relevância reside em possibilitar que o professor reflita sobre o planejamento e a metodologia aplicada, além de fomentar a interação entre os alunos e entre aluno e docente, facilitando a construção do conhecimento.

Dessa forma, conforme visto na análise das dissertações de Costa (2023) e Emer (2020), observa-se que atividades em que os alunos explorem o conhecimento matemático a partir de situações-problema, com a investigação, tomada de decisões, análise, criação e teste de modelos matemáticos, demonstram grande potencial no ensino da função exponencial. A pesquisa de Júnior (2022) acrescenta ainda o potencial das atividades lúdicas para fortalecer a compreensão desse conceito.

Contudo, essas abordagens, embora presentes nos livros didáticos, ainda aparecem de maneira limitada. Assim, para aplicar a matemática de forma contextualizada e conectada à realidade dos alunos, o professor precisa recorrer a materiais e produtos educacionais que concretizem essa aplicação de modo efetivo.

E como destacado anteriormente, uma proposta que pode promover de forma complementar a investigação do conhecimento matemático das funções exponencias a partir de situações problema e permitir a geração de modelos matemáticos é o jogo *Roleplaying Game*. Ademais, o *Roleplaying Game* se tratar de um jogo, oferece um elementos de ludicidade, tais como possibilitar tornar o aluno o protagonista do próprio processo de aprendizagem.

Assim, a elaboração de um Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, para alunos do ensino médio, com vista a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial, pode suprir as limitações observadas nos livros didáticos, ao ser utilizado após o ensino deste conteúdo.

Com isso, destacamos Roleplaying Game apresenta potencialidades para a aprendizagem do aluno, que serão exploradas mais a fundo no próximo capítulo. Além disso, o formato Livro-Jogo oferece uma abordagem prática e acessível para professores, sejam eles iniciantes ou experientes no uso do RPG, por se tratar de um produto pronto e completo a ser utilizado em sala.

Mas anterior a abordagem sobre o jogo Roleplaying Game e suas potencialidades, apresento um texto relacionado aos conteúdos de Função Exponencial com vistas a subsidiar a elaboração das atividades inseridas ao longo da proposta a ser elaborada, bem como contribuir à formação inicial ou continuada do professor de matemática. O texto contém sobre as potencias, cujo o expoente pertence ao conjunto dos números reais; define-se Função e alguns conceitos, para desta forma definir a Função Exponencial, e após realizar a caracterização desta função.

4. SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo apresento conteúdos matemáticos relacionados a Função Exponencial com vistas a subsidiar a elaboração das atividades inseridas ao longo do jogo, bem como contribuir à formação inicial ou continuada do professor de matemática. Utilizou-se como referências as obras de Bezerra (2018), Iezzi (2013), Lima (1996), Lima *et.al* (2016), Oliveira (2015), Stewart (2013), Táboas (2008).

4.1. POTÊNCIAS DE EXPOENTE REAL

Antes de abordar o estudo das funções exponenciais, é fundamental introduzir o conteúdo de potências, incluindo suas definições e resultados para cada conjunto numérico. Isso facilitará a compreensão e definição subsequente da Função Exponencial, bem como de suas propriedades e proposições.

Define-se a Potência de Expoente Natural, conforme Lima *et.al* (2016): Seja a um número real positivo e n um número natural. A potência a^n, onde há a convenção de chama a de base e n de expoente, é definida como o produto de n fatores iguais de a. Visto que não existe produto de um fator somente, para $n = 1$, põe-se $a^1 = a$.

Ademais, é definido que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se $a^{n+1} = a^n \cdot a$. A prova ocorre por meio da indução. Bezerra (2018), define que para provar que uma proposição $P(n)$ é válida para todo inteiro $n \geq n_0$, para algum inteiro n_0 fixado. São necessários dois passos:

I. Mostar que $P(n_0)$ é verdadeira, ou seja, que a propriedade é válida para o primeiro inteiro n_0.
II. Assume a propriedade $P(n)$ é verdadeira, e é preciso mostra que se $P(n)$ é verdadeira então $P(n+1)$ também será verdadeira.

Com isso, a prova de $a^{n+1} = a^n \cdot a$ é verdadeira, ocorre da seguinte forma, para $n_0 = 1$, tem-se que $a^{1+1} = a^2 = a^1 \cdot a$. E então se toma $a^{n+1} = a^n \cdot a$ como verdade, e é preciso mostrar que vale para $(n+1)$. Então:

$$a^{(n+1)+1} = a \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n\ vezes} = a \cdot a^n . a$$

Por hipótese $a^{n+1} = a^n \cdot a$, logo

$$a^{(n+1)+1} = a^{(n+1)} \cdot a$$

■

Com base nessas definições, para $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$ são válidas as seguintes propriedades para as potências de expoente natural:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Como estas propriedades são essenciais durante o trabalho e cálculo com potências de expoente natural, faz-se necessário terem sua validade demonstrada. Com base em Oliveira (2015), a primeira propriedade, comumente chamada de produto de potências de mesma base, pode ser demostrada por meio da indução. Para tal, é válida para $n_0 = 1$, pois que recai na proposição anterior $a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$.

Agora, suponha que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, logo para $(n + 1)$:

$$a^m \cdot a^{(n+1)} = a^m \cdot a^n \cdot a \xrightarrow{por\ hipótese} a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}$$

Já para a segunda propriedade, tem-se:

$$(a \cdot b)^m = (\underbrace{a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{m\ vezes} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ vezes} \cdot \underbrace{b \cdot b \ldots \cdot b}_{m\ vezes} = a^m \cdot b^m$$

Por fim, para a terceira, temos:

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = \underbrace{m+m+\cdots+m}_{n\ vezes} = a^{m \cdot n}$$

■

Uma característica do estudo de potências que auxiliará no posterior estudo da função exponencial é que se $a > 1$ então a sequência $(a, a^2, a^3, \cdots, a^n)$ é crescente. Se $0 < a < 1$ então a sequência $(a, a^2, a^3, \cdots, a^n)$ é decrescente.

Para provar o primeiro caso, se $a > 1$, basta multiplicar ambos os membros da inequação por a^n, assim obtém-se que $a^{n+1} > a^n$. Com o uso do mesmo procedimento no segundo caso, para $0 < a < 1$, tem-se $0 < a^{n+1} < a^n$.

Portanto,

$$a > 1 \implies 1 < a^1 < a^2 < a^3 < \cdots < a^n < a^{n+1}$$

$$0 < a < 1 \implies 1 > a^1 > a^2 > a^3 > \cdots > a^n > a^{n+1}$$

■

Com isso posto, é preciso agora compreender o comportamento da potência, quando $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, atribuir um significado para quando for um número negativo ou zero. Lima *et.al*. (2016), aponta que é preciso definir de forma que seja mantida a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Inicialmente, com base nos autores, para definir a^0 é necessário que seja válido $a^{n+1} = a^n \cdot a$, logo $a^{0+1} = a^0 \cdot a$, ou seja $a^1 = a^0 \cdot a$, portanto $a^0 = 1$. Agora a partir da definição de a^0, é possível compreender o comportamento de uma potência de expoente negativo. Assim dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, é preciso que:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1, \text{ logo: } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Agora, vamos provar que este argumento realmente mantem a prioridade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Com base em Oliveira (2015), é necessário analisar os casos possíveis em relação a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para exponentes inteiros, ou seja, que

Sejam $a\ \mathbb{R} - \{0\}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

e assim verificar se esta definição consegue preservar a prioridade. Para os casos analisados para as potências de expoente inteiro temos os seguintes: Os expoentes m e n ambos são positivos, outro caso é m e n ambos negativos, por fim m e n um positivo e outro negativo.

Primeiramente, suponhamos que expoentes m e n ambos são positivos, logo podemos afirmar que $m, n \in \mathbb{N}$, portanto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ é valido como demostrado anteriormente para expoentes naturais.

Para m e n ambos negativos, temos que $m, n \in \mathbb{Z} - (\mathbb{N} \cup \{0\})$, escrevemos $m = -x$ e $n = -y$, com $x, y \in \mathbb{N}$. Então:

$$a^m \cdot a^n = a^{-x} \cdot a^{-y} = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^{x+y}} = a^{-(x+y)} = a^{-x+(-y)} = a^{m+n}$$

Por fim m e n um positivo e outro negativo, suponhamos que $m = -x$ e $n = y$, com $x, y \in \mathbb{N}$ e $x < y$, tem-se:

$$a^m \cdot a^n = a^{-x} \cdot a^y = \frac{1}{a^x} \cdot a^y$$

Como $x < y$ e $x, y \in \mathbb{N}$, existe um número natural w de forma que $w + x = y$, logo

$$a^m \cdot a^n = a^{-x} \cdot a^y = \frac{1}{a^x} \cdot a^y = \frac{1}{a^x} \cdot a^{x+w} = \frac{a^{x+w}}{a^x}$$

$$a^w = a^{y-x} = a^{y+(-x)} = a^{(-x)+y} = a^{m+n}$$

Portanto, dado qualquer $n \epsilon \mathbb{N}$, tem-se que é válido:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

■

No conjunto dos números racionais, é preciso verificar o sentido para a potência a^r, quando $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$,de forma com que novamente seja mantido a propriedade $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Para isso, dada a seguinte potência, com $r = m/n$:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{r \cdot n} = a^m$$

Assim, como aponta Lima *et.al*. (2016) a^r pode ser tido como o número positivo real cuja n-ésima potência é a^m, portanto, por definição de raiz, este número é a raiz n-ésima de a^m, $\sqrt[n]{a^m}$. Dessa maneira, define-se a potência a^r, com $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, como:

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Agora, dado $a > 0$, com a^r definido para todo número racional r. É preciso assegurar que $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ vale para $r, s \epsilon \mathbb{Q}$, conforme Lima (1996). Assim, com $r = m/n$ e $s = u/v$ fracionários e $m, u \in \mathbb{Z}$, $n, v \in \mathbb{N}^*$. Dado as propriedades 1, 2 e 3 válidas para os números inteiros, por 3:

$$(a^r)^n = a^m \text{ e } (a^s)^v = a^u$$

Logo, por 2:

$$(a^r \cdot a^s)^{nv} = (a^r)^{nv} \cdot (a^s)^{nv} = a^{rnv} \cdot a^{snv} = a^{mv} \cdot a^{un} = a^{mv+un}$$

Assim, $a^r \cdot a^s$ é o número cuja nv-ésima potência é a^{mv+un}, logo por definição de raiz:

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[nv]{a^{mv+un}} = a^{(mv+un)/nv}$$

Como:

$$\frac{mv+un}{nv} = \frac{m}{n} + \frac{u}{v}$$

Portanto

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

■

Outro ponto que vale destaque acerca das potências de expoente racional, para Lima *et.al*. (2016), trata que embora estas potências não contenham todos os números reais positivos, em todo o intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r com $r \epsilon \mathbb{Q}$, desde que $a \neq 1$. Ou seja, tem-se o seguinte Lema, que posteriormente auxiliará a definir as potências de base irracional.

Lema: Fixado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r, com $r \epsilon \mathbb{Q}$.

Demonstração: Dado o intervalo $[\alpha, \beta]$, com $0 < \alpha < \beta$, para provar o lema, deve existir um a^r, com $r \epsilon \mathbb{Q}$, que pertença ao intervalo. Suponha que a e α sejam maiores que 1. Como será visto posteriormente durante estudo sobre a monotonicidade da função exponencial, as potências de expoente natural de números maiores que 1 crescem acima de qualquer cota fixada. Logo, obter-se $M, n \epsilon \mathbb{N}$ tais que:

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta-\alpha}{a^M}\right)^n$$

Segue que:

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta-\alpha}{a^M} \text{ e } 0 < a^M\left(a^{1/n} - 1\right) < \beta - \alpha$$

Tomando $m \epsilon \mathbb{Z}$, vale:

$$\frac{m}{n} \leq M \Longrightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha$$

Portanto,

$$0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha$$

Assim, as potências

$$a^0, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \dots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos com comprimento menor que $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. E como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

■

Para definir a^r, para r irracional, é necessário realizar o estudo através da função, $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$. Portanto, essa definição e a definição a^r, para r real, são apresentadas após a apresentação sobre a função exponencial.

4.2. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E ALGUNS CONCEITOS

Função pode ser definida dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B, denotada por $f: A \to B$, é a lei que associa cada elemento de $x \in A$ a um único elemento de $y \in B$, indicado por $f(x)$. E dada uma função $f: A \to B$, denotamos os conjuntos A e B como, respectivamente, *domínio* ou $D(f)$, e *contra-domínio* de f, $CD(f)$. Os elementos do domínio são chamados de *variáveis independentes* e os elementos do contra-domínio, *variáveis dependentes*.

■

Outro elemento de destaque nas função é a *imagem* da função, dado um y_0 pertencente ao contra-domínio de f, caso $y_0 = f(x_0)$, então y_0 é chamado de imagem de x_0. E O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A se denomina conjunto-imagem de f, e pode ser indicado com a notação $Im(f)$, e definido como:

$$Im(f) = \{y \in CD(f) | \exists x \in D(f); f(x) = y\}$$ ■

Ademais, seja uma função f de A em B. Dizemos que esta função é *injetora* e somente se, dado um elemento do domínio este nunca assume a mesma imagem duas vezes, isto é para qualquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Também, é possível definir uma função como *sobrejetora*. Dizemos uma função f de A em B esta função é *sobrejetora* se, e somente se, $\forall y \in CD(f)$ existe $x \in D(f)$, tal que $f(x) = y$.

■

Posteriormente, será necessário em algumas demonstrações o uso do Teorema da Sequência Monótona. Portanto, traremos este teorema e sua demonstração, segundo Oliveira (2015).

Teorema 1: *Toda sequência monótona limitada é convergente*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência monótona não-decrescente e limitada. Escrevendo os termos da sequência dada como um conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, então ele possui um supremo denotado por $a = supX$. Dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X, pois a é a menor das cotas. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n0} \leq a$. Portanto, $n > n_0 \Longrightarrow a - \varepsilon < x_{n0} \leq x_n < a + \varepsilon$, onde $lim\, x_n = a$. Ou seja, temos também que $lim\, x_n$ é o supremo do conjunto dos valores de x_n. De modo análogo prova que se (x_n) for não-crescente então $lim\, x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores de x_n.

4.3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição: Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. Chamamos $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de uma *função exponencial* de base a, aquela definida por $f(x) = a^x$.

Com isso, como apontado por Oliveira (2015), é possível observar então que na função exponencial a variável independente atua como o expoente de uma base positiva. Portanto, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

I. $a^x + a^y = a^{x+y}$;

II. $f(1) = a^1 = a$;

III. Se $x < y$ então $a^x < a^y$, quando $a > 1$ e

Se $x < y$ então $a^x > a^y$, quando $0 < a < 1$.

A partir, destas propriedades, algumas proposições podem ser observadas. Primeiramente, agora com a função exponencial definida, é possível, realizar o estudo sobre as potências de base irracional. Tomemos então como ponto de partida a propriedade III, para realizar o estudo.

A propriedade III no diz que a função exponencial definida de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, de forma a satisfazer esta propriedade para a^x com x irracional. Tomemos então $r, s \in \mathbb{Q}$, sendo dois números racionais que se aproximam por falta e excesso de x, respectivamente, e suponhamos ainda $a > 1$. Logo:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s$$

Ou seja, a potência a^x, cujo o expoente é um número irracional, pode ser definido como o número real cujas as aproximações por falta são a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s, com $s > x, s \in \mathbb{Q}$.

O número a^x está bem definido, pois não existem dois números reais distintos que satisfaçam a propriedade anterior. Para demonstrar isso, consideremos $a > 1$ (a prova para $0 < a < 1$ é análoga) e suponhamos que existam dois números reais distintos α e β, tais que:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < \alpha < \beta < a^s$$

Tal fato, irá contradizer o demostrado anteriormente, a qual foi mostrado que fixado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r, com $r \epsilon \mathbb{Q}$, dado que no intervalo compreendido entre α e β, não existe nenhuma potência de a^r, com r racional. Portanto, o número real cujas as aproximações por falta são a^r e cujas aproximações por excesso são a^s, com $r, s \in \mathbb{Q}$ e $r < x < s$, é único.

Desta forma, definido a^x para todo x real, pode-se iniciar o estudo sobre a função exponencial, visto que esta é definida de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

■

Dado a propriedade (I), a função exponencial $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, assume o valor 0, somente se for identicamente nula, ou seja, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pois, dado um $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$, então para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

Logo f será identicamente nula.

■

Ademais, por meio da propriedade (I) e da proposição acima, é possível demostrar a positividade da função exponencial, ou seja, que todo elemento do contra-domínio pertence aos $\mathbb{R}^+$. Pois, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a propriedade (I) e que não seja identicamente nula, tomando um $x \in \mathbb{R}$ arbitrário, temos:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Ou seja, o contra-domínio de qualquer função exponencial pode ser tomado, tanto como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$.

■

A função exponencial não possui limite superior, ou seja, não existe um número N, tal que N seja maior ou igual a todo elemento da imagem de f. Para verificar tal caraterística da função, demostremos que dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

Esta demonstração é baseada no lema anterior, a qual foi mostrado que em todo o intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r com $r \in \mathbb{Q}$, desde que $a \neq 1$. Ou seja, por toda a totalidade do $\mathbb{R}^+$ podemos encontrar uma imagem a^x de f, com um x racional. Assim, quando a função for crescente, $a > 1$, então a^x cresce sem limites, quando dado $x > 0$ torna-se ada vez mais grande. E no caso da função decrescente, $0 < a < 1$, a^x cresce sem limites conforme, dado $x < 0$, torna-se cada vez mais grande, em valor absoluto.

■

Na função exponencial, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, tem-se que $\lim_{x \to 0} a^x = a^0 = 1$. Esta afirmação será utilizada para a posterior prova da continuidade da função exponencial, visto isso segue a demonstração, com base em (Oliveira, 2015).

A demonstração decorre da definição de limite, Táboas (2008) define limite como, dados um função $f: B \to \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação a do conjunto B, diz-

se que o limite $\ell \in \mathbb{R}$ é o limite de f em a, ou em outra notação $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, se está satisfeita a seguinte condição:

Para todo $\mathcal{E} > 0$, existe um número $\delta = \delta(\mathcal{E}) > 0$ tal que

$$x \in B, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \mathcal{E}$$

Assim, com o uso dessa definição, devemos mostrar que para todo $\mathcal{E} > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - a^0| < \mathcal{E} \ (1.1)$$

Para mostramos que esta condição é satisfeita, vamos mostrar que é um absurdo que isto não ocorra, ou seja que $\lim_{x \to 0} a^x$ não seja a^0. Portanto, existe $\mathcal{E}_0 > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - a^0| \geq \mathcal{E}_0 \ (1.2)$$

Visto que deve valer $\delta > 0$, tomemos $\delta_n = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, o que implica que existe um $x_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |x_n - 0| < \frac{1}{n} \Rightarrow |a^x - a^0| = |a^{x_n} - 1| \geq \mathcal{E}_0 \quad (1.3)$$

Com base na primeira metade da sentença acima, temos que quando $n \to \infty$, $x \to 0$, visto que $\frac{1}{n}$ ficará cada vez menor. Pode-se, então, escolher uma subsequência (x_{nk}) de (x_n) de forma que (x_{nk}) seja monótona (decrescente ou crescente).

Suponhamos que (x_{nk}) seja decrescente (caso crescente é análogo). Notemos que $0 \leq x_{nk}$ e que $1 = a^0 \leq \cdots \leq a^{x_{nk}} \leq \cdots \leq a^{x_{n1}}$. Então $(a^{x_{nk}})$ é monótona decrescente e limitada. E sabe-se que toda sequência monótona limitada é convergente, como visto no Teorema 1, logo ela é convergente. Como $(a^{x_{nk}})$ é monótona decrescente, limitada e converge, os valores $a^{x_{nk}}$ tendem ao ínfimo de $a^{x_{nk}}$, a qual $inf a^{x_{nk}} = 1$.

Mas como $(a^{x_{nk}})$ é uma subsequência de (a^{x_n}), (1.3) deve valer também para $(a^{x_{nk}})$, contudo isso contraria o fato de que $a^{x_{nk}} \to 1 = inf\{a^{x_{nk}}, k \in \mathbb{N}\}$. Portanto, não existe um $\mathcal{E}_0 > 0$ tal que (1.2) seja verdade, ou seja, é um absurdo.

Dessa forma, tem-se que $\lim_{x\to 0} a^x = a^0 = 1$.

■

A função exponencial é contínua, como definido por Lima *et.al*. (2016), isso quer dizer que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Com o uso de uma análise mais informal, por ser contínua a função exponencial pode ser pode ser traçada em uma folha sem retirar a caneta do papel.

Ademais, para então provarmos a continuidade da função exponencial, tomemos $x = x_0 + h$ para algum $h \in \mathbb{R}$, então

$$|a^x - a^{x_0}| = \left|a^{x_0+h} - a^{x_0}\right| = a^{x_0}\left|a^h - 1\right|$$

Como visto na demonstração anterior, a^h irá tender a 1, conforme h seja suficiente pequeno, ou seja $a^h \to 1$ quando $h \to 0$. Assim, fazendo $x \to x_0$, então $h \to 0$. Logo

$$\lim_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = \lim_{h\to 0} a^{x_0}\left|a^h - 1\right| = \lim_{h\to 0} a^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0}\left|a^h - 1\right|$$

Como a^{x_0} é constante,

$$\lim_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} \cdot |1 - 1| = 0$$

Como, $a^x, a^{x_0} \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x\to x_0} a^x - a^{x_0} = \lim_{x\to x_0} a^x - \lim_{x\to x_0} a^{x_0} = \lim_{x\to x_0} a^x - a^{x_0} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

■

A função exponencial é uma função *bijetora*. A *injetividade* da função exponencial decorre da monotonicidade da função, pois como visto em (III), caso $a > 1$, então

$$x < y \Rightarrow\ a^x < a^y \text{ e } x > y \Rightarrow\ a^x > a^y$$

Portanto, para $x \neq y$, tem-se $a^x \neq a^y$.

De modo análogo para quando $0 < a < 1$,tem-se

$$x < y \Rightarrow\ a^x > a^y \text{ e } x > y \Rightarrow\ a^x < a^y$$

Portanto, para $x \neq y$, tem-se $a^x \neq a^y$.

Agora, para provar que a função exponencial é *sobrejetiva*, temos que mostrar que para todo $y > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x = y$, ou em outras palavras que todo elemento do contradomínio é imagem de f.

Como visto, anteriormente em todo o intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r com $r \epsilon \mathbb{Q}$, desde que $a \neq 1$. Dessa forma, esse lema nos garante que para cada $n \epsilon \mathbb{N}$, existe uma potência a^{r_n}, com $r \epsilon \mathbb{Q}$, que pertence ao intervalo $\left(y - \frac{1}{n}; y + \frac{1}{n}\right)$. Com isso, temos que $|a^{r_n} - y| < \frac{1}{n}$, e, portanto, podemos dizer que $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = y$.

Para $a > 1$, escolheremos as potências sucessivas de a^{r_n}, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < y$$

Visto que a função exponencial, como visto anteriormente, é ilimitada superiormente, então existe uma potência a^s, com $s \epsilon \mathbb{Q}$, tal que $y < a^s$. E como a função exponencial é monótona e crescente, neste caso, temos que

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s$$

Dessa forma, como (r_n) é uma sequência monótona, cujos os elementos estão limitado superiormente por s. E como descrito por Stewart (2013), o axioma da completude nos diz que para o conjunto dos números reais, que diz que, se S é um conjunto não vazio de números reais, e é limitado superiormente, então S admite um supremo. Tomando o supremo de (r_n) como um número real qualquer x, temos que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Como a função exponencial é contínua, temos que

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = y$$

Ou seja, mostramos que todo $y > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x = y$. Logo a função exponencial é *sobrejetiva*. A demonstração para o caso $0 < a < 1$, é realizado de forma análoga.

■

A partir do debatido acimas acerca da função exponencial, tem-se que

$$\operatorname{Lim}_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \text{ caso } a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \text{ caso } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \text{ caso } a > 1$$

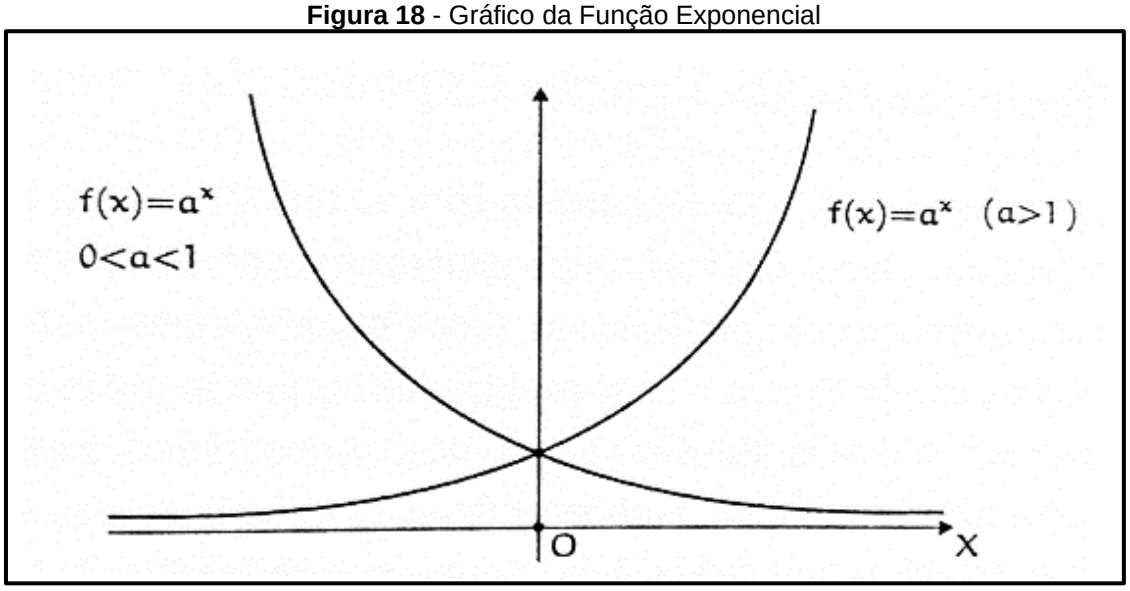
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \text{ caso } 0 < a < 1$$

4.3.1. O gráfico da Função Exponencial

A partir dos elementos discutidos acima, pode-se apontar que o gráfico da função exponencial possui as seguintes características:

- É um gráfico contínuo, ou seja, sem descontinuidades ou alterações bruscas ao longo de seu traçado;
- O domínio está compreendido em $(-\infty; +\infty)$ e o conjunto imagem em $(0; +\infty)$;
- Como visto, a função exponencial é monótona, ou seja, seu gráfico é crescente, se $a > 1$, e decrescente $0 < a < 1$;
- É ilimitada superiormente, mas limitada inferiormente;
- Intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0,1)$;
- Não intercepta o eixo das abcissas em nenhum ponto;

Figura 18 - Gráfico da Função Exponencial



Fonte: Lima *et.al*. (2016, p. 185)

Em relação ao crescimento e decrescimento da função, de acordo com Lima *et.al*. (2016). Quando $a > 1$, ou seja, quando é crescente, nota-se que a curva apresenta um crescimento lento conforme o valor de x aumenta, enquanto negativo. Conforme que x cresce, o crescimento de y, torna-se cada vez mais acelerado.

O mesmo ocorre quando $0 < a < 1$. Quando x varia da esquerda para a direita, apresenta um decrescimento acelerado enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o decrescimento de y se torna cada vez mais lento.

Este fato, reflete na inclinação da tangente do gráfico, se $a > 1$; para valores muito grandes de x, a tangente é quase horizontal, e assim como destaca Lima *et.al*. (2016) o crescimento exponencial superar o de qualquer polinômio. E se $0 < a < 1$, o mesmo ocorre para valores negativos de x*,* cujo valor absoluto são muito grandes.

4.4. CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Em conjunto com a função afim e a função quadrática, a função exponencial constitui um dos modelos mais recorrentes na resolução de problemas elementares em ambiente escolar. Assim, para determinar o modelo mais adequado ao estudo de um problema, é imprescindível compreender as propriedades características de cada função. Dessa forma, torna-se necessário destacar as propriedades específicas da função exponencial, o que é abordado no seguinte teorema. Com base em Oliveira (2015) e Lima *at. al* (2016), temos:

Teorema da Caracterização da função exponencial: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, uma função monótona e injetora. As seguintes afirmações são equivalentes.

I. $f(xn) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

II. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

III. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Para provar esta afirmação, seguiremos da seguinte forma $(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{III}) \Rightarrow (\mathrm{I})$.

Para provar que $(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II})$, iniciemos com a hipótese (I) e mostrar que é válida para todo número racional $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $f(rx) = f(x)^r$.

Escrevendo $nr = m$, temos

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m .$$

Logo

$$f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r .$$

Além disso para, $f(1) = a$, tem-se

$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Agora, suponhamos que f seja uma função crescente, portanto o $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos agora, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq a^x$. Se $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é análogo), então segundo o Lema de que em todo o intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r com $r \in \mathbb{Q}$, desde que $a \neq 1$, temos que existe um número racional r tal que

$$f(x) < a^r < a^x \Rightarrow f(x) < f(r) < a^x$$

Como f é crescente, então se $f(x) < f(r)$ implica que $x < r$. Mas como visto acima $a^r < a^x$, o que implica que $r < x$. Assim temos uma contradição, então é um absurdo afirmar que exista um $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq a^x$. Logo $f(x) = a^x$, o que prova que $(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II})$, quando f for crescente. A prova é análoga para f decrescente.

Para provar que $(\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{III})$, temos que seja $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $a = f(1)$. Sendo $y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

Por fim, para $(\mathrm{III}) \Rightarrow (\mathrm{I})$, seja $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{n \text{ vezes}} = f(x)^n$$

Agora para o caso de n ser um número negativo, ou de outra forma o caso $f(-nx) = f(x)^{-n}$. Para isto, analisemos o caso $f(-x)$. Temos que

$$f(-x) \cdot f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Com base nisso, tem-se

$$f(-nx) = f(\underbrace{-x - x - x - \cdots - x}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(-x) \cdot f(-x) \cdot f(-x) \cdots f(-x)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{f(x)}}_{n \text{ vezes}} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}$$

■

Pode-se destacar, também, as funções do tipo exponencial. Visto que em muitas situações problemas que possuem um crescimento ou decrescimento exponencial, como o montante de uma aplicação a juros compostos em função do tempo, ou como também a desintegração radioativa; estas aparecem na forma que chamamos de "tipo exponencial". Este tipo de função pode ser definida como:

Definição: Uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas.

Além disso, Oliveira (2015) afirma que as funções de tipo exponencial gozam das mesmas propriedades da função exponencial, tais como, a monotonicidade, a injetividade e serem crescentes quando $a > 1$ e decrescentes quando $0 < a < 1$. Agora partiremos para caracterizar este tipo de função.

■

Teorema da Caracterização da função de tipo exponencial: Uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é de tipo exponencial se, e somente se, for monótona e injetora, tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, $g(x + h)/g(x)$ depende apenas de h, mas não de x.

Este teorema indica que as situações em que o modelo matemático das funções do tipo exponencial deve ser aplicado são aquelas em que a variação relativa independe do valor de x, mas sim do acréscimo h aplicado a x. Como por exemplo, a meia-vida de uma substância radioativa, que corresponde ao tempo necessário para que metade da massa de uma amostra se desintegre. Nesse contexto, o tempo necessário para reduzir pela metade a radioatividade de uma tonelada de urânio é o mesmo que para um grama da mesma substância.

Demonstração: Seja $g(x) = a, b \in \mathbb{R}^+$. Então

$$\frac{g(x + h)}{g(x)} = \frac{ba^{x+h}}{ba^x} = \frac{ba^x(a^h)}{ba^x} = a^h$$

Dessa forma, percebe-se que $g(x + h)/g(x)$ depende apenas de h e não de x. Com isso, seja $g(x + h)/g(x) = \phi(h)$, e definindo $f(x) = g(x)/b$, com $b = g(0)$. Então f é monótona e injetora. Temos

$$\frac{f(x + h)}{f(x)} = \frac{g(x + h)/b}{g(x)/b} = \frac{g(x + h)}{g(x)} = \phi(h).$$

Com isso, como $f(0) = 1$, podemos então colocar $x = 0$ na igualdade, obtendo

$$\frac{f(x + h)}{f(x)} = \phi(h) \Rightarrow \frac{f(0 + h)}{f(0)} = \phi(h) \Rightarrow \frac{f(h)}{1} = \phi(h) \Rightarrow f(h) = \phi(h)$$

Assim, f cumpre a propriedade $f(x + h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, logo, com base no teorema da Caracterização da função exponencial, podemos afirmar que $f(x) = a^x$. Por fim, isso resulta em $g(x) = bf(x) = ba^x$, ou seja, é uma função do tipo exponencial.

■

5. UM OLHAR SOBRE O JOGO *ROLEPLAYING GAME*

Neste capítulo á apresentado o *Roleplaying Game* e suas variantes, com vistas a seleção de uma dessas variantes que possibilite seu uso na consolidação de conteúdos matemáticos relacionados a função exponencial. Assim, o capítulo tem início com uma exposição sobre os jogos de RPG para aqueles que não estão familiarizados com esse gênero, com um pouco de sua definição, como jogar e as diferentes variações. Em seguida, é dissertado acerca do uso deste jogo em sala da aula, as quais apresenta potencialidades, tanto por conta dos argumentos sobre o uso de jogos no ensino, como por elementos exclusivos do jogo *Roleplaying Game.* E por fim, argumenta-se sobre a seleção da variante do Livro-Jogo para o uso na pesquisa.

5.1. O QUE SÃO OS *ROLEPLAYING GAMES*?

O *Roleplaying Game*, que do inglês significa “jogo de intepretação”, frequentemente abreviado como RPG, é uma modalidade de jogo no qual os jogadores interpretam a identidade de personagens inseridos na trama, sendo responsáveis por descrever suas ações e tomar decisões para superar os desafios propostos. Assim, constitui como um jogo cuja essência reside na narrativa colaborativa, na qual todos os participantes contribuem para o seu desenvolvimento e construção.

Dessa maneira, o jogo se assemelha à experiência de ler uma história em um livro, contudo, essa narrativa é construída de forma oral pelos participantes, à medida que progridem na aventura, com base em suas escolhas e interações (Amaral, 2013, p.9). Para a elaboração da história, os participantes são divididos em duas categorias distintas: Narrador e os jogadores, ou como chamados de Mestre e *players*[3].

O Mestre desempenha o papel de apresentar e conduzir a narrativa, semelhante ao narrador de um livro ou ao roteirista de um filme. Compete a ele desenvolver o enredo principal, narrar os acontecimentos e criar os desafios que os jogadores enfrentarão. Além disso, é comum que o Mestre assuma o papel de árbitro

[3] Em tradução livre do inglês significa “jogadores”.

durante o jogo, com a responsabilidade de garantir o cumprimento das regras estabelecidas. Nesse sentido, cabe ao Mestre estar atento às ações dos jogadores e assegurar que estas estejam em conformidade com as normas do jogo (Marcatto, 1996, p. 15).

Os *players* desempenham o papel de protagonistas, guiando os eventos da história por meio de suas ações e escolhas, utilizando seus personagens como veículos para essa interação. Podem ser comparados aos protagonistas de livros ou aos atores de um espetáculo teatral. Cada *player* elabora um personagem para si, delineando minuciosamente seu perfil psicológico, suas aptidões intelectuais e físicas, suas preferências e habilidades distintivas, bem como suas fraquezas, que contribuirão para enriquecer a trama. Esses personagens devem ser concebidos de forma a se adequar ao ambiente narrativo proposto pelo do Mestre, este ambiente no qual se desenvolverá a aventura, no linguajar desses grupos, é chamado de *mundo* ou *cenário* (Pavão, 2000).

No contexto dos jogos de RPG, também há os Personagens Não Jogáveis, conhecidos como NPCs (*Non-player Characters*[4]). Estes personagens são criados e controlados pelo narrador ou pelo sistema do jogo, para interagir com os personagens controlados pelos jogadores. Os NPCs podem variar em complexidade e importância, desde simples aldeões até figuras-chave na história. Além disso, podem ter personalidades distintas, oferecendo uma diversidade de interações aos jogadores. Por exemplo, quando os personagens dos jogadores exploram um mercado, cabe ao mestre do jogo interpretar o papel do comerciante, e apresentar seus produtos e interagindo com os personagens dos jogadores, enquanto outros NPCs podem desempenhar papéis como aliados, antagonistas ou fornecedores de missões, o que enriquece assim a experiência de jogo.

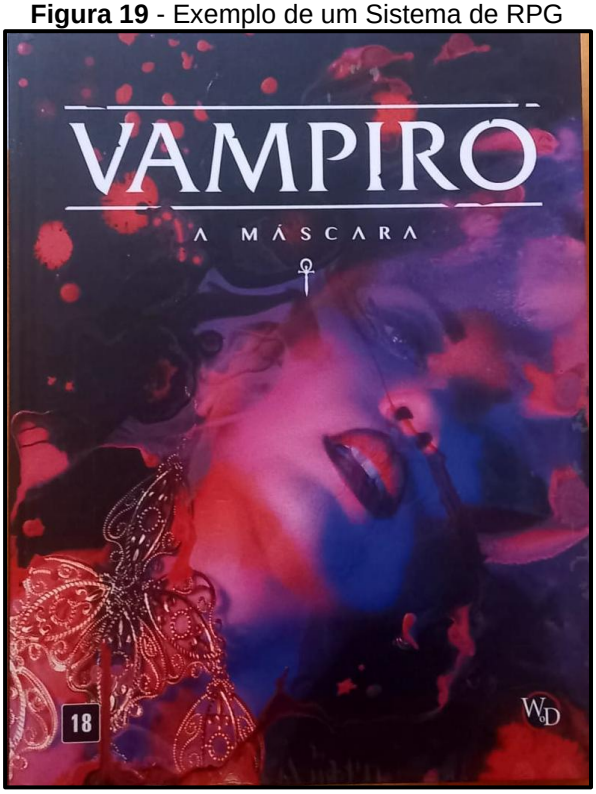
Para guiar a estruturação desta narrativa, ambientação do cenário, criação dos personagens, entre outros aspectos; os jogos de RPG exigem a leitura de livros de regras. O aspecto central e característico de um jogo de RPG são os livros de regras, comumente referidos como "Sistemas", estes abarcam todas as informações necessárias para o mestre e os jogadores iniciarem uma partida.

---

[4] Termo do inglês que significa “Personagem Não Jogável”.

Conforme ressaltado por Vasques (2008), essa característica não o distingue significativamente de outros jogos, pois é comum que qualquer jogo contenha um manual que oriente os jogadores. No entanto, os livros de RPG vão além de simples manuais de regras, pois abarcam um universo ficcional completo, englobando aspectos como geografia, história, economia e religião, além de apresentar descrições minuciosas dos habitantes desse universo. Essa ampla gama de informações tem como propósito auxiliar e inspirar o desenvolvimento e a construção da narrativa pelos jogadores.

Figura 19 - Exemplo de um Sistema de RPG



Fonte: Acervo do autor, 2024.

Como apontado por Pavão (2000), no amplo panorama dos sistemas de RPG, existe uma variedade de cenários clássicos que proporcionam o contexto para as aventuras dos jogadores, incluindo mundos medievais, futuristas, de vampiros, dragões, entre outros. A partir das informações fornecidas pelo mestre sobre o cenário e a história que será vivenciada, os jogadores concebem e desenvolvem seus personagens.

Entretanto, ler a totalidade desses livros de regras, não é imprescindível, já que muitos deles possuem extensas quantidades de páginas. No entanto, é crucial ter um bom entendimento das regras e da elaboração dos personagens. Cabe ao mestre decidir o nível de complexidade que será empregado na história (Marcatto, 1996).

No contexto do RPG, onde os jogadores desfrutam de liberdade para agir e determinar as ações de seus personagens, o conhecimento das regras desempenha um papel crucial. As regras são responsáveis por determinar os resultados das ações dos personagens, visto que o RPG é um jogo de interpretação.

Dentro desse cenário, os dados são frequentemente utilizados como a ferramenta primária para a determinação dos resultados das ações dos personagens, devido à sua natureza aleatória e imparcial. Quando um jogador decide a ação de um personagem, ele lança um dado ou mais dados, e caso o resultado seja favorável, a ação é bem-sucedida; caso contrário, ela falha.

Cada sistema de RPG especifica quais tipos de dados devem ser utilizados, que variam desde os mais comuns, com 6 faces, até os mais complexos, com 12 ou 20 faces. É comum entre os jogadores de RPG utilizar a letra "d" para denotar a palavra "dado", seguida do número de faces do dado em questão, como "d20" para um dado de 20 faces. Assim, durante as partidas, é comum o uso de dados de 4, 6, 8, 10, 12 e 20 faces, em cada sistema se define quais dados serão empregados.

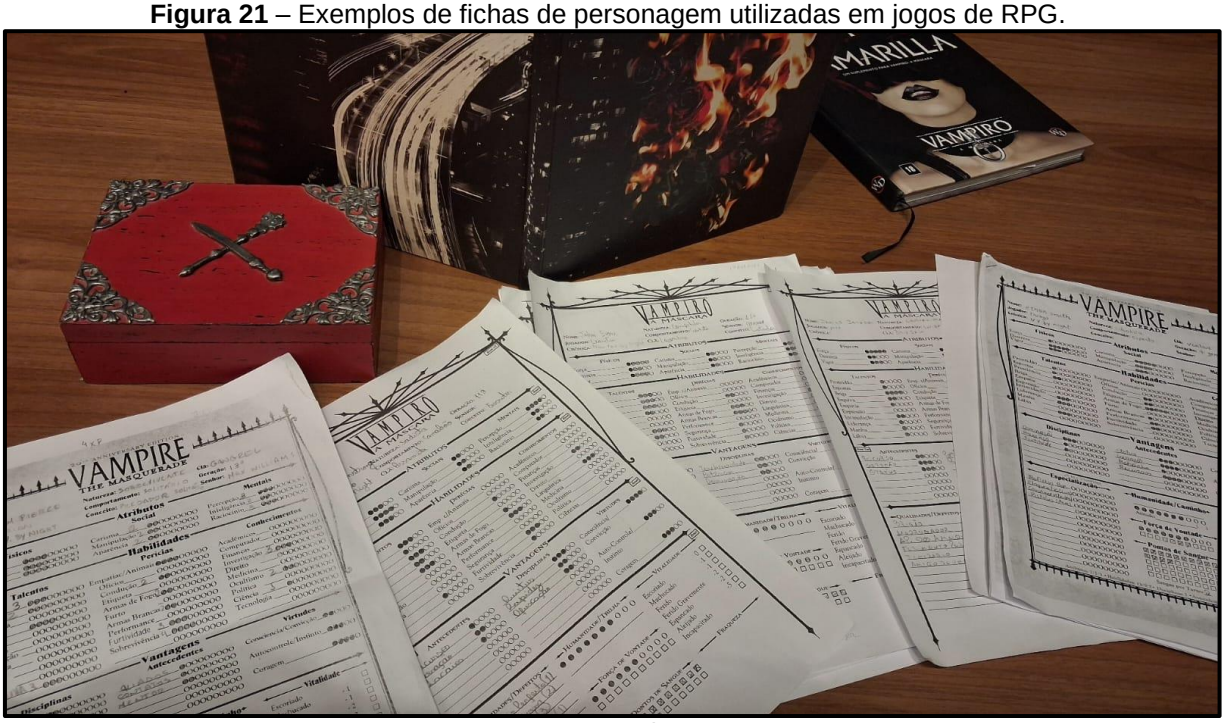
Figura 20 - Dados utilizados em jogos de RPG[5]

Fonte: Acervo do autor.

Em adição aos dados, outro fator crucial são as Fichas de Personagem. Nessas fichas os jogadores descrevem o personagem criado, muitas vezes contêm informações sobre o nome, aparência, idade; mas principalmente descrevem as habilidades e defeitos do personagem. Caso um personagem é bom em artes marciais, esta característica estará presente na ficha. Além disso cada sistema de RPG possui seu modelo de ficha, bem como o passo a passo de criação do personagem e preenchimento das informações.

[5] Os dados, da esquerda para a direita, correspondem, respectivamente, aos de 4, 6, 8, dois de 10, 12 e 20 faces.

Figura 21 – Exemplos de fichas de personagem utilizadas em jogos de RPG.



Fonte: Acervo do autor.

As vantagens, desvantagens, conhecimentos e habilidades dos personagens são determinadas antes do início de uma partida, pois cabe ao jogador definir as áreas em que seu personagem é habilidoso ou não. Essas características são representadas por valores numéricos em uma ficha de personagem, os quais auxiliam nas jogadas de dados. Por exemplo, se um personagem seja hábil em corridas e outro não, seria injusto decidir o resultado de uma disputa baseado unicamente na aleatoriedade dos dados. A habilidade em corrida conferiria uma vantagem, aumentando a probabilidade de obter um resultado favorável nos dados. Isso não elimina a possibilidade de ainda assim perder a corrida, mas o personagem habilidoso teria uma vantagem significativa, aumentando suas chances de sucesso.

Assim, todo este conjunto de regras, presentes nos sistemas, estão para dar imparcialidade e coerência na narrativa, para que os jogadores saibam que podem tomar qualquer decisão dentro do jogo, mas nem sempre o resultado sairá como o esperado, o que gera um dos aspectos mais interessantes do RPG, o uso da criatividade para contornar situações de dificuldade.

As regras são estabelecidas com o propósito de assegurar imparcialidade e coesão na narrativa, proporcionando aos jogadores a liberdade de tomar decisões dentro do contexto do jogo. No entanto, é importante ressaltar que os resultados nem sempre correspondem às expectativas, o que constitui um dos aspectos mais

fascinantes do RPG: a necessidade de empregar a criatividade para superar obstáculos e contornar situações adversas.

Os jogos de RPG abrangem uma vasta diversidade, cada um marcado por suas próprias peculiaridades, mecânicas, regulamentos e modalidades de jogo. Esta diversidade decorre da singularidade inerente a cada sistema de RPG. Para além das regras, muitos sistemas adotam temas e gêneros distintos, como aventura, ação, terror e investigação. Alguns são concebidos para todas as faixas etárias, ao passo que outros são direcionados para um público mais jovem ou adulto. No entanto, um princípio fundamental dos RPGs é a liberdade e o estímulo à criatividade por parte dos jogadores.

Conforme observado por Fernandes (2017), embora cada variante de *Role Playing Game*[6] possua um sistema próprio, os jogadores desfrutam da autonomia de mesclar elementos de diferentes sistemas e mecânicas para personalizar sua experiência de jogo. Por exemplo, no caso do RPG do tipo Aventura Solo, é comum empregar um sistema baseado na tomada de decisões por meio de perguntas, dados e outros elementos interativos para criar desafios, em conjunto com a utilização da mecânica de parágrafos desordenados para modelar a narrativa.

5.2. DIFERENTES TIPOS DE *ROLEPLAYING GAMES*

RPG de Mesa é uma modalidade tida como o RPG tradicional, no qual mais se encaixa com as descrições anteriormente dadas, na qual os participantes assumem o papel de personagens fictícios em um mundo imaginário. Durante o jogo, um dos participantes atua como o mestre, também conhecido como narrador, conduzindo a história e descrevendo o cenário em que os personagens estão inseridos. Os outros jogadores interpretam os papéis dos personagens que criaram, tomando decisões e interagindo com o mundo criado pelo mestre.

Originado durante os anos 1970, pelos os escritores Gary Gygax e Dave Arneson que inspirados pelo universo de fantasia de Terra-Média criado por J.R.R.

---

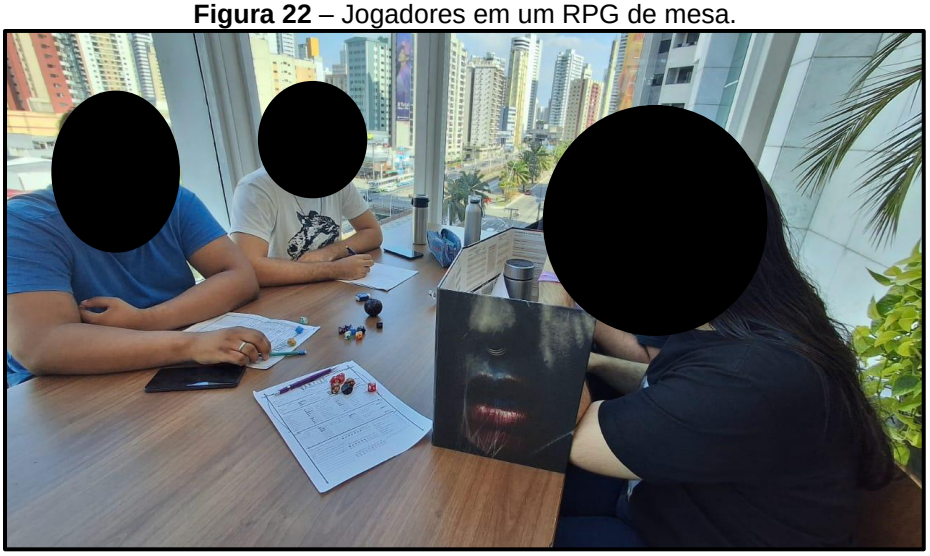
[6] A distinção entre as duas formas escritas: "*Role Playing game*" e "*Roleplaying Game*", evidenciadas nesta passagem, decorre do fato de que os termos são apresentados de maneira diferente em obras diversas. Fernandes (2017) emprega o termo "Role Playing Game", logo, optou-se por manter a forma de escrita utilizada pelo autor.

Tolkien e pelos war games, ou jogos de estratégia, desenvolveram do primeiro RPG, conhecido como Dungeons & Dragons, ou simplesmente D&D. O que rompeu com o padrão de controle de tropas e exércitos comuns nos jogos de estratégia, permitindo aos participantes assumirem o papel de um único personagem e explorarem um mundo imaginário por meio da imaginação (Vasques, 2008).

O sucesso de Dungeons & Dragons impulsionou o desenvolvimento de uma série de outros jogos de RPG, expandiu para além da fantasia mágica característica do D&D. Temáticas como ficção científica e terror ganharam destaque. No Brasil, o RPG se popularizou em 1991 com o lançamento do RPG GURPS pela Devir Livraria, seguido, em 1994, pelo jogo da série Storyteller chamado Vampiro: A Máscara. Este último, um RPG de horror pessoal, permitia aos jogadores interpretarem vampiros (Vasques, 2008).

Nesse contexto, esse tipo de RPG é caracterizado pela centralidade de um sistema de regras que serve como estrutura para a criação e desenvolvimento de uma narrativa, com um grupo de participantes geralmente composto por entre 4 e 10 jogadores. Cabe a esses jogadores realizarem escolhas cruciais, como a seleção do sistema de regras a ser utilizado, a designação do mestre responsável por elaborar os fundamentos da narrativa a ser vivenciada e a subsequente criação dos personagens. Com o auxílio de dados, que são empregados para determinar os desdobramentos das ações dos personagens, tais como combates, testes de habilidade ou a solução de enigmas, a trama se desenvolve de maneira colaborativa, por meio da participação ativa de todos os envolvidos no processo narrativo.

Figura 22 – Jogadores em um RPG de mesa.



Fonte: Acervo do autor.

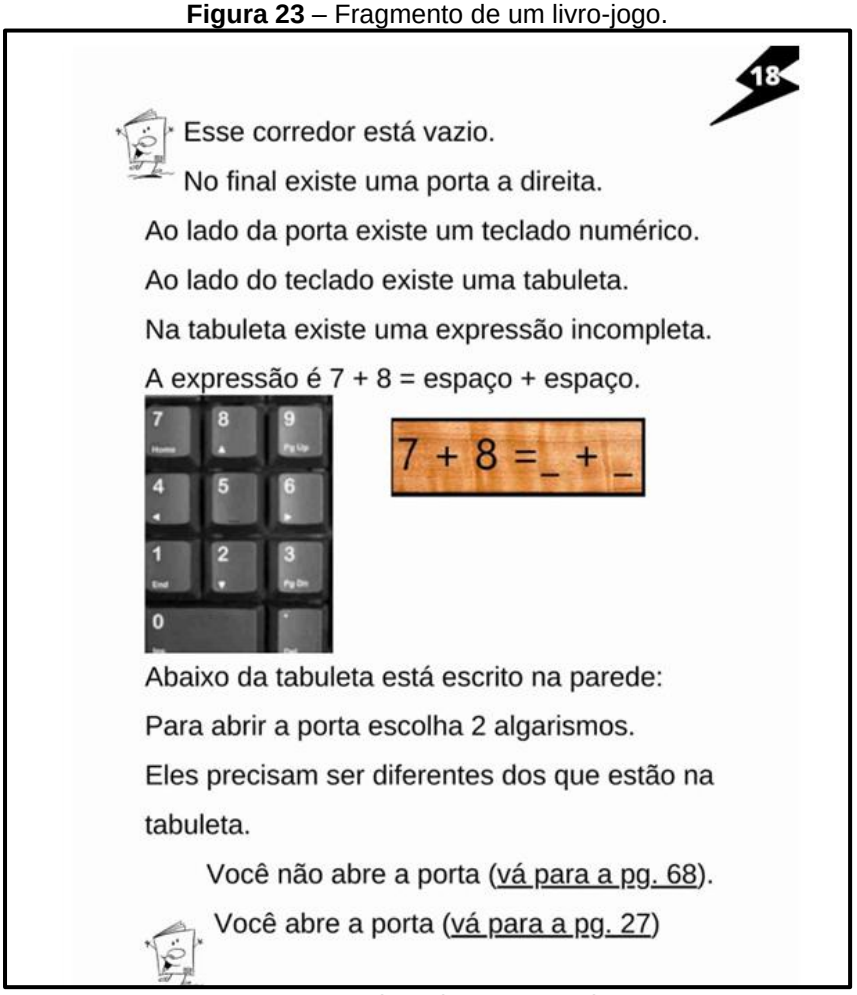
Live Action Role-Playing (Larp) é similar ao RPG de Mesa, contudo, com distinções notáveis. Fernandes (2017) descreve que nesse formato, os participantes encarnam os papéis de seus personagens, representando-os como atores em uma encenação teatral. E, diferentemente do RPG de mesa, no qual o cenário é narrado pelo mestre, nos LARP's os jogadores interagem em um ambiente físico, muitas vezes utilizando o espaço ao seu redor como parte integrante do cenário do jogo. Ademais, quando um jogador deseja executar uma ação que depende das habilidades do seu personagem, em vez de lançar dados para determinar o resultado, ocorre uma análise comparativa entre os atributos do personagem pertinentes à situação.

RPG Eletrônico representa uma vertente do RPG que se desenrola em ambientes digitais, como em computadores, celulares ou consoles de vídeo game. Neles, os jogadores imergem em universos virtuais, seja de forma online ou offline, assumindo os papéis de seus personagens e explorando narrativas intricadas em cenários interativos. Ao contrário do RPG de mesa, onde a narrativa é frequentemente conduzida pelo mestre do jogo, a trama pode ser pré-programada pelos desenvolvedores do jogo, embora haja espaço para escolhas que impactam o desenrolar da história.

Aventura solo ou Livro-jogo, diferentemente dos RPGs tradicionais, o jogador atua de forma solitária. Conforme Fernandes (2017) observa, nessa variante o jogador assume o papel de protagonista, enquanto o livro desempenha o papel do mestre, oferecendo ao longo da narrativa diversas opções ao leitor, que deve decidir qual delas seguir, influenciando assim o desenvolvimento da história. Embora essa abordagem sacrifique a interatividade entre os jogadores característica do RPG tradicional, ela explora de maneira mais individual a tomada de decisões por parte do jogador.

O funcionamento desse tipo de jogo, conforme descrito pelo autor, se dá mediante a apresentação de uma ou até três opções de escolha ao final de cada parágrafo, cada uma direcionando o leitor para uma parte distinta do livro. Adicionalmente, os parágrafos são numerados e embaralhados para evitar uma leitura linear por parte do jogador ou leitor. Assim, por meio da leitura e das escolhas feitas, o jogador avança na narrativa, podendo alcançar diferentes desfechos conforme suas decisões ao longo da trama, e este pode jogar aventura novamente caso acredite que não alcançou o final desejado.

Figura 23 – Fragmento de um livro-jogo.



Fonte: Cardoso (2023, p. 188).

5.3. POTENCIALIDADES DO *ROLEPLAYING GAME* NO ENSINO

Os jogos de RPG no Brasil não são uma novidade devido principalmente à juventude da década de 1980, que em viagens ao exterior entravam em contato com livros de sistemas de RPG e acabavam por trazer alguns exemplares na bagagem.

Inicialmente por meio da disseminação de cópias impressas, muitos títulos obtiveram boa recepção, portanto não é surpresa o sucesso na década seguinte dos sistemas Vampiro: A Máscara e GURPS entre os brasileiros. Nos anos 2000, é possivel observar um cenário nacional consolidado com a publicação dos jogos como Tormenta e 3D&T demonstrando o contínuo e robusto crescimento do mercado de RPG no Brasil (Oliveira e Rocha, 2020).

A inserção e popularização destes tipos de jogos no Brasil, promoveu diferentes eventos sobre o tema, contudo no Brasil o I Simpósio de RPG e Educação, ocorrido

em 2002, foi um marco ao se voltar a discursões acadêmicas sobre o RPG, diferente dos habituais voltado a somente jogadores (Vasques, 2008).

Em edições seguintes, em 2003, o II Simpósio permitiu que professores iniciantes criassem e narrassem suas próprias histórias pedagógicas para crianças, além de incluir palestras sobre experiências e análises do RPG. O III Simpósio, realizado em 2004, contou com a participação de professores e criadores de RPG que compartilharam suas experiências em áreas como química, matemática e arqueoastronomia. A quarta edição, de 2006, direcionada a estudantes universitários e incluiu palestras sobre uma variedade de temas, desde o ensino de biologia celular até análises sociológicas e psicológicas (Vasques, 2008).

Após 18 anos, em 2024, ocorreu a 5° edição do simpósio, renomeado para V Simpósio de RPG, Larp e Educação, ocorrido de 8 a 16 de junho de 2024. Realizado de forma online[7], destinada a educadores interessados em explorar novas abordagens educacionais e para aqueles que ainda não estão familiarizados com os jogos de interpretação. Para isso o evento trouxe palestras para expor como utilizar o RPG e o Larp nas mais variadas disciplinas do Ensino Básico, além de debater sobre o Design e a criação de jogos para aqueles que buscassem desenvolver seu próprio RPG. Ademais ocorreram mesas de RPG gravadas para apresentar o jogo para os inscritos que não possuíssem familiaridade. Por fim, o evento contou com a presença de professores, acadêmicos, autores, designer brasileiros e do exterior.

Com isso, é notável a que a discursão sobre a inserção dos jogos de RPG e de interpretação em sala de aula é antiga. Isto corrobora mais com este fato é a análise realizada por Schmit (2008, p.82), este expõe que desde 1997 eram desenvolvidas pesquisas nas universidades brasileiras acerca do RPG. No trabalho do autor é possível destacar que ainda durante o período que vai de 1997 e 2006, ocorreu a produção de 6 teses e 29 dissertações de mestrado sobre o tema RPG. O que demostra a relevância que o tema desenvolveu dentro do âmbito acadêmico.

A partir da observação da crescente produção acadêmica acerca dos jogos de RPG e sua utilização em sala de aula, se torna necessário investigar as motivações que levam o RPG a se tornar objeto de estudo e quais as potencialidades que esse jogo possui quando inserido em sala de aula, em especial em aulas de matemática.

---

[7] As atividades realizadas no evento estão disponíveis de forma online no seguinte endereço da web: https://youtube.com/playlist?list=PLfB5KbDQE1Uvnb5bu5Nn3v4m9TId-ta1y&si=J3J53UznDy2ZAqfQ

Levando em consideração que a utilização de jogos não é algo estranho às metodologias de ensino, o RPG pode ser enquadrado com as mesmas possibilidades que outros jogos, no processo educacional. Entretanto, assim como cada jogo possuí particularidades que requerem adaptações e objetivos distintos, os sistemas de RPG se apresentam como um grande potencial de arranjo para diferentes situações propostas em sala de aula.

5.3.1. Potencialidades do *Roleplaying Game*

Como o *Roleplaying Game* (RPG) é, por natureza, um jogo, ele compartilha as mesmas potencialidades atribuídas ao uso de jogos na Educação Matemática as quais foram destalhas de forma mais completa no tópico 4.2 JOGOS COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO. Além destas, o *Roleplaying Game* possui potencialidades específicas deste tipo de jogo, e são estas as quais destacamos a seguir.

Dado o caráter interpretativo distinto do RPG, é possível identificar diversas potencialidades para seu uso em sala de aula. Este trabalho, destaca as aplicáveis à disciplina de matemática, as potencialidades são divididas em duas categorias: a relação aluno-personagem e a relação aluno-narrativa. Na relação aluno-personagem, analisa-se como a interpretação e as ações desempenhadas pelo personagem influenciam o aluno. Já na relação aluno-narrativa, tem o foco em como as situações vividas na narrativa instigam e engajam o aluno no aprendizado matemático.

Na **Relação aluno-personagem**, sendo o RPG essencialmente um jogo de interpretação de papéis, o aluno, ou grupo de alunos, ao jogar, assume a interpretação de um personagem. Esse personagem pode ser tanto uma extensão do próprio aluno quanto possuir características e experiências totalmente distintas do indivíduo.

Hammer et al. (2018) destacam dois efeitos relacionados à interpretação: a tomada de perspectiva e a tomada de experiência. O primeiro diz respeito à apreciação e compreensão dos pontos de vista de outrem, com isso os alunos podem vivenciar sensações sob a perspectiva de alguém diferente de si. O segundo vai além de apenas imaginar o que outra pessoa pode sentir; as pessoas podem experimentar as situações de um RPG como se tivessem acontecido com elas.

Na disciplina de matemática, por exemplo, os alunos podem assumir as perspectivas e vivenciar as experiências como se fossem cientistas ou matemáticos durante a realização de experimentos. Isso permite a exploração de conceitos matemáticos e científicos, e demonstrar ao aluno como ocorre o trabalho e a pesquisa científica.

Hammer et al. (2018) destacam, também, o que definem como *Vicarious Experience* (Experiência vicária[8]), a qual as experiências vividas no RPG, não necessariamente necessitam se alinhar com as experiências que estão disponíveis para realidade. Assim o RPG permite ao aluno experimentar vivências as quais não seria possível de outra forma. Um exemplo seria experimentar ser um matemático grego e auxiliar Euclides na formulação de algum de seus postulados.

Sobre a **Relação aluno-narrativa**, observa-se que no RPG, além de interpretar um personagem, o jogador deve interagir com a narrativa elaborada e planejada pelo mestre/professor. As ações do jogador influenciam diretamente o desenvolvimento da aventura. Assim, por meio da participação nessa narrativa, surgem inúmeras potencialidades ao explorar a imersão proporcionada pelo jogo e a forma como o aluno interage com ele.

A resolução de problemas dentro da narrativa é um elemento fundamental ao se explorar um RPG. Os cenários apresentam desafios complexos que frequentemente requerem uma análise crítica elevada para serem resolvidos. Com isso os alunos são estimulados avaliar as opções disponíveis, considerando os recursos à disposição e as possíveis reações sociais às suas ações. Além de permitir que os participantes encontrem soluções para dilemas em um ambiente seguro e de baixo risco, muitas vezes com o objetivo de treinar e aprimorar habilidades (Bowman, 2010).

Ademais, RPG pode ser tido como uma simulação autêntica da realidade. Segundo Hammer et al. (2018), essa característica do jogo permite a prática de habilidades do mundo real por meio da simulação de cenários fictícios. Ao manipular um ambiente imaginário, os alunos têm a oportunidade de exercitar habilidades aplicáveis e resolver problemas de situações reais, por meio da observação dos efeitos de suas ações no universo do jogo e como este responde a essas escolhas.

---

[8] Adjetivo. Que substitui; que faz o trabalho de outra coisa ou pessoa; substituta.
VICÁRIA. *In*: DICIO, Dicionário Online de Português. Disponível em: < https://www.dicio.com.br/vicaria/ >. Acesso em: 02/07/2024.

No contexto da disciplina de Matemática, a característica imersiva do Roleplaying Game (RPG) permite que os alunos apliquem conceitos e resolvam problemas matemáticos em situações práticas e contextualizadas. Essa abordagem está alinhada com as diretrizes da BNCC, que, para a matemática no ensino médio, visa promover uma visão integrada da disciplina, conectando-a de maneira contextualizada à realidade e a múltiplos cenários (Brasil, 2018a).

E esta característica, está conforme visto, também, na análise das dissertações de Costa (2023) e Emer (2020), no qual se observa que atividades em que os alunos explorem o conhecimento matemático a partir de situações-problema, com a investigação, tomada de decisões, análise, criação e teste de modelos matemáticos, demonstram grande potencial no ensino da função exponencial.

Ademais, esse aspecto do jogo possibilita que os alunos reconheçam e aprendam com os próprios erros. Amaral (2013) argumenta que, caso os jogadores cometam um erro ou façam uma decisão inadequada, seja por um erro de cálculo ou interpretação, o papel do professor não é expor diretamente o erro, mas sim conduzir a narrativa de modo que os alunos eventualmente compreendam as consequências de suas escolhas.

E como dito, a narrativa permite aos alunos a busca de soluções para dilemas em um ambiente seguro e de baixo risco. Hammer et al. (2008) descrevem essa característica como "Safe High-Pressure Situations" (Situações Seguras de Alta Pressão). Para esses autores, no RPG, a imersão gerada pela narrativa permite que os jogadores pratiquem a tomada de decisões em cenários adversos, como um surto de doença ou um desastre natural, assim desencadeia momentos de decisão sob estresse sem riscos reais para a vida. Ou seja, permite aos participantes a oportunidade de praticar, assumir riscos e aprender de maneira eficaz, sem a distração das possíveis consequências dos eventos.

Por fim, cabe destacar é a natureza social inerente aos RPGs. Por definição, os RPGs são jogos multijogador, onde os participantes influenciam conjuntamente o ambiente compartilhado e devem reagir à participação uns dos outros no mundo do jogo. Em certos jogos, isso ocorre por meio de ações previamente roteirizadas, como a coordenação de ataques em RPGs eletrônicos para causar o máximo de dano a um oponente. Nos RPGs de mesa e live-action, há não apenas o engajamento com um mundo fictício, mas também o envolvimento colaborativo dos jogadores na construção e desenvolvimento desse mundo (Hammer et al., 2008).

5.4. ESCOLHA DA VARIAÇÃO DO ROLEPLAYING GAME

A escolha da variante do Roleplaying Game para esta pesquisa foi pautada no equilíbrio entre as potencialidades a serem exploradas e a acessibilidade para professores que não têm familiaridade com RPG. Para tal, verificamos argumentos e desvantagens de cada tipo de variante para assim realizar a escolha.

O RPG de mesa, embora seja o formato mais tradicional e ofereça amplas possibilidades de desenvolvimento das relações aluno-personagem e aluno-narrativa, exige uma narrativa complexa e uma preparação cuidadosa por parte do professor. Além disso, por ser mais dinâmico e permitir liberdade de escolha aos alunos, pode demandar improvisação em situações inesperadas, o que requer experiência e tempo para preparação.

Por outro lado, o LARP (Live Action Roleplaying) intensifica a relação aluno-personagem, pois cada aluno age diretamente como seu personagem, similar a uma encenação teatral. No entanto, o LARP também exige uma estrutura mais detalhada e um maior controle da turma, tornando-se desafiador para professores que não têm prática com o RPG. Essas duas abordagens, apesar de ricas em possibilidades, podem ser inicialmente complexas para professores com pouca familiaridade com o Roleplaying Game.

Em relação ao RPG eletrônico. Este permite mesclar o RPG com metodologias da educação matemática, como o uso de tecnologias em sala de aula e a gamificação. Embora se perca um pouco da relação aluno-personagem, essa modalidade permite a elaboração de diversos desafios e problemas proposto no jogo. Contudo, levamos em consideração o dito por Ferreira (2023), durante a análise de dissertações, em que em elação ao uso de tecnologias, incentivado pelo Novo Ensino Médio, os professores não se sentem preparados para aplicar essa metodologia, e as escolas ainda não possuem infraestrutura adequada.

Dessa forma, no tocante as Aventuras-solo ou Livros-Jogo, por ser jogada individualmente, ou em grupo, mas sem interação entre os grupos; a Interação Multijogador (entre os alunos), um dos elementos característicos do *Roleplaying Game*, é perdida. Contudo, ainda é possível a exploração das outras potencialidades, com destaque a Relação Aluno-Narrativa, tendo em vista que assume o papel de mestre da narrativa, este aluno consegue explorar.

Como destaca Fernandes (2017) é possível utilizar do RPG para trabalhar o processo de decisão do aluno e a capacidade de memorização, característica própria do jogo de aventura solo[9]. E, com isso, é possível despertar no aluno a capacidade de concentração e decisão, além do interesse em aprender de forma lúdica.

Outro autor que aponta potencialidades do livro jogo é Silva (2022), a qual observou que muitas das habilidades mencionadas por outros autores sobre jogos lúdicos estão presentes nessa variante do RPG. Isso reforça a ideia de que as potencialidades dos jogos podem ser aplicadas ao RPG. Além disso, o autor ressalta que o livro-jogo oferece uma oportunidade valiosa para consolidar conteúdos matemáticos em contextos do cotidiano, alinhando-se aos principais objetivos educacionais propostos pelas diretrizes da educação: o desenvolvimento de habilidades e a aplicação prática do conhecimento.

Ademais como no Livro-Jogo o livro desempenha o papel do mestre, por meio de ao longo da narrativa, oferecer diversas opções ao leitor, que deve decidir qual delas seguir; assim, este se constitui como um produto pronto para ser utilizado em sala de aula, não o que não necessita de tanta preparação por parte do professor, e poder ser uma forma com o qual professores, iniciantes ou já experientes no uso do RPG, possam introduzir esse tipo de jogo em suas aulas. E assim, posteriormente possam explorar as demais variantes do RPG.

Assim, tendo em vista as vantagens e desvantagens, observadas. Entre as opções disponíveis para o uso do RPG em sala de aula, a escolha do livro-jogo se mostrou mais adequada, pois facilita a introdução dessa ferramenta tanto para professores iniciantes quanto para os mais experientes. Além de com a elaboração do Livro-Jogo, este se torna um Produto Educacional pronto a ser utilizado por professores para a consolidação de conteúdos relacionados a Função Exponencial.

Com isso, nos capítulos que se seguem é apresentado o processo de constituição do Livro-Jogo, junto a apresentação e aplicação deste. Para por fim, ocorrer a interpretação dos dados coletados durante a aplicação e os indícios de aprendizagem percebidos.

---

[9] O uso das nomenclaturas “livro-jogo” e “aventura solo”, se diferenciam somente, segundo Silva (2019), pois no caso de uma narrativa-jogo seja lançada numa revista ou num livreto seria uma “aventura-solo”, mas já aquelas lançadas em formato de livro passam a ser um “livro-jogo”.

6. CONSTITUIÇÃO, APRESENTAÇÃO E APLICAÇÃO DO RPG

Neste capítulo, apresentamos a constituição do Livro-Jogo. Assim, busco apresentar o processo de elaboração dos problemas matemáticos a serem integrados a narrativa da história, a adaptação da narrativa “Conspiração Contaminante”, presente em Barros e Sousa (2023), para o formato de Livro-Jogo. Bem como também auxiliar professores no uso do RPG em sala de aula, nos processos a seguir para a criação de um Livro-Jogo voltado ao ensino.

Para a criação do Livro-Jogo, foi necessário inicialmente o desenvolvimento da história que será contada pelo livro, e consequentemente jogada pelos alunos. Para tal a história teve por base a narrativa *Conspiração Contaminante*, presente em Barros e Sousa (2023). Desta forma, foi desenvolvido somente uma adaptação da história do seu formato de RPG tradicional para um Livro-Jogo.

Com a base da narrativa já construída, iniciou-se o desenvolvimento dos problemas matemáticos que seriam inseridos no Livro-Jogo, pois se notou a necessidade de uma maior exploração no projeto *Conspiração Contaminante* de problemas matemáticos que envolvem a Função Exponencial. E como visto nas dissertações de Costa (2023) e Emer (2020), observou-se que atividades desenvolvidas a partir de situações-problema, no qual permitem a tomada, tomada de decisões, análise, criação e teste de modelos matemáticos pelos alunos, demonstram grande potencial no ensino da função exponencial.

A partir disso, para integrar situações-problema a narrativa, anterior a escrita da narrativa em formato Livro-Jogo, realizou-se a construção dos problemas matemáticos a serem abordados durante a narrativa.

6.1. SELEÇÃO DOS CONTEÚDOS

A elaboração do Livro-Jogo teve início com a definição dos aprendizados essenciais de Função Exponencial seriam trabalhadas nos problemas a serem desenvolvidos, ou seja, que conteúdos acerca de função exponencial iriam compor os problemas matemáticos.

Como base para essa construção, recorremos aos documentos oficiais que orientam o ensino no Ensino Médio, com ênfase na disciplina de Matemática. O principal referencial adotado foi a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pois estabelece um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica.

O documento define dez competências gerais da Educação Básica, que visam assegurar uma formação humana integral aos estudantes. A partir dessas diretrizes, cada área do conhecimento estrutura suas competências específicas, e, para garantir seu desenvolvimento, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão associadas a diferentes objetos de conhecimento, compreendidos como conteúdos, conceitos e processos, organizados em unidades temáticas (Brasil, 2018ª).

Dessa forma, a composição dos problemas foi definida com base nas aprendizagens essenciais relacionadas à Função Exponencial, conforme estabelecido nas habilidades específicas de Matemática para o Ensino Médio.

Com essa definição, retomamos as dissertações analisadas no capítulo 2, com destaque ao trabalho de Costa (2021), intitulado *"Função Exponencial: Uma abordagem guiada pela BNCC"*. Esse estudo apresentou uma perspectiva sobre o desenvolvimento de atividades alinhadas às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular, por meio das relações entre competências e habilidades expressas no documento. E dado os resultados positivos obtidos na pesquisa, no qual permitiu ao aluno explorar o conhecimento matemático a partir de situações problema, utilizar deste trabalho poderia contribuir para que o livro-jogo obtenha bons resultados durante sua aplicação.

Para tal buscamos na Base Nacional Comum Curricular verificar quais são as habilidades desejadas a alunos do ensino médio, no tocante a função exponencial. Assim temos as seguintes as habilidades abaixo:

Quadro 14 – Habilidades BNCC Função Exponencial para o Ensino Médio

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: Brasil (2018ª).

Assim, as habilidades da BNCC norteiam a elaboração dos problemas matemáticos que foram inseridos durante o Livro-Jogo. Visto que o objetivo do Livro-Jogo é a consolidação de conteúdos relacionados a função exponencial, assim buscamos nos problemas que os alunos possam utilizar dos conhecimentos obtidos a partir dos estudos anteriores para a resolução destes.

6.2. PLATAFORMA UTILIZADA NA ESCRITA

Utilizou-se como base para a narrativa criada para a elaboração do Livro-Jogo, como dito acima a narrativa *Conspiração Contaminante*, presente em Barros e Sousa (2023). Desta forma, foi desenvolvido somente uma adaptação da história do seu formato de RPG tradicional para um Livro-Jogo, com o título de “Conspiração Contaminante (Livro/Jogo)”

Após isso, buscou-se uma plataforma que auxiliasse na escrita de um Livro-jogo, para tal foram encontradas duas plataformas a *Twine*[10] e a *Inklewriter*[11], ambas disponíveis no idioma inglês e de uso gratuito, em que possibilitam a criação de narrativas e jogos de hipertexto. Ao final de cada trecho, o leitor é apresentado a duas ou mais opções de escolha, o que conduz a história por diferentes direções, oferecendo uma experiência interativa e personalizada.

A escolhida foi a plataforma *Inklewriter* visto que foi a que houve a melhor adaptação e mais fácil manuseio. Esta plataforma não necessita realizar o download, somente é preciso acessar a plataforma e realizar um cadastro com o uso de um email e senha para poder utilizar os recursos.

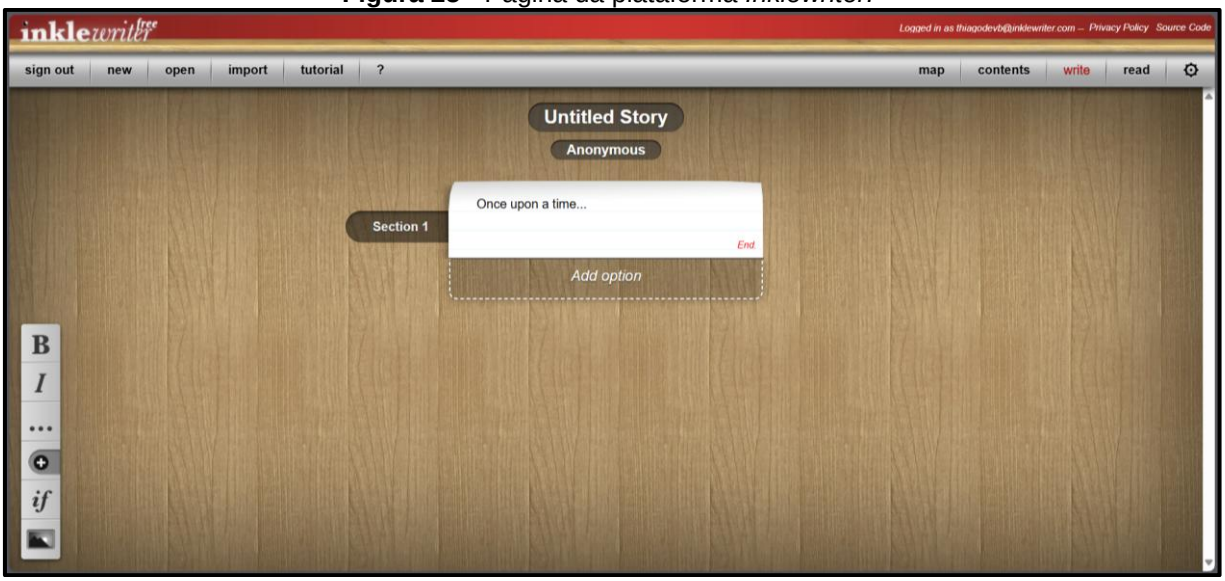
[10] Disponível em: <https://twinery.org/>. Acesso em: 16 de jan. 2025.
[11] Disponível em: <https://www.inklewriter.com/>. Acesso em: 16 de jan. 2025.

Figura 24 - Página inicial da plataforma *Inklewriter.*

Fonte: <https://www.inklewriter.com/>. Acesso em: 16 de jan. 2025.

Após realizado o cadastro na plataforma a seguinte tela (Figura 25) será exibida, nela elementos "*Untitled Story*" e "*Anonymous*", que representam respectivamente o título do texto e o nome para o autor. Para a realização da escrita basta escrever no elemento central que se assemelha a uma folha.

Figura 25 - Página da plataforma *Inklewriter.*

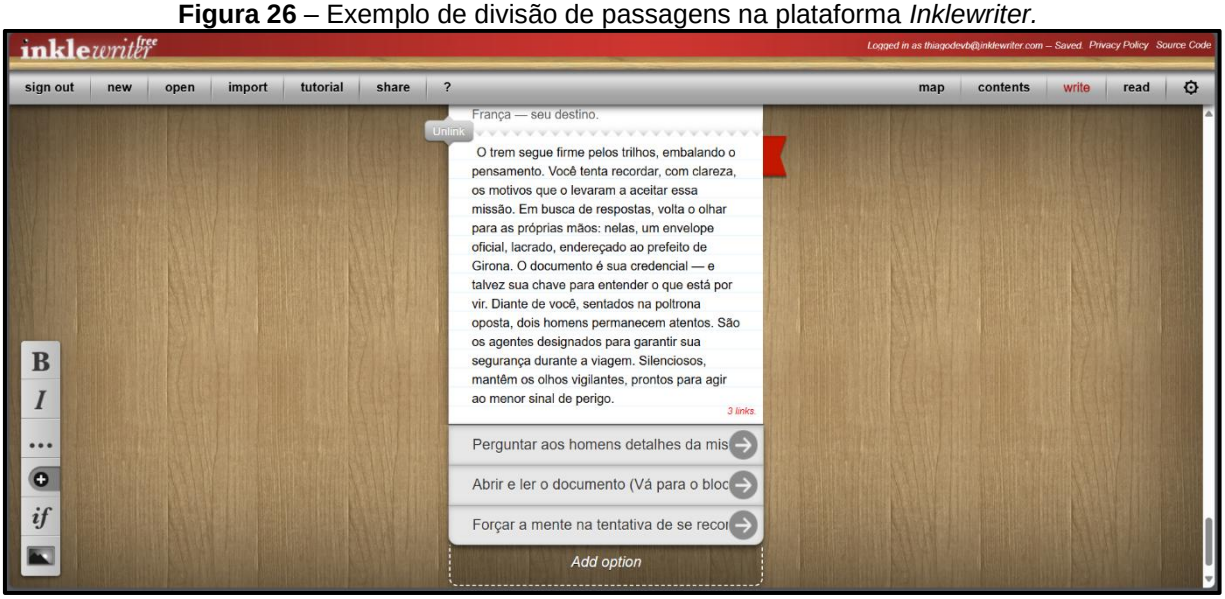


Fonte: <https://www.inklewriter.com/>. Acesso em: 16 de jan. 2025.

Sempre que desejar é possível clicar em "*Add option*" para assim criar uma passagem que será ligada a outra. É esta funcionalidade que permite a criação de uma história alternativa em que cada opção pode ser ligada a uma passagem diferente da história. Isso pode ser melhor observado no exemplo abaixo em que representa

um recorte da história do material “Conspiração Contaminante (Livro/Jogo)”, em que o parágrafo está ligado a outras três passagens que estão ligadas a partes diferentes da história, assim ao ler o leitor pode decidir em quais dos caminhos quer seguir.

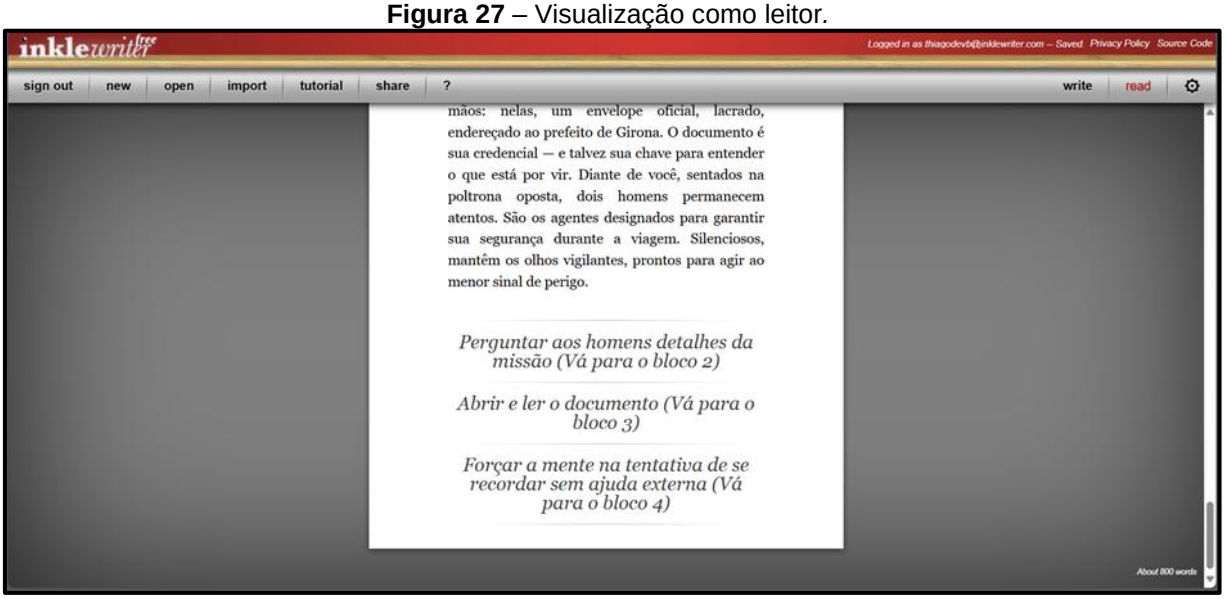
Figura 26 – Exemplo de divisão de passagens na plataforma *Inklewriter*.



Fonte: <https://www.inklewriter.com/>. Acesso em: 16 de jan. 2025.

É possível observar na plataforma como esta passagem será mostrada ao leitor, ao clicar no canto superior direito em “*read*”, conforme mostrada na figura 27.

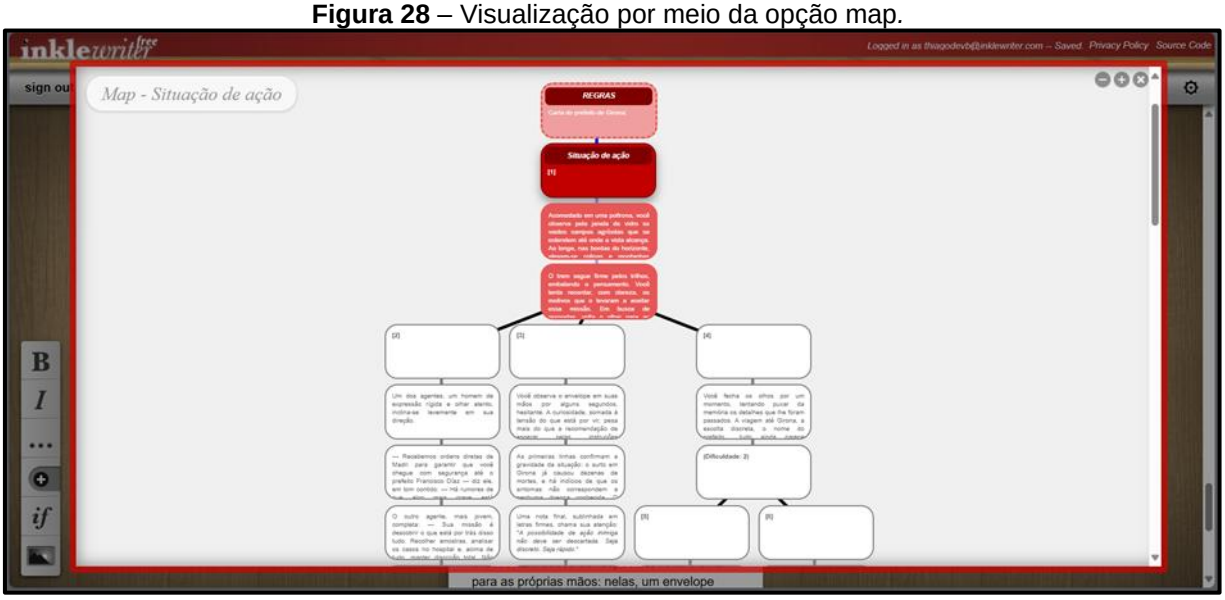
Figura 27 – Visualização como leitor.



Fonte: <https://www.inklewriter.com/>. Acesso em: 16 de jan. 2025.

Já por meio da opção “*map*” é mostrado a história por meio de uma visão mais ampla que mostra todos os parágrafos escritos e a ligação entre eles.

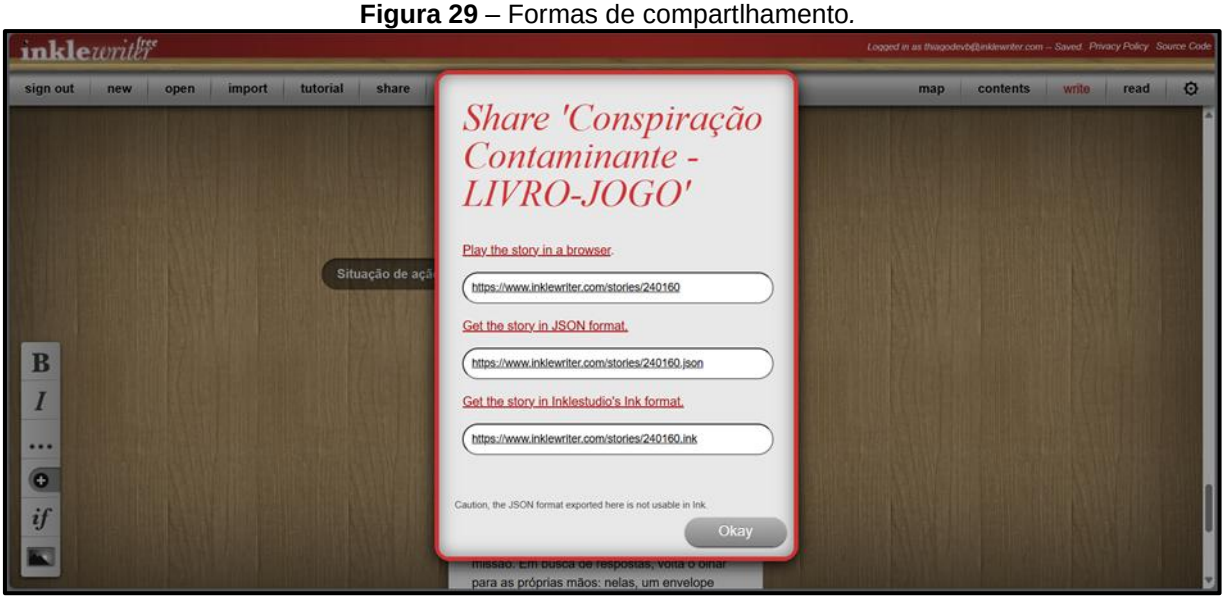
Figura 28 – Visualização por meio da opção map.



Fonte: <https://www.inklewriter.com/>. Acesso em: 16 de jan. 2025.

Dessa forma a história pode ser totalmente escrita, e assim que quiser disponibiliza-la basta clicar na opção “*share*” e assim será mostrada uma janela nas três formas de compartilhamento. A história desenvolvida poder ser compartilhada em forma de um link para ser jogado em um navegador, e em outras duas formas disponibilizadas pela plataforma.

Figura 29 – Formas de compartlhamento.



Fonte: <https://www.inklewriter.com/>. Acesso em: 16 de jan. 2025.

Dessa forma, com o auxílio da plataforma foi constituído o Livro-Jogo, em que a narrativa é mesclada com os conhecimentos e problemas matemáticos que envolvem os conteúdo a serem consolidados com os alunos. Após a elaboração na

plataforma, desenvolvemos um formato de documento para assim o livro poder ser impresso e utilizado na forma física. Como este tipo de modelo não é disponibilizado pela plataforma, utilizou-se da estrutura que a plataforma disponibiliza para assim elaborar da melhor forma a forma impressa do Livro-Jogo.

Para jogar, seja na versão impressa ou digital do Livro-Jogo, além do próprio material, é necessário utilizar uma ficha intitulada “Relatório do Investigador” (ver Apêndice C). Essa ficha funciona como a ficha do personagem do aluno, na qual ele deve registrar os caminhos percorridos ao longo da narrativa, bem como anotar seus raciocínios, justificativas e cálculos. Para o professor, o relatório representa o principal registro escrito dos alunos, permitindo acompanhar o percurso trilhado e as estratégias adotadas durante a atividade.

Também se faz necessário o uso de um dado de seis faces, elemento característico dos jogos de RPG, inserido na proposta com a finalidade de introduzir situações de aleatoriedade em determinados momentos da narrativa. A escolha por esse tipo de dado se deve à sua ampla disponibilidade. Caso os participantes não possuam dados físicos, há diversas plataformas digitais que oferecem simulações confiáveis para essa finalidade.

6.3. A COMPOSIÇÃO DO LIVRO-JOGO

Quanto à estruturação da proposta “*Conspiração Contaminante (Livro/Jogo)*”, este foi dividido em diversas seções numeradas denominadas “Blocos”. Cada Bloco representa uma passagem específica da narrativa, elaborada com o auxílio da plataforma *Inklewriter*. Um Bloco é composto de um número utilizado para sua identificação e por um ou mais parágrafos e possui conexão direta com outros, assim formam uma rede de possibilidades narrativas. Sob a perspectiva do aluno, os Blocos correspondem aos trechos da história a serem percorridos, em que cada escolha feita ao final de um leva a diferentes desdobramentos, direcionando o jogador a novos Blocos. Estes podem ser melhor compreendidos ao realizar a leitura inicial do Livro-Jogo em Apêndice B.

Figura 30 – Exemplificação de um Bloco.

[1]

Acomodado em uma poltrona, você observa pela janela os vastos campos agrícolas que se estendem até onde a vista alcança. Ao longe, elevam-se colinas e montanhas baixas. Trata-se das terras ao redor de Girona, cidade próxima à fronteira com a França — seu destino.

O trem segue firme pelos trilhos, embalando o pensamento. Você tenta recordar, com clareza, qual sua missão. Em busca de respostas, volta o olhar para suas mãos: nelas, um envelope oficial, endereçado ao prefeito de Girona.

O documento é sua credencial — e talvez sua chave para entender o que está por vir. Diante de você, sentados na poltrona oposta, dois homens permanecem atentos. São os agentes designados para garantir sua segurança. Silenciosos, prontos para agir ao menor sinal de perigo. Então você decide:

- Perguntar aos homens detalhes da missão **(Vá para o bloco 2)**
- Abrir e ler o documento **(Vá para o bloco 3)**
- Forçar a mente e tentar se lembrar sem ajuda **(Vá para o bloco 4)**

Fonte: Elaborado pelo Autor, 2025.

Sob a ótica do pesquisador, os Blocos foram fundamentais para estruturar o desenvolvimento. Cada intervalo de Blocos possui objetivos distintos, o que permitiu, durante a elaboração, atribuir a cada trecho uma finalidade específica. A divisão em Blocos funcionou como um quebra-cabeça, no qual cada peça assume um formato próprio.

Isto foi pensado visto que nos aportes teóricos e metodológicos apresentados anteriormente, observou-se diferentes etapas e momentos quanto à Tipologia das Situações Didáticas, e aos Momentos do Jogo, conforme propostos por Brousseau (1996; 2008) e Grando (2000), respectivamente. A articulação destes dois referenciais permitiu desenvolver uma organização coerente que orientasse o desenvolvimento do jogo. A seguir, apresenta-se o quadro que sintetiza essa estrutura.

Quadro 15 – Articulação Tipologia das SD x Jogos.

Situações da TSD	Momentos do Jogo	Correlação
Situação de ação	1° Familiarização com o material do jogo	Exploração inicial do jogo e reconhecimento das regras; Momento em que os alunos engajarão no jogo por si só, Reflexão e simulação das tentativas para o desenvolvimentos de estratégias com o objetivo de vencer o jogo;
	2° Reconhecimento das regras	
	3° O “Jogo pelo jogo”: jogar para garantir regras	

Situação de formulação	4° Intervenção pedagógica verbal	Momento de troca de informação entre o aluno e o jogo; Sistematização de processos para resolver os problemas do jogo; O aluno expressa suas estratégias e/ou resoluções, por meio da linguagem oral e/ou escrita;
	5° Registro do jogo	
	6° Intervenção escrita	
Situação de validação	7° Jogar com “competência”	Validação das estratégias e resoluções aos problemas e desafios do jogo; Amplia a compreensão do jogo sob diferentes perspectivas que podem não ter sido inicialmente consideradas;
Situação de institucionalização		Momento em que os alunos destinam a promover o sentido e dão significado ao saber elaborado. E cabe ao professor institucionalizar a tarefa, formalizar e generalizar os conceitos pretendidos;

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Dessa forma, o Livro-Jogo foi elaborado com o objetivo de contemplar todas as etapas previstas. Algumas seguem uma sequência definida, enquanto outras permanecem presentes ao longo da completude do jogo. No que diz respeito à Situação de Ação e aos dois primeiros momentos do jogo — 1°: Familiarização com o material e 2°: Reconhecimento das regras —, por se tratarem das etapas iniciais no uso de jogos em sala de aula, a parte introdutória do Livro-Jogo foi dedicada à descrição do material, seus objetivos e regras. A leitura dessa seção, acompanhada da explicação oral do professor sobre o funcionamento do jogo, buscam atender a essas etapas. As regras podem ser lidas de forma completa por meio do Apêndice B.

Com isso o que se segue é momento 3° - O “Jogo pelo jogo”: jogar para garantir regras, este momento representa a fase em que os alunos engajarão no jogo por si só, visando garantir a compreensão das regras; cujo foco principal é a internalização das regras por parte dos alunos. Portanto, os Blocos de 1 ao 12, são destinados somente a compreensão do jogador, de como jogar, a narrativa os guia para o conhecimento do funcionamento de um dos tipos de comando presentes que guiam o jogar.

Agora quanto a Situação de formulação, neste percebemos a articulação com os momentos 4° - Intervenção pedagógica verbal, 5° - Registro do jogo, 6° - Intervenção escrita, estes representam os questionamentos e observações que devem ser feitas pelo facilitador/professor com o intuito de instigar os alunos a analisarem suas próprias jogadas; etapa de sistematização e formalização, utilizando uma linguagem específica, que, neste caso, seria a linguagem matemática, e a resolução registro de situações-problema relacionadas ao jogo, respectivamente.

A proposta foi estruturada em três intervalos de blocos, 13 a 22, 43 a 53 e 68 a 72, nos quais foram explorados conteúdos diferentes relacionados a função exponencial. Para garantir a consolidação desses conteúdos, todos os momentos da Situação de Formulação foram contemplados em cada um desses intervalos.

Nos blocos 13 a 22, trabalhou-se um problema envolvendo uma função exponencial crescente do tipo $f(x) = a^x$, com o uso de problemas sequenciais que permitissem aos alunos explorar a situação proposta, com o objetivo de analisar a relação de interdependência entre as variáveis. Ao final, se espera que os alunos sejam capazes de desenvolver uma expressão que modelasse matematicamente a situação, representando o número de infectados em função das semanas decorridas.

Nos blocos 43 a 53, trabalhou-se um problema envolvendo uma função exponencial decrescente do tipo $f(x) = a^x$, com o uso de problemas sequenciais que permitissem aos alunos explorar a situação proposta, com o objetivo de analisar a relação de interdependência entre as variáveis. Ao final, se espera que os alunos sejam capazes de desenvolver uma expressão que modelasse matematicamente a situação, representando o número de leitos disponíveis em um hospital fictício da história em função das dias percorridos.

Em cada um destes intervalos, os alunos são incentivados a resolução e sistematização do problema com uso da linguagem matemática, além de realizar o registro escrito das repostas a cada questionamento dado. O Registro Escrito dos Estudante ocorre por meio da ficha chamada "*Relatório do Investigador*".

Quanto especificamente a Intervenção pedagógica verbal, esta ocorre por meio da intervenção do professor conjuntamente a intervenção escrita, dado que os problemas matemáticos propostos aos alunos, estão presentes de forma escrita no material, assim cabe ao realizar questionamentos e observações que devem ser feitas pelo facilitador/professor com o intuito de instigar os alunos a analisarem suas próprias jogadas, seja por meio dos diálogos definidos anteriormente no capítulo 4.

A situação de validação, correspondente ao momento 7º — "Jogar com competência" —, esta está representada pelos blocos 66 a 87. Nesse trecho, retomou-se a situação que envolve o número de infectados pela doença em função das semanas percorridas, culminando na necessidade de os jogadores estimarem em quantas semanas a infecção ultrapassará ou igualará um quarto da população da cidade. Essa resposta não representa apenas o encerramento da atividade, mas

também um elemento-chave para a finalização da história, visto que a decisão final, que determinará o desfecho da narrativa, considera diretamente esse resultado.

A depender das escolhas realizadas durante a experiência, nesta etapa os alunos podem ser levados a explorar uma função exponencial do tipo $f(x) = ba^x$, a qual representa de forma mais precisa o avanço da quantidade de infectados. Caso contrário, a função trabalhada será do tipo $f(x) = a^x$, o que resultará em uma estimativa menos precisa para o tempo de ação contra a doença. Essa imprecisão poderá levar a um final de jogo com consequências negativas, decorrentes do erro na investigação conduzida pelo jogador.

O Livro-Jogo apresenta nove finais distintos, os quais variam de acordo com as decisões tomadas e com as respostas obtidas pelos jogadores, isto foi feito para compreender uma das características do RPG, em que as escolhas e ações do jogadores afetam diretamente o desfecho da história. Assim, para definir qual desfecho seguir, os alunos devem reunir as informações construídas ao longo da narrativa e articular esse conteúdo com os conhecimentos desenvolvidos sobre função exponencial, o que evidencia a necessidade de compreensão conceitual e tomada de decisões fundamentadas para concluir a atividade.

A Situação de Institucionalização, voltada à formalização e generalização dos conceitos envolvidos, esta não foi incorporada ao material proposto. Isso se deve ao fato de que a atividade tem como objetivo a consolidação de conteúdos relacionados à função exponencial, sendo necessário que o professor já tenha ministrado e formalizado previamente esse conteúdo com os alunos. Assim, para que a aplicação ocorra de forma adequada, é essencial que o conceito já tenha sido trabalhado em sala de aula. Ainda assim, não se descarta a possibilidade de o professor retomar essa formalização ao final da atividade, caso julgue necessário para reforçar a aprendizagem. Desta forma, este processo da elaboração está sistematizado no quadro abaixo.

Quadro 16 – Articulação Tipologia das SD x Jogos x Livro-Jogo.

Situações da TSD	Momentos do Jogo	Etapa do Livro-Jogo
Situação de ação	1° Familiarização com o material do jogo	Secção de Introdução.
	2° Reconhecimento das regras	Ministrado Oralmente pelo Professor.
	3° O “Jogo pelo jogo”: jogar para garantir regras	Blocos 1 -12.
Situação de formulação	4° Intervenção pedagógica verbal	Blocos 13-22, 43-53.
	5° Registro do jogo	Blocos 13-22, 43-53. Junto ao Registro no “Relatório do Investigador”.
	6° Intervenção escrita	Blocos 13-22, 43-53.
Situação de validação	7° Jogar com “competência”	Blocos 66-87
Situação de institucionalização		A ser realizado pelo professor ao final da atividade.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

6.4. SOBRE A APLICAÇÃO

Com o objetivo de validar a proposta elaborada (Livro-Jogo) com base nos princípios da Microgenética e Análise de Discurso, buscou-se realizar a aplicação da proposta com turmas de ensino médio, as quais já tivessem estudado o tópico de função exponencial.

Houve dificuldades na busca por escolas que autorizassem a aplicação da atividade. Isso se deve ao fato de o período escolhido coincidir com o calendário avaliativo das escolas, o que tornou o contexto pouco favorável à execução de atividades extracurriculares. O principal obstáculo identificado foi o tempo necessário para a realização da proposta, considerado extenso pelas escolas, pois poderia comprometer o andamento das aulas e o cumprimento do cronograma letivo.

Diante da urgência do processo e dado que o objetivo da proposta é consolidar conteúdos relacionados à função exponencial, optou-se por realizar a aplicação com alunos que já concluíram o Ensino Médio. Dessa forma, garantiu-se que os participantes tivessem contato prévio com o conteúdo, o que permite a atividade ainda cumprisse sua finalidade de consolidação dos conceitos envolvidos.

Dessa forma, uma das alternativas encontradas para aplicar a proposta com alunos concluintes do Ensino Médio foi realizá-la em uma turma do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, composta por estudantes recém-egressos da educação básica. A aplicação foi autorizada pela coordenação do curso e contou com o apoio de um professor da disciplina, que cedeu parte de seu horário para a realização da atividade.

A aplicação ocorreu no mês de maio de 2025. A realização da pesquisa contou com a presença do professor pesquisador e de um professor colaborador, que possuía experiência com RPG e familiaridade com a proposta desenvolvida, que auxiliou na distribuição dos materiais, posicionamento dos instrumentos, organização e na realização de registros escritos sobre o processo de aplicação.

Ao chegar à sala de aula, o docente da disciplina comunicou à turma sobre a atividade que seria realizada. Em seguida, o projeto foi apresentado aos discentes da turma selecionada, totalizando 20 alunos presentes. Posteriormente, foi oferecida a cada estudante a possibilidade de participar voluntariamente da pesquisa. Dezoito discentes aceitaram participar, mediante a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ver Apêndice A).

Para dar início à aplicação, foi necessária a divisão da turma em grupos. Observou-se que já existia uma predisposição dos discentes em grupos, o que levou à decisão de deixar a organização dos grupos sob responsabilidade dos próprios participantes. Essa escolha resultou em variações no número de integrantes por grupo, respeitando a dinâmica natural da turma.

Os instrumentos utilizados durante a atividade foram classificados em dois tipos: instrumentos de jogo e instrumentos de pesquisa. Os primeiros referem-se aos materiais necessários para a execução da proposta, sendo eles: o livro *Conspiração Contaminante (Livro-Jogo)* em formato impresso, o *Relatório do Investigador* e um dado de seis faces. Já os instrumentos de pesquisa envolveram a utilização de gravadores de voz, destinado à coleta de dados durante a aplicação da atividade.

Com a turma já organizada em grupos, foram recolhidos os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido. Alguns participantes optaram por assiná-los apenas ao final da atividade, o que possivelmente se deve à não compreensão total sobre o funcionamento da proposta. Ao término da aplicação, no entanto, todos os termos estavam devidamente assinados e recolhidos.

Em seguida, os instrumentos de jogo foram distribuídos a cada grupo: uma cópia do material *Conspiração Contaminante (Livro-Jogo)*, uma cópia do *Relatório do Investigador* e um dado de seis faces. Em seguida, um gravador de voz foi posicionado junto a cada grupo, e os participantes foram informados de que as gravações teriam início naquele momento.

Com a organização concluída, iniciou-se a aplicação da proposta. O professor pesquisador apresentou oralmente as regras do jogo aos participantes, assim permitiu que cada grupo desse início à atividade. Os grupos avançaram no jogo em ritmos distintos, conforme suas escolhas e estratégias tomadas ao longo do Livro-Jogo. No entanto, a aplicação teve duração total de duas horas e meia.

A estratégia adotada para a gravação da aplicação consistiu, inicialmente, em deixar os celulares que seriam utilizados para a gravação em modo avião, a fim de evitar interferências externas durante a atividade. Além disso, a cada trinta minutos, o professor pesquisador e o professor colaborador interrompiam a gravação, salvavam o arquivo de áudio e iniciavam uma nova faixa. Essa medida visou prevenir perdas relacionadas a limitações de armazenamento ou bateria dos aparelhos, para garantir que, em caso de falha, apenas uma parte reduzida da atividade fosse comprometida, preservando-se o restante do registro.

7. INTERPRETAÇÃO DOS DADOS E INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM

Para interpretar os dados obtidos durante a aplicação e, assim, validar a proposta elaborada (Livro-Jogo), adotaram-se os princípios da Microgenética e da Análise de Discurso, conforme caracterizado no Capítulo 4. A escolha desses aportes teve como finalidade evidenciar de que modo a aplicação do Livro-Jogo pode orientar os alunos na construção de significados e favorecer a aprendizagem dos conteúdos relacionados à função exponencial. Para isso, buscou-se evidenciar os indícios de aprendizagem dos alunos que confirmassem essa possibilidade.

Ademais, com os dados coletados, objetivou-se verificar se o Livro-Jogo contempla todas as etapas e metas previstas na articulação dos aportes teóricos e metodológicos que guiaram a elaboração, Brousseau (1996; 2008) e Grando (2000). Afim de avaliar se o jogo permite que os alunos se envolvam com sua dinâmica ao mesmo tempo em que desenvolvam a compreensão dos conceitos matemáticos abordados na atividade. Esta articulação está sintetizada no quadro abaixo.

Quadro 17 – Articulação Tipologia das SD x Jogos x Livro-Jogo.

Situações da TSD	Momentos do Jogo	Etapa do Livro-Jogo	Metas
Situação de ação	1° Familiarização com o material do jogo	Secção de Introdução.	Exploração inicial do jogo e reconhecimento das regras; Engajamento dos alunos no jogo por si só; Reflexão e simulação das tentativas para o desenvolvimentos de estratégias com o objetivo de vencer o jogo;
	2° Reconhecimento das regras	Ministrado Oralmente pelo Professor.	
	3° O “Jogo pelo jogo”: jogar para garantir regras	Blocos 1 ao 12.	
Situação de formulação	4° Intervenção pedagógica verbal	Blocos 13-22, 43-53.	Troca de informação entre o aluno e o jogo; Sistematização de processos para resolver os problemas do jogo; Desenvolvimento de estratégias e/ou resoluções, por meio da linguagem oral e/ou escrita;
	5° Registro do jogo	Blocos 13-22, 43-53. Junto ao Registro no “Relatório do Investigador”.	
	6° Intervenção escrita	Blocos 13-22, 43-53.	
Situação de validação	7° Jogar com “competência”	Blocos 66-87	Validação das estratégias e resoluções aos problemas e desafios do jogo; Ampliação da compreensão do jogo sob diferentes perspectivas que podem não ter sido inicialmente consideradas;

Situação de institucionalização		A ser realizado pelo professor ao final da atividade caso necessidade.	Promoção do sentido e dão significado ao saber elaborado. Institucionalização, formalização e generalização dos conceitos pretendidos;

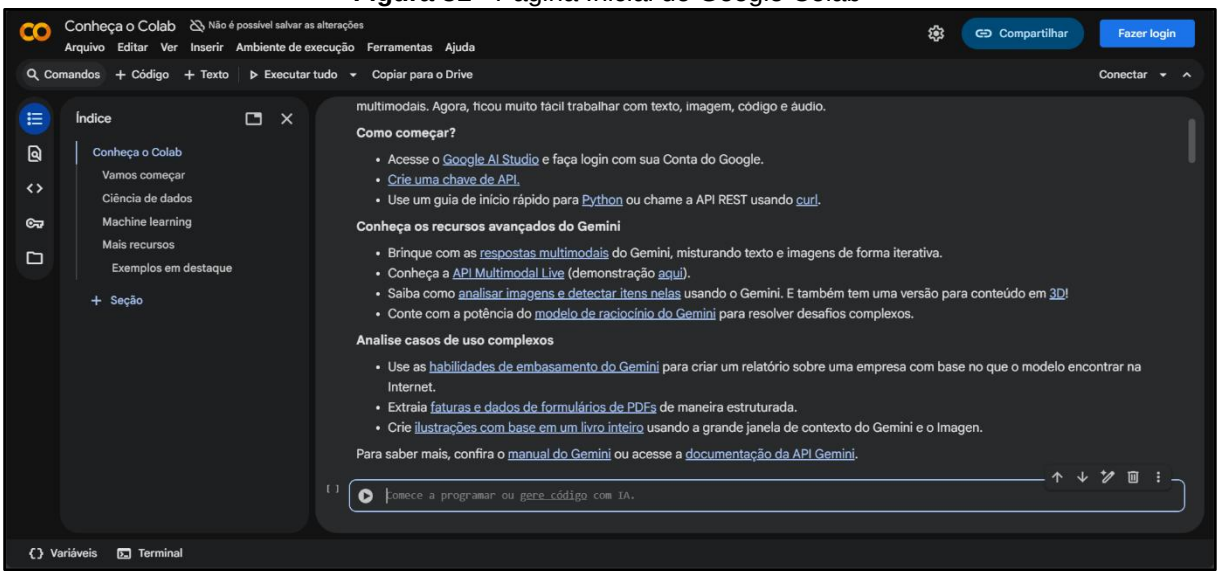
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

7.1. PROCEDIMENTO DE TRANSCRIÇÃO

Devido ao expressivo volume de faixas de áudio obtido após a aplicação da proposta, buscou-se otimizar o processo de transcrição, a fim de mitigar a necessidade de um trabalho manual excessivo. Para tanto, optou-se pela utilização de recursos de Inteligência Artificial para auxiliar nesta etapa.

A plataforma empregada foi o Google Colab, um serviço gratuito que permite a escrita e execução de códigos de programação, notadamente Python, diretamente no navegador. O código utilizado viabiliza a instalação, no referido ambiente virtual, do *Whisper*, um modelo de reconhecimento de fala de propósito geral.

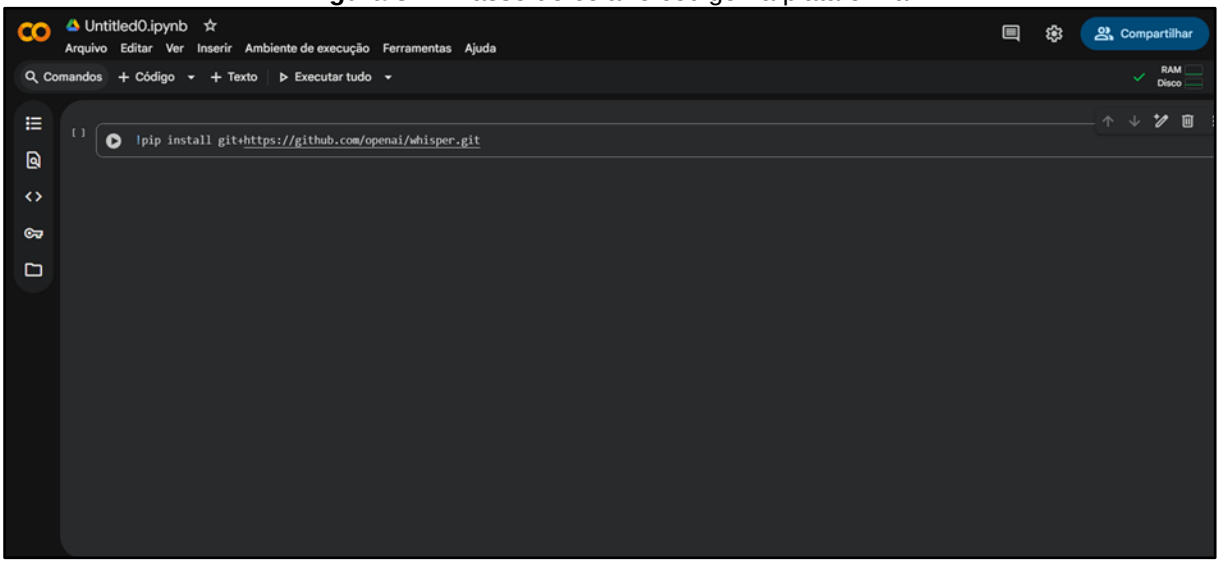
Figura 31 - Página Inicial do Google Colab



Fonte: https://colab.research.google.com/

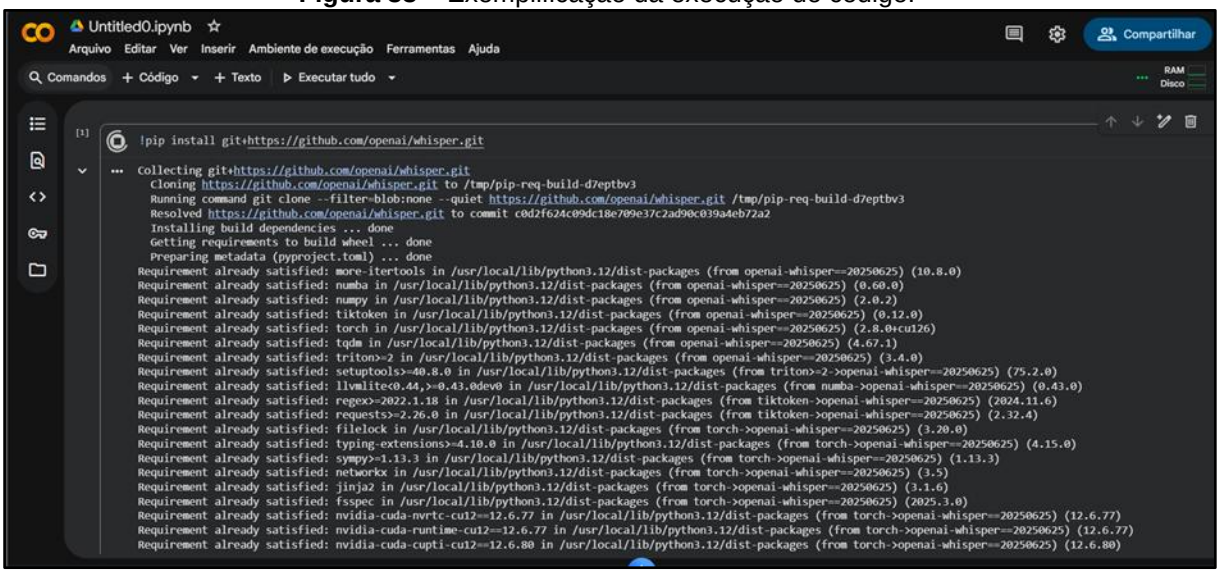
Logo, o primeiro passo consistiu na instalação do modelo na plataforma, por meio do seguinte comando: `!pip install git+https://github.com/openai/whisper.git`. Para a sua execução, o procedimento consiste em copiar o referido código, colá-lo na plataforma, e então pressionar ‘Ctrl+Enter’ para executá-lo.

Figura 32 – Passo de colar o código na plataforma



Fonte: https://colab.research.google.com/

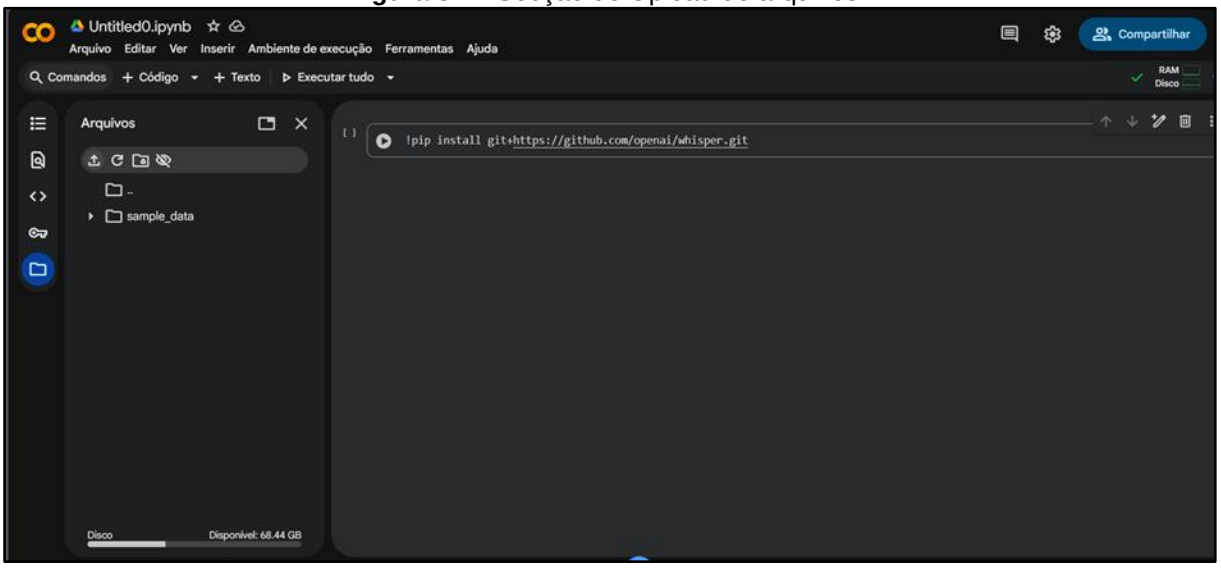
Figura 33 – Exemplificação da execução do código.



Fonte: https://colab.research.google.com/

Após o período de instalação, o programa torna-se apto para a execução. O passo subsequente consistiu em realizar o upload das faixas de áudio na plataforma Google Colab. Para tal, o procedimento requer que o usuário clique no ícone de pasta e, em seguida, no símbolo de upload, para assim a seleção da faixa de áudio desejada por meio do explorador de arquivos do computador

Figura 34 – Secção de Upload de arquivos.



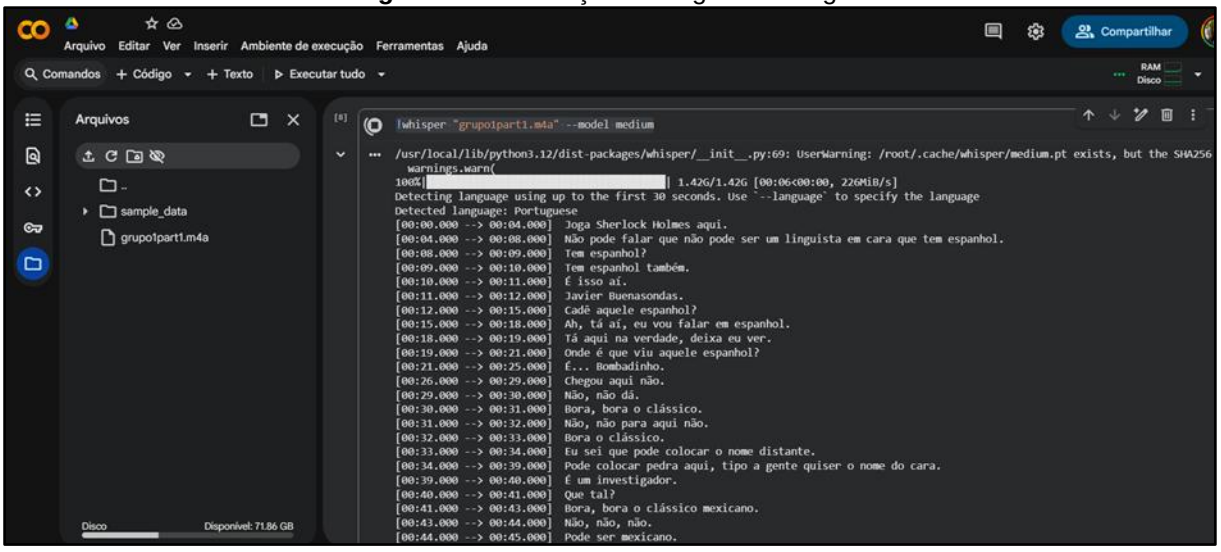
Fonte: https://colab.research.google.com/

Concluída a etapa anterior, faz-se necessário executar um novo comando, o qual é destinado a iniciar o processo de transcrição do arquivo de áudio por meio do Whisper. Para tal, deve-se copiar e colar o seguinte código: !whisper "nome do arquivo aqui.mp3" --model medium.

É imprescindível que o nome inserido entre aspas corresponda exatamente ao nome da faixa de áudio carregada. Como exemplo, na situação em que o arquivo estava nomeado como 'grupo1part1.m4a', o código adaptado e executado foi: !whisper "grupo1part1.m4a" --model medium.

Após a execução deste comando, foi necessário aguardar alguns minutos até que o processo de transcrição fosse finalizado pela plataforma

Figura 35 – Execução do segundo código.



Fonte: https://colab.research.google.com/

Após a execução do comando, a plataforma retorna a transcrição da faixa de áudio. Contudo, como em qualquer processo que utiliza inteligência artificial, o resultado obtido é passível de erros. Desta forma, posteriormente foi preciso realizar a escuta das faixas de áudio, a fim de verificar a fidedignidade do texto retornado e proceder às devidas correções. Para o melhor entendimento do processo seguido, recomendasse o segue o link de um vídeo passo a passo[12], vídeo que serviu de base para a realização desta transcrição.

Com as transcrições prévias obtidas, procedeu-se à escuta das gravações tanto para a correção dos erros de transcrição quanto para o processo de identificação utilizado pela Análise Microgenética. Para tal, cada fala foi categorizada como um 'Turno (T)', seguido de sua numeração, da identificação do grupo (denominados A, B, C e D, respectivamente) e da identificação do aluno. A título de exemplo, na codificação 'T22A-A4', a sigla 'T22A' representa o vigésimo segundo turno, e '-A4' indica que a fala pertence ao aluno A4. Este procedimento se seguiu até que a totalidade das aproximadamente 8 horas de áudio captadas fosse devidamente corrigida e identificada.

Destaca-se que parte dos áudios transcritos da aplicação corresponde à leitura do Livro-Jogo realizada pelos alunos. Esses turnos foram suprimidos de forma parcial ou em sua totalidade das seções selecionadas para análise, pois não apresentaram contribuições relevantes ao processo de análise. Nos turnos dedicados somente a leitura iremos representar o texto suprimido usando do símbolo “[...]”

7.2.TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE DA SITUAÇÃO DE AÇÃO

A primeira secção do Livro-Jogo, buscou-se que o aluno realizasse a exploração inicial do jogo e reconhecimento das regras. Nesse primeiro momento, foi entregue uma cópia da *Conspiração Contaminante (Livro-Jogo)*, uma cópia do *Relatório do Investigador* e um dado de seis faces, a cada um dos grupos, como cada grupo já dispunha de materiais como caneta, lápis e borracha, então estes não necessitaram ser distribuídos. Após a entrega dos materiais, deu-se início a etapa de

[12] https://www.youtube.com/watch?v=9prLBRpwZ78&t=333s

Familiarização com o material do jogo e Reconhecimento das regras, por meio da leitura por parte dos grupos da seção introdutória do Livro-Jogo dedicada à descrição do material, seus objetivos e regras, acompanhada da explicação oral do professor sobre o funcionamento do jogo, respectivamente.

Com esta etapa concluída, seguiu-se para o momento “Jogo pelo jogo”, no qual que os alunos deveriam engajar no jogo por si só, visando garantir a compreensão das regras; cujo foco principal era a internalização das regras por parte dos alunos. Portanto, os Blocos de 1 ao 12, foram destinados a compreensão do jogador, de como jogar, a narrativa os guia para o conhecimento do funcionamento de um dos tipos de comando presentes que guiam o jogar. Abaixo se segue a transcrição da etapa de situação de ação.

Quadro 18 - Transcrição dos diálogos da etapa de situação de ação.

Professor Aplicador: Como está tudo posicionado, vou começar a explicar o funcionamento da atividade para vocês. Como funciona? O livro-jogo intitulado Conspiração Contaminante. Como diz, ele é um livro-jogo, em que quando vocês forem lendo o livro, ele vai levando vocês a caminhos diferentes, que vocês mesmo vão decidir. Então, como funcionam as regras? Como leitor, vocês vão ser um investigador, que vão investigar a contaminação e proliferação de uma doença, vocês vão iniciar o jogo criando o personagem de vocês. Tem dois materiais. O livro, que vocês vão fazer a leitura, e a ficha. A ficha de personagem, exatamente onde vocês vão colocar o nome do personagem, vão colocar os itens que estão descritos nas regras que o personagem tem, e os elementos principais da ficha são o quê? Se você perceber, tem uma parte que está escrito trajetória. O que é a trajetória? É o caminho que o personagem de vocês vai seguir. O livro está enumerado, cada conjunto de parágrafos tem um número inicial. Conforme forem jogando, é necessário vocês anotarem que caminhos vocês estão percorrendo. Então, começa no bloco 1, que eu chamo, e vai indo para os próximos. Conforme o bloco que vocês escolherem, que o personagem deve seguir, vocês anotam a numeração dele. Ah, foi para o bloco 1, para o bloco 2. Então, no espaço do próximo quadrado, vocês colocam 2. Pode perguntar.
A4: Em relação ao número que vai ser terminado pelo dado, no caso algum número que esteja no dado, a gente soma 1?
Professor Aplicador: Não, não vai. Vocês vão ler isso. Quando vocês abrirem o livro, principalmente a partir do primeiro bloco, vai haver comandos no final de cada bloco. Vá para o bloco 3, vá para o bloco 2. Ou seja, conforme a decisão de vocês, vai estar no final do parágrafo a qual bloco que vocês devem seguir. Quanto aos dados, como se trata de um jogos, eu tenho que trazer elementos de jogos também, principalmente do RPG, que são o uso de dados. Ou seja, vai haver ações que vai estar descrito dificuldade. A dificuldade vai representar um valor que vocês terão que tirar no dado. Por exemplo, em algum parágrafo, vai dizer que a dificuldade de determinada ação é 3. Então, para vocês terem sucesso nessa ação, tem que tirar 3, o mais do dado. Se vocês tirarem 3 ou mais, vocês vão ter um sucesso, e vai ter um caminho na história que vai ser se o personagem teve um sucesso naquela ação. Se não ele teve uma falha, vocês vão continuar a história conforme essa falha. Ou seja, são elementos de jogos que eu resolvi trazer também dentro da narrativa. E por fim, tem elementos que é a questão dos pontos de vida do personagem. Como vocês vão estar jogando um personagem que vai estar investigando uma doença, é lógico que conforme vocês vão explorando, ele pode ficar mais doente ou não. Então vai ter parte na história que, dependendo das ações do personagem, ele pode pegar a doença ou não. E assim os pontos de vida vão diminuindo. Por fim, se o ponto de vida chegar a zero, vocês continuam a história. Só que como ele ficou doente, isso posteriormente vai ter uma implicação, vai causar algo no personagem de vocês. Ou seja, é outro elemento que vai mudar a história de vocês. Então eu me ressalto. Se o personagem chegar a zero ponto de vida, vocês podem continuar jogando sem problema nenhum. É só realmente manter anotado. Por fim, vai ter blocos que vai ser necessário fazer a realização de anotações. Na questão do jogo é como o

investigador tivesse fazendo um relatório dele. Ah, determinado personagem é suspeito, determinado não. E há áreas aí que estão numeradas. Os blocos que vai ser necessário realizar anotações para estar descrito no livro e estar descrito na ficha. Que anotações são essas? São anotações referentes ao conhecimento matemático. Então vai ter perguntas sobre função, perguntas sobre função exponencial, que quando for necessário fazer anotações vai estar descrito no livro e vocês fazem essas anotações na ficha de vocês. Vocês podem utilizar rascunho e depois escrever só a resposta final, podem escrever o rascunho na própria ficha, que ao final delimitei uma parte exatamente para observações. Ou seja, vai depender de vocês. Se vocês acharem que dá para realizar todo o cálculo no bloco determinado, vocês podem fazer também. Isso é de livre de escolher de vocês. E como vai funcionar? É um livro, vocês vão ler a narrativa. Muitas das partes do livro vão ser a história do jogo, mas para a realização da minha atividade como pesquisador e professor de matemática, os pontos principais vão ser os que vão estar envolvidos no conhecimento matemático. Se possível a forma de leitura, cada grupo decide como vai ler e realizar a leitura. Mas quando chegar a questão principalmente dos conhecimentos matemáticos, eu gostaria que vocês debatessem entre si. Qualquer dúvida me chamasse para que eu possa auxiliar vocês. Ou seja, toda vez que a matemática estiver presente, discutam entre si. As opiniões de vocês, se alguém vai ter uma opinião certa ou uma opinião contrária. Até porque como é o Livro-jogo, a decisão de vocês vai influenciando a história. Então, é ideal que vocês discutam principalmente a parte da matemática. Mas assim, conforme a atividade já está posta, vocês vão realizando. Qualquer dúvida pode me chamar que eu vou auxiliar vocês.

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4
T22A-A4: [...] em busca de respostas, volta o olhar para as próprias mãos: nelas, um envelope oficial, lacrado, endereçado ao prefeito de Girona. O documento é sua credencial — e talvez sua chave para entender o que está por vir. Diante de você, sentados na poltrona oposta, dois homens permanecem atentos. São os agentes designados para garantir sua segurança. Silenciosos, mantêm os olhos vigilantes, prontos para agir ao menor sinal de perigo. Então você decide: T23A-A1: Abrir o documento né? T24A-A2: As três opções que o cara dá, é tipo assim. É perguntar pra dois caras aleatórios, que vão te contar o que precisa saber, ou forçar a mente. T25A-A1: Não. T26A-A2: Forçar a mente ou ler o documento.	T1B-B1: Bora lá. Aí, bora fazer assim, né? Eu leio, aí quando tiver que fazer uma decisão.... eu não sei como é que vai ser a realidade. Bora ver. T2B-B1: [...] T3B-B1: Vocês querem perguntar ao homem sobre a missão, abrir e ler o documento ou forçar a mente para tentar lembrar-se. T4B-B2: Mano, eu não escutei direito, pode sentar aqui no meio? T5B-B1: A gente está sentado na poltrona, eles não sabem o que eles têm que fazer. A gente pode ler a carta, perguntar para os caras que estão ali cuidando da gente, ou, se for sacada, forçar a mente para tentar lembrar. T6B-B2: Quem é a carta? T7B-B3: É o destinado ao prefeito. T8B-B1: É um documento... é sua credencial. O documento é só	T1C-C1: Professor. Então, se a gente escolher, por exemplo, aqui, vai com o bloco 3. A gente vem aqui e coloca o 3 para dizer o bloco que a gente escolhe? T2C-PA: Isso exatamente. T3C-C2: Então isso não é uma ordem né? T4C-C1: Não, não é uma ordem. É pela nossa escolha. Então, bora, né? T5C-C2: Mas a gente precisa passar por todos os blocos? Não né? T6C-C1: Professor, mais uma dúvida. Mas tipo assim, ó, sucesso e falha, como é que é que define isso? T7C-PA: Você vai jogar o dado, se o dado é igual ou maior que 2, é um sucesso, se for menor, é uma falha. T8C-C1: Ah, sim. T9C-C1: Vou ter que ler. T10C-C1: [...] perguntar aos	T33D-D3:Agora a gente começa, né? T34D-D1:Vai, lê em voz alta T35D-D5: [...]. Você decide: 1- perguntar aos homens detalhes da missão; Abrir e ler o documento, ou, forçadamente, tentar se lembrar sem ajuda. T36D-D3:Eu iria pelo mais fácil. T37D-D1:Acho que ele lembra… T38D-D2:E se ele não lembrar? É se ele simplesmente lembrar de uma coisa nada a ver? T39D-D4: Itens: A carta do prefeito. Escreve aí T40D-D1: Perguntar aos homens detalhes da missão: vá ao bloco 2. Abrir e ler os documentos: vá ao bloco 3. Forçar a mente e tentar lembrar sem ajuda. T41D-D3: Eu acho arriscado forçar a mente. E vocês? T42D-D4: É, forçar a mente é arriscado T43D-D2: Eu acho que ele lê o

T27A-A1: Se for a terceira opção você vai parecer suspeito. Você vai perder tempo com nada. T28A-A4: Vamo fazer uma votação, do que quer T29A-A1: Tá bom, vamo de democracia. T30A-A3: Eu voto no bloco 4. T31A-A2: Eu quero forçar a mente. T32A-A4: Eu vou..Cara acho que prefiro abrir o documento. T33A-A2: A gente escolhe três números. T34A-A4: Números pares é o nosso, e impares o 3. T35A-A4: Ímpar, é o 3....Bloco 4. T36A-A2: Qual é o 4? T37A-A4: Aí a gente vai e anota aqui, né ? É isso. T38A-A3: Tu anota aí. T39A-A4: [...] Dificuldade 2. A gente já tem que fazer 5 movimentos. T40A-A1: Parabéns. A gente não sabe nada. T41A-A4: Tá, beleza. Aqui, agora é o seguinte. T42A-A3: A gente vai tirar 2 ou mais no dado. T43A-A4: Tu leu é essa parte? T44A-A3: Aham. T45A-A4: Ele falou lá, aqui na questão da dificuldade. Se a gente acertar, se sair mais de 2 no dado, a gente vai... T46A-A2: É 2 ou mais, 2 ou mais. cima da mesa. T47A-A4: 4. T48A-A2: Tá bom, sucesso.Lá pro bloco, 5. T49A-A4: A gente vai	credencial, então vou deixar ele guardar. T9B-B3: Bora perguntar, mano. T10B-B1: [...] T11B-B3: Ô, mané, eu não confio nesse cara, não. Eles vão aí para cuidar da gente. T12B-B1: Teoricamente. T13B-B4: Quem disse? T14B-B1: [...] T15B-B1: Vocês preferem tentar encontrar a prefeitura por conta própria andando pelas ruas e observando as placas de prédios oficiais? Ou pedirem informação para algum morador? T16B-B4: Pedirem informação para algum morador. T17B-B5: Não estava tendo uma doença? T18B-B3: Eu pedi informação para algum morador. T19B-B6: Pô, bora andar pra conhecer o local? T20B-B1: Eu acho que andar é mais legal do que conversar com uma pessoa. E também fica exposto à doença, né? T21B-B6: Quem quer andar, quem quer andar, levanta a mão. É só eu. T22B-B1: [...] T23B-B1: Agora a gente vai ter que girar o dado. Quem quer girar o dado? T24B-B5: Eu giro o dado. Se tiver que cair três, eu giro. T25B-B4: Foi quatro. T26B-B1: [...] T27B-B1: [...]	homens detalhes da missão, abrir e ler o documento ou forçar a mente. T11C-C1: Pode escolher, agora. T12C-C2: Acho melhor forçar a mente, sem ajuda. T13C-C1: Aqui tem dois. Tem dois caras querendo matar a gente. T14C-C1: Se a gente abrir o documento, a gente vai ver o que acontece com a gente? T15C-C2: Eu não sei. Só indo. T16C-C1: Eu acho que é muito ruim, forçar a mente e tentar lembrar. Eu acho que é mais interessante perguntar para os homens. T17C-C2: Vamos lá para o bloco 2? T18C-C1: Bora pro bloco 2. T19C-C1: [...] T20C-C1: Coloca bloco 7 aqui. É obrigatório a gente colocar. T21C-C1: [...]. Tentar encontrar a prefeitura por conta própria andando pelas ruas e observando placas e prédios oficiais ou pedir informações a um dos moradores? T22C-C2: Nessa eu to muito em dúvida. T23C-C1: Acho que seria interessante pedir aos moradores. T24C-C2: Acho que seria mais rápido procurar. T25C-C1: Acho que seria interessante pedir aos moradores. T26C-C3: Mas e se a gente se perder pela cidade? T27C-C1: Também	documento né gente? T44D-D3: Vota em que? T45D-D1:Ler o documento. T46D-D3: Um ler documento, dois ler o documento. T47D- D4: Apaga a carta do prefeito que ela é um item. T48D-D5: Apaga o que a gente usar aí. T49D-D1:Ah, no caso quando a gente pega, a gente tira, ah tá. T50D-D5: A gente poderia usar essa carta em outro momento. T51D-D2: É. T52D-D4: É, a gente também pode usar para ter algum momento. T53D-D1:E se a gente forçar a memória dele pra lembrar do negócio e... T54D-D5: A gente tem que fazer de novo. T55D-D4: Então, eu somo esse detalhe da missão. T56D-D2: Tem os homens perguntando sobre o que. T57D-D1: O que é esse detalhe dos homens? T58D-D2: Aqui é a primeira opção. Perguntar os homens detalhes da missão. T59D-D1: Ah, é perguntar, abrir o documento e forçar a mente. Então o quê? T60D-D2: Lançar a mente é arriscado. T61D-D1: Então perguntar ou ler o documento? T62D-D3: Ler o documento. T63D-D5: Só que se a gente ler o documento agora, a

e anota aqui, 5. T50A-A3: Já pensou a gente fez a melhor escolha. T51A-A4: [...] T52A-A1: Eu imagino se a gente tivesse tirado fracasso, a gente já tinha perdido T53A-A4: É... O item para devagar na estação. T54A-A2: O trem. T55A-A4: [...] tentar encontrar a prefeitura por conta própria, andando pelas ruas e observando placas. E pedir informações para um dos moradores. T56A-A4: Pô, é lógico que a gente tem que ir na 9, né? T57A-A2: Na segunda opção. T58A-A3: Eu vou aqui. T59A-A4: Até porque se a gente pegando informações com os moradores, talvez a gente descubra alguma coisa em relação a doença. T60A-A1: Tá. T61A-A4: [...] Dificuldade 4. T62A-A1: Nossa, eu sabia que ia era o maior. T63A-A3: O outro era melhor. T64A-A2: 4 ou mais. T65A-A4: Quando na questão de dificuldade a gente tem que tirar 4, certo? Ou... T66A-PA: 4 ou mais. T67A-A4: Então se a gente foi sucesso, era igual. Dificuldade 4. A gente passou.		tem isso. T28C-C2: Então bora pro 9, bloco 9 né? T29C-C1: [...]. Dificuldade: 4. T30C-C1: Ok, acertamos. Sucesso! Bloco 12. T31C-C1: [...] T32C-C1: [...]. Bloco 13. T33C-C1: Anota aí. T34C-C2: Já anotei.	gente não vai ter ele para depois. Porque pode ser que uma das opções exige que a gente tenha o documento. T64D-D2: Então a gente pode perguntar. T65D-D1: Perguntar o que? T66D-D2: Perguntar para os homens? T67D-D1: É. T68D-D2: Porque aí a gente garante que a gente vai ficar com a carta do prefeito. Entendeu? Todo mundo concorda? T69D-D1: É. Bloco 2. T70D-D5: [...]. T71D-D2: Agora eu fiquei curiosa do que acontece no bloco 3. E se eles tiverem enganando ela? E quando ela abrir a carta.... T72D-D5: Deixa eu ler ai. T73D-D3: Não, não pode. Você vai no final. T74D-D5: [...]. T75D-D5: Opção 1 Tentarem encontrar a prefeitura por conta própria, andando pelas ruas e observando placas e prédios oficiais. Ou opção 2. Pedirem informação a um dos moradores. T76D-D2: Pedir informação. T77D-D4: Vocês querem saber de uma coisa? Spoiler. É mais fácil para a gente tentar ir por conta própria. De rocha. T78D-D5: É. Imagina os moradores enganam o investigador. T79D-D5: É mais fácil. T80D-D3: Mas tu tá lendo ainda não pode.

			T81D-D2: Verdade. Todos concordam em ir sozinho? T82D-D5: Bora sozinho. 8. T83D-D5: [...]. (Dificuldade: 3)” T84D-D1: 5. T85D-D5: Sucesso. Vá para o bloco 11. T86D-D5: [...]. (Vá para o Bloco 13)” T87D-D2: 13, né? T88D-D3: Ainda bem que a gente não usou a carta, já pensou? T89D-D2: Por quê? T90D-D3: É verdade, porque se a gente tivesse usado a carta, agora a gente não ia ter o que apresentar pra ela. T91D-D6: De rocha né? T92D-D5: O bloco 13.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

No início da atividade, observou-se certa dificuldade por parte dos alunos em compreender as regras e a dinâmica do Livro-Jogo. Esse aspecto foi evidenciado nos diálogos TC1 a TC8, nos quais o grupo demonstrou insegurança especialmente quanto ao funcionamento do comando de dificuldade, que exige o uso do dado, sendo necessária a intervenção do professor. No entanto, à medida que a situação de ação avançava, os alunos passaram a compreender a mecânica do jogo e conseguiram prosseguir na narrativa de forma autônoma.

Durante a aplicação, notou-se uma interação marcante entre os alunos, caracterizada por uma dinâmica de cooperação e busca por compreensão mútua. A cada bloco em que era necessário tomar decisões em nome do personagem, os grupos realizavam essas escolhas de forma coletiva — seja por meio de votação, como no Grupo 1, ou através de debates para definir o caminho mais adequado a seguir. Dessa forma, os jogadores iniciavam a reflexão e criação de estratégias, com o objetivo de não perder o jogo, como em T55A – T59A e T98D ao T91D, em que os alunos já debatiam entre si sobre o peso de suas escolhas anteriores, e como elas afetavam o seu progresso na história.

Esses trechos evidenciam que, desde o início, os jogadores demonstraram engajamento com a atividade. Tal aspecto reforça o que é apontado por Hammer et al. (2008): não há apenas a imersão em um mundo fictício, mas também o envolvimento colaborativo dos participantes na construção e no desenvolvimento desse mundo. No caso observado, os alunos buscavam, de forma conjunta, tomar as melhores decisões para avançar no jogo.

Além disso, nestes primeiros momentos da aplicação, um dos elementos centrais do RPG foi evidenciado: a relação entre o aluno e a narrativa. A estrutura da história exige uma análise crítica para seu desenvolvimento, o que leva os alunos a avaliarem cuidadosamente as opções disponíveis. Essa avaliação envolve a consideração dos recursos em jogo — como os itens disponíveis, exemplificados pelo uso ou não da carta do prefeito nos turnos iniciais (T35D a T52D) — e das possíveis repercussões sociais de suas escolhas dentro da trama. Com base nessas observações, podemos concluir que as metas da situação foram ser atingidas, e assim os alunos detinham da capacidade desenvolver estratégias e resoluções aos problemas e desafios relativos a Funções Exponenciais.

Como a aplicação foi realizada integralmente em um único dia, os grupos avançaram diretamente para a Situação de Formulação. No entanto, devido às diferenças no ritmo de leitura e na tomada de decisões, cada grupo iniciou essa etapa em momentos distintos. Apesar disso, permaneci disponível para intervir sempre que necessário, acompanhando e auxiliando cada grupo conforme sua progressão na atividade, ainda que estivessem em fases diferentes do jogo.

7.3. TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE DA SITUAÇÃO DE FORMULAÇÃO

Como exposto na seção dedicada a elaboração do Livro-Jogo, este foi estruturado nos intervalos de blocos 13 a 22 e 43 a 53, nos quais foram explorados conteúdos diferentes relacionados a função exponencial. Para garantir a consolidação desses conteúdos, todos os momentos da Situação de Formulação foram contemplados em cada um desses intervalos. Portanto esta análise será subdividida em cada um dos intervalos, na busca de evidenciar indícios de aprendizagem em cada um dos conteúdos desenvolvidos.

7.3.1. Transcrição e Análise Blocos 13 ao 22.

Dos blocos de 13 a 22, trabalhou-se um problema de uma Função Exponencial crescente $f(x) = a^x$, com a exploração da relação de interdependência entre as variáveis e a criação de uma expressão que descrevesse a situação do número de infectados pela doença em função das semanas percorridas. Segue no quadro abaixo as transcrições relacionadas a aplicação desta etapa.

Quadro 19 - Transcrição dos diálogos dos Blocos 13 ao 22

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4
T106A-A4: Ok. Vamos lá, vamos prosseguir. “O que você me diz, doutor? É que parece que na primeira semana de infecção tínhamos três casos. Há quantos casos teríamos na primeira, na segunda e na terceira semana respectivamente.” Agora está vindo a questão do raciocínio matemático. Aqui a gente tem que acertar." T107A-A3: É o bloco 15. É porque os contaminados são triplicados. T108A-A1: Então é três, nove, vinte e sete. T109A-A3: Todo mundo concorda, né? T110A-A4: Sim, sim, são triplicados. Começando com o terceiro caso na primeira semana. Ok, certo. T111A-A2: Olha isso aqui, se tu coisou o outro. Talvez completando os dados deixados pelo médico você consiga entender melhor o que ele quis dizer com triplicar. T112A-A4: Pô, mas pensando bem... T113A-A1: Não, porque você não	T28B-B1: [...]. T29B-B1: Alguém anota aí, uma semana vezes 3 de contaminação. T30B-B5: Progressão, se é aritmética ou geométrica eu não sei. T31B-B1: [...]. T32B-B1: Se triplica, é 3, 9 e 27, né? T33B-B6: Tá lendo isso aí? T34B-B1: Não, agora to respondendo. T35B-B6: Não entendi. T36B-B1: Ele disse que teve três infectados na primeira semana. Se tá triplicando, na segunda semana... T37B-B2: Vai ser 9. T38B-B1: E na terceira? T39B-B4: 27. Mas quantas semanas já passou? Três? T40B-B1: Ele só perguntou se tem como estimar quantos casos teremos na primeira, na segunda e na terceira semana, respectivamente. Sim. Quantos? 3, 9 e 27 casos, respectivamente. T41B-B1: [...]. T42B-B4: Bora lá. T43B-B1: Deixa eu só anotar aqui. T44B-B4: A gente não precisa fazer o	T36C-C1: Vai ter que calcular. T37C-C2: Mas isso aí é no bloco 13, né? T38C-C1: Isso aqui é no bloco 13. T39C-C2: Por que não tem o registro do bloco 13? T40C-C1: A gente vai ter que fazer um calma. Independentemente, como ele falou, a gente vai ter que usar algum ator de rascunho. Será? Professor. T41C-C1: A gente pode usar essa área para fazer os cálculos? T42C-PA: Pode usar. T43C-C3: Independente do bloco que a gente tá? T44C-PA: Independente do bloco, esse espaço é dedicado para fazer o rascunho. Ai dentro do bloco vocês podem colocar só a resposta se quiserem. T45C-C1: [...]. T46C-C3: Tinha quantos casos? T47C-C1: A cada semana vai ser triplicando. T48C-C3: Se fosse assim seria o que? Seria 3, 9, aí 9 vezes 3.	T94D-D5: Agora é o momento do cálculo. T95D-D2: A verdade não precisa. T96D-D4: Precisa. T97D-D2: Qual foi o número da primeira semana? T98D-D5: Três. T99D-D1: Se não estiver enganado, isso daí é...Não esqueço o nome agora. T100D-D3: Exponencial? T101D-D1: Não. T102D-D4: É uma PG. T103D-D1: Por causa que eu confundo PG. T104D-D4: Na verdade é porque elas são relacionadas. T105D-D5: É porque a PA. ela é normal. T106D-D3: Aí, no caso, para a gente fazer a anotação, não tem a anotação dele por aqui, a gente faz aqui no final? T107D-PA: Aqui o 13, é só para tomar a decisão. Aí eu vou perceber essa decisão de vocês a partir do trajeto que vocês tomaram. Porque antes do 13, se não me engano, é no 13 que ele diz, vai para o 14 ou para o 15. Aí eu vou olhar o trajeto de vocês para verificarem com a resposta que

estaria triplicando, você é só adicionando três. T114A-A4: É verdade. É, mas aqui é bom porque ele trabalha o conceito de triplicar. Tá, vá para o bloco 15. [...]. T115A-A4: [...]. T116A-A3: É só para a gente completar, aqui é 2, aqui vai ser 27, e aqui vai ser o triplo de 27. T117A-A4: Esboce o quadro. Relatório do investigador. Semana...Número... Contaminado. 1-3, 2-9....segunda semana, 3 vai estar para 27. 4 está para 81. Prossiga para o bloco 17. T118A-A4: [...].. T119A-A1: É um produto. T120A-A2: É só potência. T121A-A4: O número de contaminados, como um produto de 1 mais números. É fatorar em números, fazer a fatoração de números. T122A-A1: Ah tá, é só o número de infectados? Mas sem forçar fatorar, não vai ser só um número? T123A-A4: Vai, só que aí é o seguinte, quando a gente fatora um número, a gente o divide em fatores primos. Números primos. Aí a gente sabe que qualquer número primo 3, 4 e assim vai. Bora ver aqui. Só uma pergunta aqui. Essa parte aqui para escrever da última semana, ou todos? T124A-PA: Todos. T125A-A4: Escrever aqui. Produto de dois números vai ser a	cálculo? T45B-B1: Não, o cálculo foi esse. T46B-B1: [...]. T47B-B1: Aí, para ele ler aqui, ó. Hospital Santa Catali... Catalina. T48B-B5: Mano, semana dois vai ser... T49B-B1: Isso aqui é só completar. T50B-B5: É só completar. Segunda nove, terceira vinte e sete... a quarta T51B-B1: 81? T52B-B5: É 81. T53B-B3: Tem que fazer o cálculo aqui. De como a gente chegou, entende? Não que eles não saibam como chegar, mas sim um passo a passo. Mesmo se que seja muito intuitivo pra gente. T54B-B4: É um passo a passo. T55B-B1: “O prefeito agradece pela sua dedicação e fala sobre o pedido [...]. T56B-B1: Não entendi. T57B-B1: “A chave está em escrever o valor do número de infectados como um produto de um ou mais números.” T58B-B5: Produto. Produto é o quê? Divisão? T59B-B4: Multiplicação. T60B-B5: Eu nunca gravei o nome dessas coisas. T61B-B6: É porque aqui na primeira semana vai ser só um número, na segunda semana vai ser 2 números. T62B-B1: Esse aqui é só um? T63B-B6: Esse aqui é 3 vezes 3. Acho que é isso. Continua.	T49C-C1: 27. Não, 27. T50C-C1: 3, 9, 27. T51C-C2: Como você diz que desde o intervalo de uma semana, o total de contaminados é triplicado. Então seria 9 aqui, 3, 9. T52C-C1: Na primeira semana seria 3, ai na segunda semana seria 9, porque está triplicando 3. Aí seria 9, porque é 27. T53C-C2: Ah verdade. T54C-C1: Deve ser esse. T55C-C2: Então o seria chegar aqui? T56C-C1: Têm que ir para o bloco 15. T57C-C2: Acho que não precisa anotar muito. T58C-C1: Como? T59C-C2: Acho que não precisa anotar muito. T60C-C1: Não. T61C-C1: [...]. T62C-C1: Bloco 16. T63C-C1: [...]. T64C-C1: Esboce e preencha o quadro e no seu relatório do investigador. T65C-C3: Bota ai, aqui é a primeira. Aqui é 27, aqui vai dar.... T66C-C2: 81. T67C-C1: [...]. “A chave está em escrever o valor do número de infectados como um produto de um ou mais números.” Ele franze a testa, balança a cabeça devagar e desabafa: — Confesso que não entendi muito bem o que ele quis dizer com isso… talvez tenha algo a ver com matemática. Você conseguiria me ajudar a escrever esses números dessa forma?”	vocês deram a nossa opção. T108D-D5: Já pensou que a gente erra isso? T109D-D6: Tá amarrado. T110D-D5: Bloco 15. T111D-D5: [...]. T113D-D5: Semana 1, número de contaminados, 3. Semana, bloco vazio, 9. Semana 3, número de contaminados em vazio. Semana 4, número de contaminados em vazio. T114D-D6: Agora é para a gente preencher. T115D-D1: Na primeira semana, 3. Na segunda, 9. Na terceira, 27. Na quarta... T116D-D5: 81 T117D-D4: É preencher aí ou ali? T118D-D1: aqui. T119D-D2: É melhor fazer um quadradinho. T120D-D1: Semana 1, 3. Semana 3, 27. Semana 4, 81. Eu coloquei assim gente. T121D-D5: Tá bom. T122D-D5: Posso preencher o quadro no seu relatório de investigador, lá para o bloco 17. T123D-D5: [...]. T124D-D5: Anote no seu relatório do investigador, lá para o bloco 18. T125D-D6: A chave está em descrever o valor de números infectados como um produto de um ou mais números. T126D-D3: Pera deixa eu ler aqui, ouvindo eu me perco. T127D-D2: Produto de um ou mais números. T128D-D5: É uma fórmula geral.

primeira semana. A gente pode colocar para 3 vezes 1. Produto de dois números. De 1 mais números? É, de 1 mais números. Então a gente nem precisava colocar 1. Para colocar a segunda semana vai estar 9, né? Então 3, vamos explicar 3. Terceira semana e quarta semana. 3 vezes 3 vezes 3. Quarta semana. T126A-A2: 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3. T127A-A4: Conseguimos escrever. Se bem que ele não especificou ser primos, né? Mas a gente anota assim. Vai para o bloco 18. [...]. T128A-A1: Ah, não! T129A-A4: Existe alguma forma mais simples de entender essas multiplicações repetidas? Você pensa por um instante e lembra de um recurso útil: Potenciação. T130A-A1: Parabéns. Você fez a forma mais simples que o livro não queria. T131A-A4: [...]. T132A-A1: Parabéns. T133A-A3: A gente fez isso, agora ele queria fazer a mesma coisa só que de outra forma. T134A-A1: Não, olha só, isso aqui é uma representação mais complexa que isso aqui, por causa da notação. É uma coisa mais distante, mais complexa do que isso. T135A-A4: Tu acha? T136A-A1: Você vai conseguir mostrar isso aqui para uma criança? Ela vai entender mais fácil que isso aqui? T137A-A4: No caso,	T64B-B1: [...]. T65B-B1:[...]. T66B-B1: [...]. T67B-B6: Acho que precisa completar não. T68B-B1: Talvez precise, bora completar. T69B-B1: Pronto. T70B-B1: “Díaz folheia a carta com mais cuidado, os olhos buscando algo específico. Então, aponta para o rodapé da última [...]. T71B-B1: Se você acredita ter entendido a relação entre o número de semanas e o valor do expoente na potência, anote no seu Relatório do Investigador e vá para o bloco 22. Se ainda não consegue ver essa relação, ou prefere não arriscar. T71B-B4: A gente entendeu né? O valor da semana é... T73B-B1: É a potência que tá no 3, o que é número de infectados. O número de infectados é o resultado de 3 elevado ao número da semana. Como por exemplo, se é a 3° semana, então é 3 elevado a 3, o número de infectados da 3 semana é 27. T74B-B6: Por exemplo, primeira semana vai ser 3 elevado à primeira. T75B-B3: Não é 3 ao... T76B-B1: É exatamente isso. A primeira semana é 3 elevado a um. Quanto é 3 elevado a 1? T77B-B3: 3 T78B-B1: E na primeira tinha quantos infectados? 3. Na segunda semana é 3 ao quadrado.	T68C-C1: Anote no seu relatório de investigação. T69C-C2: Agora que tem que anotar. Tá, o que é pra fazer? T70C-C1: Vá para o Bloco 18. T71C-C1: “O prefeito coça a cabeça, confuso, e olha para os [...]. T72C-C1: Vá para o bloco 19. T73C-C2: Passou por bloco 18, não é? T74C-C1: Passou, já lembro. T75C-C2: Então é 18 e 19. T76C-C1: “— Era exatamente isso que Santiago havia pensado[...]. T77C-C2: Sabe, eu acho que esse daqui é o bloco 16, não é? Eu acho que a gente tem que anotar aqui. Mas depois a gente anota. T78C-C3: Não é esse aqui. T79C-C2: Não, é porque esse aqui é outro. Esse é o bloco 16, tem que anotar aqui. Deixa eu ver. T80C-C1: 3 a um, 3 ao quadrado, 3 ao cubo e 3 a quarta. T81C-C3: Isso que eu ia te falar. T82C-C1: Aí 27, 81. T83C-C2: O nosso quadro e o preencha no seu relatório de investigação. No bloco 27 acho que a gente tem que anotar algo. T84C-C1: Essa é só a pergunta. T85C-C2: Mas aqui diz anote no relatório do investigador, porque diz que A chave está em escrever o valor do número de infectados como um produto de um ou mais números. T86C-C1: Isso aí, é a	T129D-D6: Tu diz? T130D-D5: Porque o índice de valores que a gente recebeu, eles já estão sendo usados no bloco 16. Então acho que seria melhor a gente usar uma fórmula geral pra isso. T131D-D2: Tem alguma carta? T132D-D3: A gente tá com o do cara no relatório do hospital. T133D-D2: Então a gente tem que ler. T134D-D3: Aí ele solta as informações da carta no texto. T135D-D1: aqui ele tá dando o parcial. T136D-D3: Como você faz, então? Porque aqui tá colocando em potência. Aqui é 3 elevado a 1, dá 3. 3 ao quadrado, 9. Então é 3 ao cubo, 27. 3 à quarta, 81. Então é só fazer isso. T137D-D6: Será? T138D-D3: É. Porque já tá pré-organizado na tabela, né? É, aqui a semana. Semana 2, semana 3, semana 4. Porque se a gente for colocar aí uma multiplicação, o 3 ficaria 3 vezes 1. T139D-D4: 3 vezes 3. T140D-D3: É 27, 3 vezes isso. Seria isso, se a gente colocasse uma multiplicação. Não é? Aí eu vou com 4 a. Rápido, mas isso aqui assim já tá 19. T141D-D5: Isso aqui assim já tá 19. T142D-D3: Não, porque eu tô falando aqui, ele fala pra colocar como produtos. Ele fala aí que é para a gente colocar pelo produto o resultado, né? Se a gente fosse colocar por meio de produto

eu acho o seguinte, que ele primeiro te dá essa noção de representar os números em produtos. Só que aí, ele também te dá outra opção de representar esse número de outra forma. No caso, com base nesse zoom que você já fez a representação. Por exemplo, ele te deu um 9, é a mesma coisa que 3 vezes 3. E também, posteriormente, você vai aprender que é a mesma coisa que 3 ao quadrado, 3 elevado a 2. T138A-A1: Tô fazendo uma explicação contrária. T139A-A3: É exatamente isso que ele pediu, no bloco 17 ele pediu para a gente fazer a representação em multiplicação. Ele nunca foi contra isso daí. T140A-A1: Ele nunca foi contra. mas ele não falou que precisava ser multiplicação. Ele falou que precisava ser resultado de... dois ou mais. T141A-A3: Podia ser 9 vezes 1, 27 vezes 1, 21 vezes 1, 9 vezes 9, 9 vezes 3. Só que ele colocou 3 vezes 3, qualquer coisa. T142A-A4: É verdade. T143A-A3: Antes eles disse que tinha que ser produto. T144A-A4: Sabe, continuando.... [...]. T145A-A2: Mas tem que anotar dessa parada aqui. T146A-A4: Tem. T147A-A3: 27, 3 ao cubo. 81, 3 à quarta. T148A-A4: Bora lá, bloco 20. [...].	T79B-B4: Não, mas o valor de infectados não tem mais a ver com o número inicial de infectados? T80B-B1: Sim. T81B-B4: Ah, isso tá escrito no papel? T82B-B1: Sim. Tá escrito que o número de infectados triplica toda vez, então ele multiplica por 3. Então é só a potência de 3. T83B-B4: Tá certo. T84B-B1: “[...]. — Vamos chamar de t o tempo em semanas e C o número de contaminados. Com base no que descobriu, pode-se escrever a expressão assim:” T85B-B4: t vai ser 3 elevado a... T86B-B1: Não, não, a gente tem que fazer uma função. T87B-B3: Tem que formalizar. T88B-B1: Vai ser, bora lá. T89B-B1: Contaminados, que é C, vai ser igual... T90B-B2: É o t, tempo, não é? E qual o outro nome que deu T91B-B1: É isso, C igual a 3 sobre t. Número de contaminados. Chamaram o t de tempo em semanas. Número de contaminados, isso que é. T92B-B3: Isso aí mesmo. É 3 sobre t. T93B-B4: 3 sobre t? T94B-B1: É porque é tempo de semana. T95B-B4: 3 elevado a t, não é? T96B-B1: É. T97B-B4: Não, tu falou 3 sobre t. T98B-B1: Ah, tá. Então me perdoa. 3	potenciação. T87C-C2: Não, eu sei. Eu entendi isso. Só que o que fala para a gente é anotar no relatório. Acho que a gente tem que anotar essa parte aqui. Porque aqui diz as chaves, está aí em escrever o valor do número de infectados como um produtor, de 1 a mais números. T88C-C1: Será tipo, 3, aí 3 vezes 3, 3 vezes 3, 3 vezes 3, 3 vezes 3. T89C-C2: Bom, seria 3 tipo elevado a N. Aí talvez seria uma semana 3, 2 semanas 9, 3 semanas 27. T90C-C2: Vou só anotar outra e depois você volta aqui. Bloco 20. T91C-C1: [...]. T92C-C1: [...]. T93C-C2: Então existe uma relação entre o número de semanas e o valor contido na potência. Bom isso a gente percebeu, então seria 3 elevado a n, porque depende da semana. T94C-C3: Se fosse 5, seria 3 elevado a 5, né? T95C-C2: Então a relação seria 3 elevado a n. T96C-C1: Que é o número contaminado elevado ao número de semana. Anote-se no bloco 22. T97C-C2: Só que a gente vai escolher o bloco, né? T98C-C1: Não, se a gente entendeu, a gente vai para o 22. Se a gente ainda não entendeu, a gente vai para o 21. T99C-C2: Qual vocês vão querer colocar?	em multiplicação seria basicamente isso daqui. Então acho que isso daqui já dá para a gente passar para o próximo, né? É o bloco 17, né? A gente sabe se coloca no lugar certo, tá? T143D-D3: Bora perguntar? Acham melhor? T144D-D1: Ela vai perguntar. T145D-D3: A gente está com o produto bem nesse daqui do 18, que está fechado. T146D-PA: Está a nota no relatório para o 17, porque está antes, aí o 18 que vai para esse aí. T147D-D3: Mas está certo aqui? o que a gente fez porque a gente não entendeu como é que vai funcionar o cálculo. T148D-PA: Entendi. A forma que vocês vão fazer é conforme vocês pensarem mesmo, podem fazer um produto de um ou mais números, pode ser só dois, pode ser três, quatro, conforme vocês forem conseguindo fazer, entendeu? Não vai depender da lógica que o grupo tomar. T149D-D5: Para o bloco 18. T150D-D5: [...]. T151D-D5: [...]. T152D-D5: Esboce o quadro e o preencha. A gente já fez isso. Vá para o bloco 20. T153D-D1: 19 e 20. T154D-D5: [...]. T155D-D5: Opção 1. Você acredita ter entendido a relação entre o número de semanas e o valor do expoente na potência?

[...]. T151A-A3: A quinta semana vai ser três elevado a cinco, então.... T152A-A1: É a função. F(t)= 3t. T153A-A4: No caso não seria f de x, seria f de t, né? T154A-A1: É f de t. T155A-A4: Bloco vinte e um. T156A-A3: Vinte e dois. É o certo é tipo vinte e dois que a gente já entendeu. T157A-A2: Não tem nada pra anotar? T158A-A4: É, anote no seu Relatório do Investigador. T159A-A3: Anotar o que? T160A-A4: Justamente a relação. A gente tem que fazer a relação aqui. T161A-A3: Ah, tá. Então é isso aí que ele falou, f de t. T162A-A2: F de x pode ser. T163A-A4: F de t que é igual a três elevado a t. Onde f de t é igual ao... Se a gente conseguir entender, a gente vai para o bloco vinte e dois. T164A-A2: Vinte e dois. T165A-A4: [...]. T166A-A2: A semana que estamos T167A-A4: É, faltou um quê aqui. [...].Ah, tá. Acho que a gente... A gente foi um pouquinho além. “Vamos chamar de ter o tempo em semanas e ser o número de contaminados.” Como base, a gente descobriu. Pô, a gente só vai reescrever a mesma coisa. T168A-A2: Só que com C.	elevado a t.	T100C-C1: Perceber que existe uma relação entre o número de semanas e o valor contido na potência. 3 elevado a n. T101C-C1: Se a gente entendeu, a gente vai para o 22. T102C-C1: É 22. T103C-C1: “Díaz cruza os braços e solta um suspiro, com um tom de [...]. T104C-C1: Bloco 22. Essa relação aqui. Vamos chamar de T o tempo em semanas e C um número de contaminados. T105C-C3: T é o tempo, C é os contaminados. T106C-C2: Seria tipo assim? T107C-C1: Isso. T108C-C3: Perfeito.	Anote no seu relatório de investigador e vá para o bloco 22. Se ainda não consegue ver essa relação, ou prefere não riscar, vá para o bloco 21. T156D-D1: A gente entendeu, né? Então a gente vai para o 22. Só uma coisa, eu tenho que colocar onde esse negócio? T157D-D5: A gente já terminou de usar a carta. É, quando a gente conseguir um item, ele vai aparecer aqui. Permissão do prefeito. T158D-D1: Permissão do prefeito, a gente já tira? T159D-D5: Quando a gente ganhar um item, vai aparecer aqui assim. Aí não apareceu nada sobre a carta. T160D-D1: Então qual é isso aí? T161D-D5: Agora a gente vai para o 22. T162D-D5: Eu tenho que anotar em que parte do relatório? T163D-D1: Porque aqui 19 eu anotei a parte da tabela. Aí tem que anotar esse negócio sobre... É aqui no 20 né, sobre a relação das semanas, né? T164D-D2: Não era o 21 do bloco? T165D-D5: 20 é não entendeu. Mas todo mundo entendeu que a relação é uma potência de base 3, né? Base 3 é o base o número de infectados e o Expoente, sendo a semana. T166D-D5: [...]. T167D-D1: O gráfico, não é? T168D-D4: É um gráfico.

			T169D-D3: Achei que a gente ia montar a fórmula. T170D-D2: Não é a fórmula não? T171D-D5: Pode ser também, fórmula, gráfico, como a gente preferir. T172D-D1: Acho que a melhor fórmula. T173D-D2: Infectados pelo número de infectados. T174D-D5: É C, e o número de infectados é T, tempo em semanas. T175D-D2: Então a gente pode colocar C. C de T, né? Tipo forma de função. T176D-D5: C de T. T177D-D3: Assim, né? 3 elevado a T, né? T178D-D1: 3 elevado a T. Só ajeitar aqui. É de semanas que tem o número de semanas, né? Não é porque é o que fala aí no negocinho, entendeu? Deixa eu ajeitar aqui para ficar legível. Pronto.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Neste primeiro momento voltado aos conteúdos de matemática desenvolvidos no Livro-Jogo nos blocos de 13-22, houve a busca que os alunos explorassem um problema de uma Função Exponencial crescente $f(x) = a^x$, com a exploração da relação de interdependência entre as variáveis e a criação de uma expressão que descrevesse a situação do número de infectados pela doença em função das semanas percorridas.

Ao longo da aplicação, como professor pesquisador, foi possível observar o engajamento dos grupos com o material e com a proposta da atividade. Diante disso, optou-se por permitir que os alunos conduzissem livremente o desenvolvimento da tarefa. No entanto, em determinados momentos, os próprios estudantes solicitaram a presença do professor aplicador para esclarecer etapas relacionadas à realização e ao registro do jogo. Essas interações podem ser observadas nos turnos T122B–T125B, T39C–T44C, T106D–T109D e T142D–T149D. Nesses momentos, identificou-

se a ocorrência do padrão I-R-A (Iniciativa–Resposta–Avaliação), no qual o professor aplicador buscava conduzir os alunos à reflexão sobre a atividade em curso, favorecendo a superação de dificuldades no desenvolvimento da tarefa.

A partir da análise dos diálogos, foi possível identificar um entendimento dos alunos acerca das atividades propostas e dos conceitos matemáticos envolvidos. Em um primeiro momento, destacaram-se os grupos 2 e 4 no desenvolvimento de uma das habilidades previstas na BNCC — (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos [...]. Tal avanço pôde ser observado nos turnos T29B–T40B e T99B–T105B. Embora não tenha se concluído a discussão sobre o tipo de progressão representada, verificou-se o início de argumentações e consolidações relacionadas a essa habilidade.

Quanto à resolução dos problemas propostos, foi possível perceber que a superação dos desafios ocorreu por meio de um processo colaborativo entre os alunos de cada grupo. Nos turnos T107A–T113A (grupo A), T29B–T40B (grupo B), T69C–T89C (grupo C) e T165D–T178D (grupo D). Após a formulação inicial de uma indagação, outro aluno oferecia uma resposta e aguardava o retorno do colega para, então, dar continuidade à atividade ou reformular sua resposta. Assim, os alunos construíram em conjunto uma estratégia de resolução.

E ao analisarmos os registros escritos dos alunos, observamos que os grupos desenvolveram respostas por caminhos distintos, mas que se mostraram válidas. A análise das interações entre os integrantes evidenciou que essas trocas foram fundamentais para a resolução dos problemas propostos. No Grupo 1, destacamos o segmento formado pelos turnos T109A – T113A, nos quais os alunos debatem sobre o comportamento da doença, questionando se sua progressão ocorre de forma aritmética (por meio de uma soma) ou geométrica (por meio de uma multiplicação). A interação inicia com um padrão I-R-F, em que um dos alunos levanta um questionamento para verificar se os demais compreenderam, na busca de estimular que outro participante dê prosseguimento à explicação, articulando o raciocínio de forma mais precisa.

Nas interações do Grupo 2, foi possível observar a construção coletiva dos alunos da relação entre o número de semanas e o expoente da potência de base 3, formulada no problema anterior. No segmento de T71A – T83A, os alunos B1 e B6 assumiram um papel ativo ao explicar essa relação aos colegas, o que promoveu um

ambiente de aprendizagem colaborativa. Essa troca evidenciou o engajamento do grupo e contribuiu para o aprofundamento da compreensão matemática.

No Grupo 3, observou-se um debate em torno da mesma relação. Esse diálogo ocorreu entre os turnos T93C – T196C, nos quais o aluno C2 expos o raciocínio construído, e outro dos integrantes (C3) apresentou um exemplo com o objetivo de ilustrar e justificar a lógica adotada diante dos demais.

No Grupo 4, destacam-se os turnos T167D – T177D, nos quais, após a solicitação do Livro-jogo para que os alunos representassem a relação descoberta por meio de uma expressão matemática, parte do grupo sugeriu inicialmente a elaboração de um gráfico. Contudo, após discussão, decidiram corretamente pela construção de uma expressão, referida por eles como uma 'fórmula'. Esse episódio evidencia que, ao longo da atividade, o grupo reconheceu a necessidade de alinhar decisões coletivamente, o que fomentou o debate sobre a forma mais adequada de apresentar a resposta às demandas do problema.

A partir da análise das interações entre os grupos, constata-se que a atividade proposta nos blocos 13 a 22 promoveu uma dinâmica favorável à cooperação entre os alunos, resultando em maior engajamento com a aprendizagem. O professor, ainda que exerça um papel de orientação, não assume o protagonismo da atividade; suas intervenções concentram-se em validar e direcionar as ações dos estudantes, conduzindo-os à compreensão do funcionamento/regras do jogo e conceitos trabalhados. Verifica-se que a proposta favoreceu a participação ativa dos alunos, como evidenciado nos diálogos registrados. Diante disso, conclui-se que a atividade contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento dos conceitos abordados nesta unidade.

7.3.2. Transcrição e Análise Blocos 43 ao 53.

Nos blocos de 43-53, trabalhou-se um problema de uma Função Exponencial decrescente $f(x) = a^x$, com a exploração da relação de interdependência entre as variáveis e a criação de uma expressão que descrevesse a situação do número de leitos disponíveis em um hospital fictício da história em função das dias percorridos. Segue no quadro abaixo as transcrições relacionadas a aplicação desta etapa.

Quadro 20 - Transcrição dos diálogos dos Blocos 43 ao 53

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4
T208A-A4: [...]. T209A-A2: Olha essa segunda opção. T210A-A1: É óbvio que é a primeira opção. T211A-A4: [...]. T212A-A1: Esse cara está doente, vai morrer em três dias. T214A-A4: Eu acredito que tá. Para o bloco 46. [...]. T215A-A1: É 256, 64, 32, 16. T216A-A2: Semana é quê? É até zerar que ele falou? T217A-A4: Não, acho que vai até o fim dessa tabela aqui só. T218A-A4: Ok né. Vai para o bloco 47. [...]. T219A-A1: 512 multiplicado por meio elevado a t. T220A-A1: Isso é tipo...A gente vai escolher se na segunda opção que é obvio. Mas a gente pode ler a primeira opção, só pra ver o comentário. T221A-A4: É. Segunda opção. Vai pro bloco 49. T222A-A4: [...]. T223A-A4: [...].. T224A-A1: O fato que o doutor manda essas contas pra a gente fazer T225A-A4: Pega lá. Só para reescrever isso aqui. T226A-A4: Bloco 51. T227A-A3: Tu colocou fracionado foi? T228A-A4: Acho que sim. Tá, bora lá. [...]. T229A-A3: Ele tem preguiça de pensar. T230A-A4: A relação é... T231A-A1: L... T232A-A4: L é o quê? T233A-A1: L é o	T136B-B1: [...]. T137B-B5: O que, rapaz? T138B-B3: Vamos fazer matemática já? T139B-B1: No final, no primeiro... T140B-B6: Vai caindo toda vez com uma PG, não é? Uma PG, só que decrescente. Um sobre dois. T141B-B1: Então, tipo, você vai caindo pela metade. T142B-B6: E aí, você vai até quando ela aguenta? T143B-B1: Não, ele quer saber quanto que fica na... Você começou com 512, no final do primeiro dia... T144B-B1: A cada dia que vai? T145B-B1: No final do primeiro dia, vai ser esses... o primeiro aqui, 44. T146B-B4: 512 no primeiro dia, 256 no final do primeiro dia... T147B-B1: Não, mais dividindo por dois. T148B-B1: [...]. T149B-B1: [...]. T150B-B3: Já anotei. T151B-B1: [...]. T152B-B6: Fica tipo... T153B-B1: É só multiplicar por meio, é só isso aqui. Ou a gente multiplica por dois ou por meio. T154B-B6: Ah, sim, sim. T155B-B3: Escreve, escreve. T156B-B1: Vai com 49. T157B-B1: [...]. T158B-B1: [...]. T159B-B4: Quer um papo aí que ele quer? T160B-B5: Coisa simples. T161B-B3: Tem como representar 2 elevado	T235C-C1[...]. T236C-C1: Cara, é bem óbvio. Está diminuindo pela metade todo dia, então não pode ser 512, 1024, 2048. T237C-C1: Porque vai do dia de 512 e vai... T238C-C2: 256, 128 e 64. T239C-C1: Bloco 44. T240C-C1: [...]. T241C-C1: Bloco 46. T242C-C1: [...]. T243C-C1: Esboce o quadro e preencha no seu Relatório de Investigador. É o 46. T244C-C1: 512, é 256, aí 128, 64, 32, 16. T245C-C2: Aí é 256, 128, 64 T246C-C1: Ah, começa pelo zero. T247C-C3: Exatamente. T248C-C2: Então 16. T249C-C1: Bloco 47. T250C-C1: [...]. T251C-C3: 512 vezes meio. T252C-C1: 512 vezes meio. Bloco 49. T253C-C1: [...]. T254C-C1: Bloco 50. T255C-C1: [...]. T256C-C1: Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador. Segundo dia é 128, aqui é 64, aí é 32, e aqui é? T257C-C3: 20. T258C-C1: Não, não, 16. T259C-C2: E qual é o outro? É a potência, né? T260C-C1: Não. Número de leitos como um produto de 512. É tipo aqui, 512 vezes meio. T261C-C3: Isso aqui é um terço? T262C-C1: Não, isso aqui é a metade.	T287D-D5: [...]. T288D-D5: 256, 128 e 64, respectivamente. Vá para o Bloco 4. Ou então, 512, 1024 e 2048, respectivamente. Vá para o Bloco 45. T289D-D3: Qual é o primeiro Bloco 44? T290D-D5: 44. T291D-D3: É esse, né? T292D-D5: É. T293D-D5: Vê aí se tem alguma anotação para o Bloco 43. T294D-D2: Não, é só a parte da 46 que tem que anotar agora. T295D-D5: [...]. T296D-D1: Agora tem que anotar. T297D-D5: [...]. T298D-D5: Agora relatório 46. T299D-D5: 2, 5, 6, 64, 32, 16. T300D-D5: [...]. T301D-D5: 512 vezes 2 vai para o bloco 48. 512 vezes meio vai para o bloco 49. T302D-D3: É bloco 49. T303D-D5: [...]. T304D-D5: Vá para o bloco 50. T305D-D5: [...]. T306D-D5: Aqui. T307D-D4: Ah, uma tabelinha. T308D-D5: Esboça qual é a repreensão do seu relatório de investigador. 50. Para colocar aqui o relatório de investigador. Só para representar esse aqui. T309D-D4: Dia 1, dia 2. T310D-D2: Acho que entendi. Mais começa com o dia 0. T311D-D5: Agora 512 vezes. Então, aqui é assim. A gente concorda que o

número de leitos. Igual a...L é zero. L zero são os leitos iniciais, vezes... meio elevado a d. T234A-A4: Não não, tá certo. Mas se tu quiser também eu posso fazer... T235A-A1: É meio elevado a D é a mesma coisa. T236A-A4: Por quê? T237A-A1: Eu falei D, os dias são D. T238A-A4: Ah, dias D. Tá, tá bom. T239A-A1: O que você colocou aqui? Ah, é que assim, você poderia ter colocado como parte de toda a função. T240A-A4: Eu vou fazer assim, eu vou fazer assim. L(d) igual L zero. Eu posso colocar 512? T241A-A1: Não. Ele tá falando aqui. T242A-A4: Ele só quer a relação, ele não quer os valores. Tá bom, vai ficar assim. T243A-A2: Eu tô gostando. T244A-A4: Só vou colocar aqui...É D ou T? T245A-A1: É D. T246A-A4: A gente tava no quê? 51? T247A-A3: 51, agora 52. T248A-A1: Mas a gente não tava aqui não? T249A-A4: Não, a gente tava aqui. Foi aqui que a gente fez a relação. T250A-A3: Agora a gente foi pro 52[...]. T251A-A2: Desenvolve ele. T252A-A4: É a mesma coisa. Tá, vamos lá pro bloco 53. T253A-A3: Tá anotado ali a mesma coisa.	a N. Tipo 512 vezes 1 sobre dois, só que 2 elevado a N, que é o número de dias? T162B-B1[...]. T163B-B1: [...]. T164B-B1: [...]. T165B-B3: Eu falei. Mas é básico. L vai ser igual... T166B-B1: L é o número de leitos. L vai ser igual... T167B-B3: 512 sobre 2 elevado a N. T168B-B1: D é a quantidade de dias. É porque é dia. T169B-B3: Se for zero, fica sobre um e fica igual. T170B-B1: Real, real. T171B-B3: Primeiro dia fica 512. T172B-B3: Calma aí, vamos falar, né? Vamos falar aqui no áudio? T173B-B5: Acho que já está dando pra ouvir tudo o que vocês estão falando. T174B-B1: [...]. T175B-B3: Quinto dia a gente tá? T176B-B1: A gente está no quinto dia. Então tem 16 leitos. T177B-B3: Não é 32? T178B-B5: Aqui, 16 leitos. T179B-B3: Na verdade não, é 512 dividido por... ah é verdade.	T263C-C2: Número de leitos como um produto. T264C-C1: Porque isso é o que está multiplicando, né? T265C-C3: Ele multiplica por 1 e divide por 2. T266C-C1: Sim, ele vai multiplicar por 1 e dividir por 2. T267C-C3: Não, aqui não seria vezes 2? Então aqui vezes 3. T268C-C1: Ah, entendi. Sim, é um terço. T269C-C3: Não, é 2. T270C-C1: Não, porque eu pensei que você estava falando de outra coisa. T271C-C3: Ah, então isso aqui é 2, isso aqui é 3, isso aqui é 4, isso aqui é todo. Não, ele está dividindo por 2. Ele tá multiplicando por 1 e dividindo por 2. T272C-C2: Aí seria por 1 dividido por 2. T273C-C1: É. Mas se aqui for um terço, deixa eu ver se isso aqui dá certo. Vai dar errado isso. T274C-C2: Porque 0,5, a metade de 0,5 é 0,25. T275C-C1: O 0,25 com forma de fração é 1 sobre 4. Então nesse caso... T276C-C3: É por 4 aí. T277C-C1: É um quarto. T278C-C1: Aí é... a tabuada de 2? T279C-C2: Seria um sexto? T280C-C1: Aí seria um sexto. T281C-C3: Acho que é 8. É um oitavo? T282C-C1: Porque eu acho que é multiplicado, né? T283C-C3: Ele multiplica, divide por 8.	próximo seria por um quarto, né? T312D-D3: Um oitavo. T313D-D3: Com 16 alvos. T314D-D5: 32 alvos. T315D-D5: Vá para o bloco 51. T316D-D5: [...]. T317D-D5: Vá para o bloco 52. E tem que anotar no bloco 51. T318D-D5: [...]. T319D-D2: Era para escrever assim, eu acho, sabe? T320D-D5: Eu acho que eu ia escrever das 2 formas. T321D-D5: Eu vou começar a escrever da forma que deveria ser escrito. T322D-D4: Não vai dar, não vai dar resposta. Não daria espaço, gente. T323D-D1: Acho que está certo aí, como a gente botou lá. T324D-D2: É verdade. T325D-D5: Vá para o bloco 52. T326D-D2: Isso não. T327D-D5: Ah, tá. Ele espera a sua resposta observando você. Anote sua percepção no relatório do investigador. Já anotou? T328D-D2: Ah, aqui. Não, qual análise? T329D-D5: Ok, eu vou repetir o 51. T330D-D5: [...]. T331D-D2: Ah, sim. T332D-D5: Vai para o 52. T333D-D5: [...]. T334D-D1: Leito é o que? T335D-D5: O L. T336D-D1: E o outro? T337D-D5: D. T338D-D3: Então, L por D. T339D-D3: Qual o número? T340D-D2: 512.

Não é que a gente confundiu, é que a gente pensa exatamente a mesma coisa um bloco antes. T254A-A4: Tá. T255A-A2: A mesma coisa nesse bloco aqui. T256A-A4: [...]. T257A-A3: Tem o bloco? T258A-A4: É o bloco 53. Digita...E faz a continha. Faz a continha da relação. Só que ele quer no quinto dia. Usa a relação. T259A-A3: Ah, esse aqui pra fazer? T260A-A4: Olha, tá aqui. Já tá até aqui, né? Tu já pode até usar. T261A-A3: Cinco é? T262A-A4: Isso. Aí tu continua aí, vai lá e coisa, bloco 4 lá. Vai lá na nossa caminhada. Bloco 54.		É 64. T284C-C1: Multiplica rápido aí. Acabou de fazer? T285C-C2: Faz aí 512 vezes um sexto, só para confirmar se está certo. Ah, é um oitavo? T286C-C1: É um oitavo. Então é 1 sobre 16. É um dividido por 16. T287C-C3: É. É uma tabela de 16. É uma tabela de 8. T288C-C1: Divide aí 32. É isso aí. Porque é cada... 2, aí 2 vezes 2 é 4. Aí vai dobrando. Essas divisões. T289C-C1: Aqui é 8. T290C-C2: Pera, aqui é 2. T291C-C1: 2. Aqui é 4. Aqui é 8. Aqui é 16. Aqui é 32. T292C-C3: É por isso que eu te perguntei naquela hora. Ah, então isso aqui é 2. Isso aqui vai ser 6? T293C-C3: Ah tá, agora entendi. Pegava o 2 e multiplicava por dois. Aí quatro multiplicado por 2 é oito. T294C-C1: Bloco 51. T295C-C2: Ainda tem cálculo ainda. T296C-C1: [...]. T297C-C2: Deixa eu ler. T298C-C2: Seria assim? T299C-C1: Ah não, daria zero aqui. T300C-C3: O n é 2. T301C-C1: Aqui seria um. T302C-C2: Dividido por 2. Porque é sempre um pelo múltiplo de 2. Ó, aqui é um, e aqui 2 vezes o 1. T303C-C1: Se aqui for zero, aqui dá 1, 512 no dia zero. Aí 2 vezes 1,	T341D-D6: 512 que é o dia zero. T342D-D1: Vezes...1 sobre 2. É, 1 sobre 2 elevado a D. Assim, eu acho que é assim, vejam. Olha aí. T343D-D5: Você não vai ter parêntese, não? T344D-D1: Está certo. T345D-D5: Só que eu acho melhor você colocar entre parêntese. Porque se não, está potenciando o 1. T346D-D1: Eu vou ajeitar isso. T347D-D5: [...].

		meio. T304C-C3: E aqui, fica 2 elevado a 2, fica 4. T305C-C2: Porque uma divisão não pode ser zero, aí não sei se aqui vai. Porque aqui ia zerar, 2 vezes zero. T306C-C1: Aí 1 dividido por zero. T307C-C1: Não pode dividir por zero, só que se a gente botar zero aqui vai zerar, e não pode, tem que ser igual a 1. Mas dá no mesmo, dá zero mais um, no dia 1. Acho que ainda não é isso. T308C-C3: A gente ainda tá no 50, 51. T309C-C1: Não, calma. O número de leitos é igual ao número do dia, vezes o número de leitos. T310C-C2: Repete. T311C-C1: O número de leitos é igual a 512 vezes 1, dividido por 2, vezes d. Que seria o número de dias. T312C-C1: 2 vezes zero, vai zerar, zero mais 1, 512. 2 vezes 2. Tô fazendo aqui. T313C-C1: Se a gente for parar pra pensar, dia 1, 2 vezes 1 dá 2, aí 512 vezes meio é 256. Não, isso vai ficar errado com essa, porque por exemplo depois do dia 3 dá 2 vezes 6, aí não dá 8, porque diminui a metade. T314C-C1: Cara, que função é essa? T315C-C1: Porque pra ser exato aqui, a cada dia que passa, isso tem que ser multiplicado por meio. Então, os leitos são definidos por 512 vezes meio. No primeiro dia, no segundo seria 512 vezes meio vezes	

		meio, então a cada dia que passa, aumenta meio, por assim dizer. T316C-C2: Aumenta 2 no denominador. T317C-C1: Peguei, 512 vezes meio elevado a n. Presta atenção, por exemplo, pra gente chegar a 64 leitos no dia 3: 512, vamos dizer, no dia 3, seria 512 vezes meio ao cubo, aí seria vezes meio vezes meio vezes meio, que dá 1 sobre 8. Que no 3° dia dá 64 leitos. T318C-C2: Entendi. T319C-C1: O número de leitos é 512 vezes meio elevado a d. T320C-C2: Assim? T321C-C3: Exatamente. T322C-C2: É que a gente tá fazendo potência, né? T323C-C1: Vamos lá, bloco 51. T324C-C2: Já botei. T325C-C1: Então é o 52. T326C-C1: [...]. T327C-C2: Número de leitos é igual a L? T328C-C1: L igual a 512 vezes meio elevado a d. Mesma coisa daqui. T329C-C1: Bloco 53. T330C-C1: “[...].” T331C-C3: Quantos dias? T332C-C1: Quinto dia. T333C-C2: A gente já sabe o resultado né? T334C-C1: É 16. Vai ser 512 vezes, aí dá 32. Aí dá 16.	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Com o prosseguimento da aplicação, realizada de forma sequencial em um único dia, foi possível observar sinais de cansaço por parte de alguns alunos, em decorrência do tempo prolongado de dedicação à atividade. Diante disso, planejei uma pausa para possibilitar um intervalo. No entanto, mesmo diante desse desgaste,

notou-se o empenho dos alunos, já que todos os grupos permaneciam concentrados na realização da proposta. Visto que no momento em que o intervalo foi realizado, três dos quatro grupos permaneceram jogando sem pausa até o momento final.

Dando continuidade à seção anterior, torna-se novamente evidente a identificação e associação entre progressões geométricas (PG) e funções exponenciais de domínios discretos (EM13MAT508), realizada por um dos grupos. Essa relação pode ser observada nos turnos do Grupo 2, entre T140B e T145B — o mesmo grupo que, anteriormente, já havia estabelecido tal conexão ao abordar a função exponencial crescente. Desta vez, o grupo relacionou o problema a uma PG decrescente, conforme indica a fala do aluno no turno T140B-B6: “Vai caindo toda vez com uma PG, não é? Uma PG, só que decrescente. Um sobre dois.”. Observa-se, portanto, que houve também a percepção de que, diferentemente do caso anterior, os termos diminuem progressivamente. Com isso, verifica-se que o Livro-Jogo favorece essa associação conceitual, mesmo sem mencionar explicitamente o termo 'progressão'.

A partir da análise dos diálogos do Grupo 1, observamos que, mesmo antes da etapa de elaboração da relação que modela o problema proposto, o aluno A1 identificou e expôs essa relação aos demais colegas, como se verifica nos turnos de T218A a T221A. Isso demonstra que, a partir dos conhecimentos construídos na primeira seção — especialmente no que diz respeito à função crescente —, o aluno conseguiu mobilizar os saberes previamente trabalhados e reconhecer os padrões apresentados na atividade anterior, aplicando-os na resolução do novo problema. A compreensão de A1 também se confirma nos turnos de T230A a T245A, quando, diante da solicitação da atividade, ele auxilia o colega A4 a compreender e registrar a relação. Nesse momento, estabelece-se uma dinâmica semelhante à estrutura I-R-P, na qual A1 desenvolve o raciocínio, enquanto A4 apresenta questionamentos com base em suas dúvidas, permite que o discurso de A1 avance.

Outro elemento que pode ser destacado, com base nos diálogos, é que um dos objetivos desta etapa consistia em possibilitar, por meio da resolução de problemas sequenciais, que os alunos fossem capazes de desenvolver a expressão que representa a situação proposta. Esse objetivo foi alcançado por todos os grupos, que ao final conseguiram formular corretamente a expressão. Destaca-se, nesse contexto, o que ocorreu no Grupo 3, no segmento de T256C a T328C, em que os participantes demonstraram dificuldade inicial na construção da expressão. No entanto, a partir da

análise dos valores obtidos nos problemas anteriores, conseguiram identificar o equívoco na formulação inicial e, ao final da discussão, elaboraram corretamente a expressão matemática que modelava a situação.

Dessa forma, com base nos diálogos analisados, observa-se uma progressão no entendimento dos alunos em relação às atividades propostas e aos conceitos matemáticos envolvidos, especialmente a função exponencial decrescente, representada por $f(x) = a^x$,. Destaca-se o processo de interação entre os participantes dos grupos, que possibilita o trabalho conjunto e a discussão sobre o problema, contribuindo para a construção dos conceitos matemáticos previstos na atividade.

Ao examinar as falas dos grupos, percebe-se que a proposta favorece a interação entre os alunos e promove um processo de cooperação que amplia o engajamento com a própria aprendizagem. O professor atuou apenas como mediador, intervindo pontualmente diante de dúvidas. Contudo, observou-se que, a partir desta atividade, os alunos passaram a buscar resoluções entre si, o que evidenciou o desenvolvimento de maior autonomia na realização da tarefa.

Com isso, ao final da etapa de formulação, foi possível observar uma sistematização clara dos processos adotados para a resolução dos problemas. Diante dos desafios, os grupos iniciaram suas análises identificando o padrão de progressão, calculando os valores semana a semana (“três, nove, vinte e sete”) e, posteriormente, quando foi necessário trabalhar com a função decrescente, já contavam com essa sistematização da estratégia de resolução consolidada. Isso pode ser observado no segmento formado pelos turnos T140B e T145B do Grupo 2, no qual essa sistematização foi aplicada para resolver o exemplo envolvendo a função decrescente.

Os diálogos transcritos evidenciam um processo intenso de colaboração, no qual os estudantes verbalizavam seus raciocínios, confrontavam hipóteses e construíam soluções coletivamente. O “Registro do Investigador” foi utilizado para formalizar, por escrito, o raciocínio desenvolvido, permitindo que as estratégias e resoluções fossem expressas tanto pela linguagem oral quanto pela escrita — aspecto essencial na etapa de formalização. A elaboração final da fórmula matemática marcou o ponto culminante dessa formalização, o que demonstra a capacidade dos alunos de traduzir um problema contextualizado para a linguagem matemática.

7.4. TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE DA SITUAÇÃO DE VALIDAÇÃO

Como situado, esta etapa do Livro-Jogo, a situação de validação, buscou a validação das estratégias e resoluções aos problemas e desafios do jogo e ampliação da compreensão do jogo sob diferentes perspectivas que podem não ter sido inicialmente consideradas. Ademais, a situação de validação, correspondente ao momento “Jogar com competência” representado pelos blocos 66 a 87.

Nesse trecho, retoma-se a situação que envolve o número de infectados em relação as semanas, com o intuito de que os alunos revisitem os conhecimentos mobilizados durante a experiência e finalizem a narrativa. A depender das escolhas realizadas, os jogadores podem chegar à exploração de uma função exponencial do tipo $f(x) = ba^x$, que representa de forma mais precisa o avanço da infecção. Caso contrário, permanecerão com o modelo $f(x) = a^x$, o que conduzirá a uma estimativa imprecisa sobre o tempo necessário para conter a doença — resultando, portanto, em um desfecho negativo na narrativa, como consequência de uma falha na investigação.

Essa etapa também corresponde ao momento de decisão final, em que os alunos, com base nas evidências reunidas ao longo do jogo, escolhem o desfecho da história. No entanto, tal decisão não integra o escopo desta análise, que se limita a identificar indícios de aprendizagem acerca do objeto matemático. Para isso, serão considerados apenas os blocos de 68 a 72, nos quais ocorre a validação do modelo matemático por parte dos jogadores. Segue no quadro abaixo as transcrições relacionadas a aplicação desta etapa.

Quadro 21 - Transcrição dos diálogos da etapa de situação de validação.

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4
T318A-A4: Vai para o bloco 68. [...]. T319A-A1: O limite é qual mesmo? T320A-A4: O limite é...17...17.496. A gente vai pegar nossa relação, de quantas semanas está aumentando, contaminado, não é? Ele quer saber o quê? Quantas semanas...O número de infectados. O número de infectados, a relação	T261B-B3: [...]. T262B-B2: Dezessete mil... T263B-B3: 17.496 habitantes. Pois é, a gente já tem tudo que a gente precisa. A duas funções. A primeira tu lembra? T264B-B2: 3, 9, 27, 81. T265B-B3: C é igual a 3 elevado a T. T266B-B4: C é 17. T267B-B3: 17.496. T268B-B2: A gente	T390C-C1: [...]. T393C-C2: Seria 3 elevado a 2 vezes 1? Elevado a N no caso. T394C-C1: Considerando que o número de contaminados triplica a cada semana, não teremos apenas 3 ao fim da primeira semana, mas 6... T395C-C2: É que a primeira semana...é porque as seriam sempre o dobro. É tipo	T381D-D5: [...]. T382D-D5: Semana zero, dois contaminados, triplica então. Seis...Dezoito... T383D-D4: Ah não, pera aí, a triplica, né? T384D-D5: É. T385D-D5: Sessenta e nove, esboce o quadro e preenche no seu relatório de investigador. T386D-D3: Dezoito vezes três. T387D-D2: Aqui está

é... Ele quer saber quando isso será maior do que... 17.496.
T321A-A1: Tá bom, é bem simples.
T322A-A4: Ah, agora a gente que fatorar isso aqui.
T323A-A1: Não, não, não, de boa, de boa. É só pegar o...O número é que fica multiplicando.
T324A-A4: Acho que nunca é necessário fazer assim, Seus. Faz fatorando...Como tu vai fazer?
T324A-A2: 3 elevado a 9.
T325A-A3: Bom, a gente fez aqui, demorou um pouquinho. Fatoramos. 3 a 9?
T326A-A4:Era só fazer aquela parada.
T327A-A1: Certeza que é 3 elevado a 9?
T328A-A3: É que 8, vai até 6 mil.
T329A-A4: Precisamos saber em quantas semanas o número de vitória se trovará a sua limite. Em 9 semanas.
T330A-A4: [...]. Eu voltei a pensar naquela conta lá. Vamos continuar, vamos continuar, vamos continuar.
T331A-A1: Não, espere aí, 2 depois da nove?
T332A-A4: Não, 2 não. 3.
T333A-A4: É o 33º dia da infecção.
T334A-A2: É porque a 8 vai ser 6 mil só.
T335A-A3: É, e a 9 está certo. Sim, são quantos dias? Está no 33º aqui.
T336A-A4: Aham.
T337A-A3: Então são 9 semanas, né?

tem que igualar as bases, então a gente vai precisar descobrir.
T269B-B4: Mas é ultrapassar, não precisa ser exato.
T270B-B3: É uma estimativa mesmo, não precisa ser exato mesmo.
T271B-B2: Raiz de mil...
T272B-B3: Não, não, a gente divide por 3.
T273B-B2: 17.496.
T274B-B3: Divide por 3 aí.
T275B-B2: 5.832. Acho que tá errado aquela raiz, eu tenho certeza que tá errado.
T276B-B3: Divide aí por 3 de novo, basicamente a gente tá fazendo aqui um MMC.
T277B-B2: Bota aí, 664. 65? Acho que 65. 665. Dividido pra 3. 121. Dividido pra 3, 75.
T278B-B3: Fez por tentativa e erro né? Ou foi multiplicando?
T279B-B4: Eu fui logo pra 8. Aí eu caí em 6 e 9, já passa. Então...
T280B-B3: Qual é o primeiro com o caso que tu viu?
T281B-B4: Elevado a 8.
T282B-B3: 8 ultrapassa já? Tu colocou C = 8, é C = 3 elevado a 8. Dá quanto?
T283B-B4: 6.561.
T284B-B2: Em alguma outra forma?
T285B-B3: Acho que não. Beleza. Basicamente o que a gente fez, a gente colocou algumas proposições pra ver se tava de fato certo. Então a gente afirmou primeiro o quanto daria se colocasse 3

2 vezes 1... 2 na primeira semana, aí seria 3 vezes 3, 9.
T396C-C2: Essa é a nossa expressão.
T397C-C1: Só que aí, agora, como descobri esses dois contaminados iniciais e se triplica, a cada semana, ao fim da primeira semana, é 6.
T398C-C2: Agora é 6, só que continua triplicando 3 vezes?
T399C-C1: Então 6, vai triplicar 6, 18.
T400C-C2: Seria 6 elevado a T igual a C?
T401C-C1: Não. 6, E considerando que o número de contaminados triplica a cada semana, não teremos apenas 3 ao fim da primeira semana, mas 6. Ou seja, se na semana 0 foi 2, como vai triplicar, então no fim da primeira semana, vai ser 6. Na segunda semana, vai ser 18. E na terceira, vai ser 54.
T402C-C3: Senão fosse o quadro.
T403C-C2: Tá, precisa da lei de formação. Mas por isso que eu falei...
T404C-C1: Seria o T mesmo? Seria a semana?
T405C-C2: Não, acho que não.
T406C-C1: Bora continuar.
T407C-C2: Mas a gente tem que anotar aqui.
T408C-C1: Qual é esse bloco?
T409C-C2: 69.
T410C-C2: Ah, é essa aqui que a gente vai anotar?
T411C-C1: É isso aí.
T412C-C2: Ou é a lei de formação?
T413C-C1: Coloca...

semana zero, dois. Semana zero. Oito vezes três.
É, deu como as quatro, mas quatro. Está certo aqui.
T388D-D3: Está certo.
T389D-D5: Vá para o bloco 70.
T390D-D5: [...].
T391D-D5: A primeira semana se multiplica cada semana. Então, três, nove, vinte e sete. Agora já sabemos que tem dois. Então, na primeira semana temos seis, na segunda temos dezoito, na terceira temos cinquenta e quatro.
T392D-D3: É.
T393D-D5: Ou seja, um elevado a três vezes três elevado a alguma coisa.
T394D-D1: Agora é dois vezes três elevado a alguma coisa.
T395D-D2: Então mudou para isso daqui.
T396D-D5: Vá para o bloco 71.
T397D-D5[...].
T398D-D1: Acho que é só dividir ele.
T399D-D53: o que ele tá pedindo aí?
T400D-D5: Com base nessas informações, acredito que a situação vai se tornar incontrolável no momento em que a doença atingir um quarto da população de Ginona.
T401D-D2: Então vai ter que tirar um quarto e depois fazer o cálculo.
T402D-D5: 17.496.
T403D-D3: Tem que ser menos de um quarto.
T404D-D2: Não, mas

T338A-A4: Vá para o bloco 73. T339A-PA: Quantas semanas vocês conseguiram? T340A-A2: Como assim? T341A-A3: Ah, tá. Para ultrapassar? 9. T342A-PA: Um quarto seria quanto mesmo? T343A-A3: Ah, é o um quarto da população. T345A-A4: Pô, sério? A gente está penando pra isso. T346A-A3: É verdade, é um quarto. T347A-A4: E se tornar incontrolável no momento em que a doença atingir, é um quarto da população. Aí, pelo último centro, a cidade tem 17 mil e 496 pessoas. Pô, pega, faz logo a continha ai. T348A-A3: Quando é um quarto de 17,49 mil. Então é oito. T349A-A4: Qual é? T350A-A3: Então vai ser oito semanas, né? T351A-A4: Coloca aí 8. T352A-A2: É seis mil e pouco. T353A-A3: Seis? Seis mil e pouco. Só que ele falou ultrapassar, não ser igual. T354A-A4: Aí fica até melhor, porque já está em quatro semanas, mas quatro semanas do oito vai para um mês. Aí fica certinho um mês. T355A-A3: Então é oito vezes sete. Então é oito vezes sete, que aí é 56 menos 33, dá 23. No caso é só uma semana menos que trinta, né? T356A-A3: É. Deve ter 23 dias para resolver a parada. T357A-A4: Três	elevado a 8. E seria 8 semanas. A gente chegou num estado de 6.561. O que a gente acredita que ainda dá pra outra semana. Só que testando pra 9 semanas a gente ultrapassa o valor 17.496. Vai dar 19.683 habitantes. Então a gente conclui que a cidade de Girona só consegue aguentar até 8 semanas. Show. T286B-B2: Depois vai todo mundo levar o farelo. T287B-B3: Bloco 72. T288B-B4: Tá certo, acho que é 9 que é ultrapassar. T289B-B3: Vai lá para o bloco 68 vá pra o bloco 72. T290B-B3: [...]. T291B-B2: 9 semanas é 63 dias. T292B-B3: 63? T293B-B2: 63 é 9 semanas. T294B-B3: 8 vezes 7.2: T295B-B2: 8 vezes 7, então é 56. T296B-B3: 56 para 33. Putz, não tem o bloco 75. Onde é que eu noto o número? É que aqui fala pra colocar no 75, mas não tem o número aqui. T298B-B3: Ah show. Quanto é? T299B-B2: 23. Está em 33, para chegar a 56, né? T300B-B3: Show, é isso aí.	Vai triplicar. Não, esboça o quadro primeiro. T414C-C2: “Esboce o quadro e preencha no seu relatório de investigador.” T415C-C1: Tá. Bloco 70. T416C-C1: [...]. T417C-C1: Agora a gente tem que fazer uma nova expressão. T418C-C2: Mas acho que a gente tem que voltar pro 68. T419C-C1: Acho que pro 68 não tem nada, vamos ver. T420C-C2: Talvez dependa da história. T421C-C1: “preciso que utilize os conhecimentos que aplicou anteriormente para construir uma nova expressão. Uma que represente de forma fiel a real” T422C-C1: Então o número de contaminados vai ser determinado, porque é o triplo, né? Sempre vai triplicar. T423C-C2: Será que a nossa expressão estava certa? Aquela lá na primeira estava, né? Certa? T424C-C1: Estava baseado naquele contexto. T425C-C2: Mas estava certa? T426C-C1: Estava certa. Agora a gente tem que ver esse contexto aqui. O número de contaminados, vai ser... Como já tem dois contaminados então vai ser... Se for aqui, vai dar... Se for 3 ao quadrado vai dar 18. Se for 2. Aí tipo na terceira semana aqui 3 vezes 3 vai dar 27 que vai dar,	ele fala que quer saber quando atingir um quarto. Tem que ser rápido. T405D-D3: Quero ser rápido e calcular um quarto de 17.419. T406D-D5: A gente sabe o resultado. A gente sabe, 4.374. T407D-D2: Agora a gente vai colocar na fórmula para poder descobrir quantas semanas esse negócio vai ser. T408D-D1: 4.374. Agora alguém te divide 4.374 por 2. 2.137. Agora a gente vai ter... Eu acho que fatorar. T409D-D3: Fatorar? T410D-D1: A gente igualar as bases. Descobrir qual é a semana agora. T411D-D2: Eu acho que... T412D-D3: A gente está na base 3. T413D-D6: Não, quanto é? Quanto é o número? T414D-D3: 2.187. T415D-D2: Tem que ser por 2, tem que ser por 3. A gente tem que igualar de base. A base tem que ficar em 3. T416D-D5: 7. T417D-D2: É igual a 7 semanas. T418D-D1: A metade do quarto é isso? Não, porque o quarto era 4.000. T419D-D3: É porque... Lembrem que a nova forma ficou 2 vezes 3, e a nova data é T. Aí o 2 foi dividindo o 4.374. Aí você vai fazer o restante de 2 T420D-D5: Vamos para o bloco 72. T421D-D5: [...]. T422D-D5: São 7 semanas. T423D-D1: Já passou

semanas. Ele quer saber...Precisa saber em quantas semanas os números infectados ultrapassarão...Não, calma. Ele quer saber em quantas semanas os números infectados ultrapassarão seu limite. T358A-A3: Mas desde o zero ou desde que a gente está agora? T359A-A4: Acho que é desde que a gente está agora. T360A-A3: Ah, se se for agora, então três, que são 23 dias, mas se for desde o zero, então é oito. E aí? T361A-A1: Pô! A gente...Quantas semanas faltam? É isso que a gente quer, certo? Mas é o dia 33. T370A-A4: A gente vai pra onde mesmo? 72? T371A-A4: Quantos dias ainda temos? T372A-A3: 23. T373A-A4: Cadê 72? T374A-A4: Bora lá, bora lá, bora lá.		T427C-C2: 54. T428C-C1: Ah, 2 vezes 2 dá 54. É, então é 2 vezes 3 elevado a N. T429C-C2: Será? Não, é porque o número de contaminados, olha aqui. Por exemplo, na 1ª ou na 2ª semana. T430C-C1: Vai ser uma potência. Então é 2... C igual a 2 vezes 3 elevado a N. T431C-C2: Quase o que eu acerto. T432C-C: Bloco 71. T433C-C: [...]. T434C-C2: Então vai ser 17.496 igual a 2 vezes 3 elevado a t. E eu confesso que eu me esqueci de como faz isso. T435C-C2: Eu também. T436C-PA: Acho que vocês estão deixando passar alguma informação na questão. T437C-C1: Ele quer saber quantas semanas o número de infectados chegará a esse limite, que é 17.496... no momento em que a doença atingir um quarto da população. T438C-C1: Ah, então vai atingir um quarto de 17.496. T439C-PA: Isso. T440C-C2: Um quarto de 17.496. T441C-C3: Vai fazer o jogo de sinal do x. T442C-C1: Do x? Não, tu tem que dividir isso aí. T443C-C2: Verdade. T444C-C1: Aí 17.496 dividido por 4. 4374. T445C-C2: Ele quer saber quanto vai dar pra chegar isso. Quanto essa semana vai chegar nesse valor? É isso que ele	4 semanas. T424D-D3: Faltam 3. T425D-D1: 4 semanas e 5 dias. T426D-D5: Então ainda temos 2 semanas e 2 dias. Então temos 16 dias. T427D-D1: Tem 7 dias. Então temos que por 7 dar 4 semanas inteiras. E sobra para a gente 6 dias. T428D-D5: 6? T429D-D1: Não, 5 dias. T430D-D5: Então temos mais 2 semanas e 5 dias. T431D-D1: A gente precisa chegar em 7 então tem 2 semanas e 2 dias. T432D-D2: Agora eu não entendi. T433D-D5: Não, tu falou que se gastava...Porque eu entendi que tinha gastado 4 semanas e 2 dias. Então eu entendi isso. Então temos 16 dias. T434D-D2: Tem quanto que eu falei? T435D-D2: 2 semanas e 2 dias. T436D-D3: Então 16 dias. 16 dias total que a gente tem. T437D-D5: Não, mas isso daí é para tu anotar. É para anotar. T438D-D1: É verdade.

		quer saber? T446C-C3: Exatamente. T447C-C2: Será que a gente pode passar esse dividindo? Não sei como fazer. T448C-C1: Professor, me ajuda aqui nessa expressão. Chegamos nesse resultado só que a gente esqueceu como desenvolver. T449C-PA: Encontraram o 4.000. Como está sendo multiplicando, pode passar dividindo. T450C-C1: Isso. T451C-PA: Aí passa dividindo e depois pode, ou calcula manualmente, fazer fatoração. Ou você já pode fatorar esse número. Vai vocês. Tem gente que testa, fica colocando o valor de dias aqui até igualar. T452C-C1: Ih, peraí que eu acho que eu já... Ah, porque tipo se a gente... Se a gente dividir aqui a gente vai ter que pegar um valor de base 3 aqui também pra igualar. Isso, né? É isso mesmo. É que vai ter que ficar num valor de base 3 aí. T453C-C1: Agora vai ter que fatorar isso aí, ó. T454C-C2: A gente deixa pra 3. Faz assim... T455C-C1: 2187, divide pra 3, por 3, por 3. T456C-C2: De onde tu tirou 81? T457C-C1: É porque eu tô fatorando. Vai ser 3 elevado a...? Peraí, 2187. Por 3 dá 729. Por 3 dá 243. Por 3 dá 81. 27... 9... 3. E aqui dá 1. Vai ser 1, 2,	

		3, 4, 5, 6, 7. 3 à sétima. Então na 7ª semana vai chegar. T458C-C2: Agora testa. Vou colocar 3 à 7. T459C-C1: 2186. Não, não, não. Peraí, peraí, peraí. Tá errado, não. É 2 vezes 3... T460C-C2: Não, tu teria que fatorar. T461C-C1: Tá certo. Então vai ser... Tá na 7ª. T462C-C2: É igual a quê? T463C-C1: A 4374. T464C-C2: Eu tava me perdendo com isso aqui. Eu vi que isso aqui era a metade. T465C-C1: Bloco 72. T466C-C1: [...]. T467C-C1: Cara, 7ª. 33 dias, já se passaram 4 semanas. Faltam 3 semanas. T468C-C1: Faltam 3 semanas. T469C-C2: Acho que a gente já não tá na 7ª semana. T470C-C1: Não, a gente não tá. Estamos no 33º dia. Então, acho que a gente tá na 4ª semana, já se passou um mês. T471C-C2: A gente tá, na verdade, eu acho que, na 5ª semana... T472C-C2: É, já seria na 5ª. É porque, por exemplo, na semana, 7 dias, 4 vezes 7, 28. É 33. É 5 dias. Aí, sempre já faltam 2 dias da... Eu acho que na 5ª semana. Aí, que essa é a semana 7ª semana, né? Deixa eu fazer aqui. Dia 33. T473C-C1: Um mês tem... Um mês tem 4. T474C-C2: Não, mas a questão aqui não é nem um mês, é a semana. T475C-C1: Estamos	

		no 33º dia de infecção. T476C-C2: É, olha só. Tá. 4 aqui. Essa aqui é a semana. Esse aqui, o tanto já tem uma semana. Em 4 semanas, a gente tem 28 dias. Aí, se a gente pegar a 5ª semana, 5 vezes 7 dá 35. E a gente tá no 33. Então, a gente ainda não concluiu a 5ª semana. T477C-C2: A gente tá nela. Faltam 2 dias pra concluir a 5ª semana. Aí, a gente pegaria, né? O 7 vezes 7 dá dia 49. A gente tá no 33. T478C-C1: Então, ele quer chegar na 7ª semana. Então, quantos dias falta pra chegar na 7ª semana? É porque eu não tô entendendo o raciocínio aí. T479C-C2: Olha, uma semana tem 7 dias. Se a gente pegar 4 semanas, a gente vai pegar 4 vezes 7. Dá 28º. A gente vai pegar 5ª semana. 5 vezes 7 vai dar 35º. Então, pra concluir toda a 5ª semana, faltam 2 dias. Então, a gente pegaria 7ª. A gente precisaria pegar 7 vezes 7 é 49º. Menos 35º. Menos 33º. 49º, menos 33º. T480C-C1: Ah, agora eu entendi. 49º, menos 33º. T481C-C2: Faltaria 16 dias. T482C-C1: Então, tá certo. Quantos dias falta? Faltam 16? Faltam 16 dias, então.	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Com a finalização da aplicação, e devido à disponibilidade da turma, foi necessário que toda a atividade ocorresse em um único dia, não sendo possível dar prosseguimento em outro momento. Dessa forma, a realização concentrou-se no mesmo período, e, como a velocidade de leitura e tomada de decisão variava entre

os grupos, cada um concluiu a atividade em tempos diferentes. Assim, o momento final aconteceu de forma assíncrona entre os grupos participantes, o que gerou um intervalo próximo de uma hora entre a finalização do primeiro grupo e a do último. Entretanto, essa diferença de tempo não trouxe prejuízos à atividade, tendo em vista que a interação e a participação ocorreram de forma mais intensa dentro de cada grupo do que entre grupos distintos. Tal constatação é confirmada pela análise dos turnos, pois não foi identificada comunicação entre participantes de grupos diferentes.

Ressaltamos também a disparidade entre os turnos destacados nesta etapa final. Entre os grupos, aquele que apresentou maiores dificuldades na validação do conhecimento foi o Grupo 3, o que resultou em um número mais elevado de turnos. Contudo, é justamente a partir das falas desse grupo que se torna possível observar, de forma mais evidente, o processo de debate e argumentação desenvolvido até a construção da resposta pretendida.

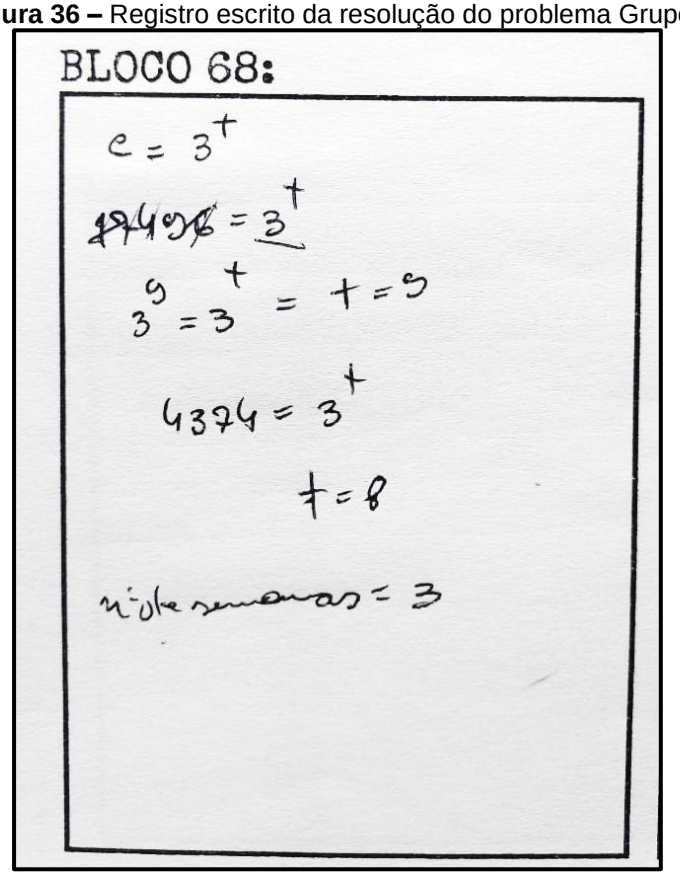
Como mencionado anteriormente, a depender das escolhas realizadas, os jogadores explorariam uma função exponencial do tipo $f(x) = ba^x$; caso contrário, permaneceriam com o modelo $f(x) = a^x$. A análise dos segmentos construídos revelou que metade dos grupos seguiu por um dos caminhos, enquanto a outra metade percorreu o caminho alternativo. Nesse contexto, os Grupos 1 e 2 trabalharam com a função $f(x) = a^x$, enquanto os Grupos 3 e 4 exploraram o modelo do tipo $f(x) = ba^x$.

Quanto aos Grupos 1 e 2, com base nos segmentos analisados e nos registros escritos, observa-se que ambos chegaram à resposta correta para o modelo investigado. A partir da expressão previamente elaborada, cada grupo recorreu a métodos distintos para alcançar o resultado final, que representava o número de semanas em que o infecção iria ultrapassar uma quarto da população da cidade, esta resposta não representa somente o fim da atividade, como também um elemento chave para a finalização da história.

Para isso, poderiam ser utilizadas, por exemplo, inequações ou outros procedimentos equivalentes. No entanto, ambos os grupos apresentaram dificuldade em compreender que a situação solicitava o cálculo do número de semanas necessárias para que a contaminação ultrapassasse um quarto da população, e não em relação ao total populacional.

O Grupo 1 recorreu à fatoração para buscar a resposta correta. Contudo, foi necessária a intervenção do professor, por meio de uma interação do tipo interativo/de autoridade, observada no segmento de T337A a T346A, com o objetivo de orientar os alunos quanto ao valor que deveria ser utilizado na expressão. Após essa intervenção, o grupo conseguiu chegar ao resultado final sem maiores dificuldades, realizando apenas um ajuste no cálculo que já havia sido efetuado. Como pode ser observado por meio da figura abaixo.

Figura 36 – Registro escrito da resolução do problema Grupo 1

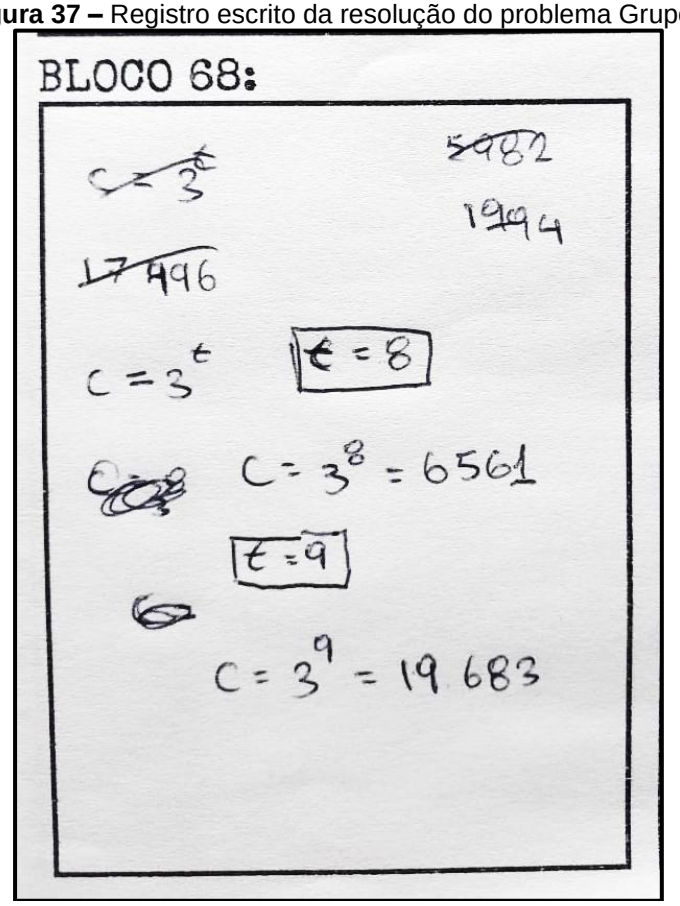


Fonte: Registros de pesquisa (2025).

Já o Grupo 2, embora tenha obtido a resposta correta, apresentou, a partir da análise dos áudios, indícios de que não perceberam a necessidade de calcular a função do número de infectados por semana utilizando um quarto da população como referência. Além disso, demonstraram certa dúvida quanto ao fato de que o valor deveria ultrapassar esse limite. Assim, realizaram o cálculo com o uso do total da população e identificaram a semana em que o número de infectados não ultrapassaria esse total. Apesar dessa interpretação incompleta do enunciado, os registros escritos e os áudios indicam que o grupo compreendeu o procedimento de cálculo, revisitando

a expressão formulada nas seções anteriores e aplicando-a de maneira adequada ao modelo trabalhado.

Figura 37 – Registro escrito da resolução do problema Grupo 2



Fonte: Registros de pesquisa (2025).

Quanto aos Grupos 3 e 4, por trabalharem com um novo modelo de função, precisaram investigar a nova situação proposta, articulando-a com os saberes obtidos anteriormente. Para a construção desse modelo, após revisitarem as informações obtidas durante a investigação da história e preencherem os quadros solicitados pela narrativa, os grupos já possuíam todos os dados necessários para elaborar um novo modelo matemático. Isso possibilitou a aplicação da compreensão tanto sobre o jogo quanto sobre o próprio objeto matemático, considerando diferentes perspectivas que, inicialmente, podem não ter sido previstas. Esse elemento mostra-se essencial para que a etapa de validação fosse concluída, conforme aponta Grando (2000).

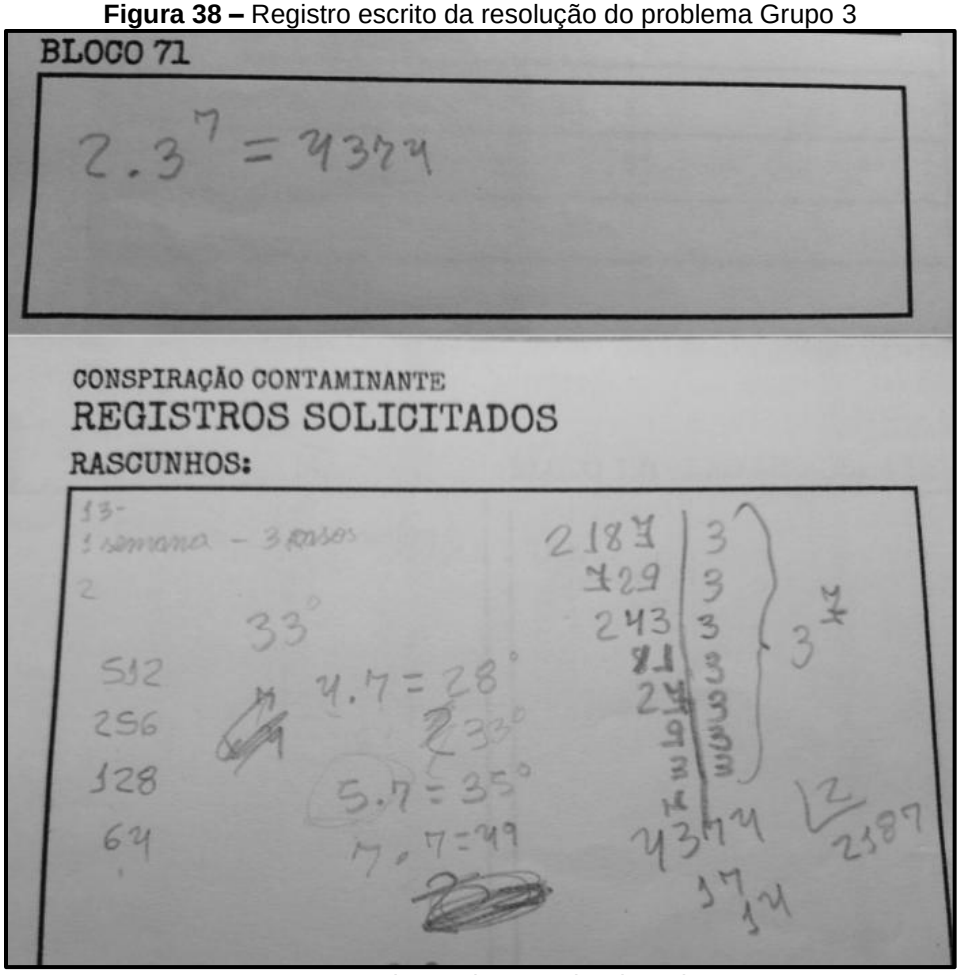
Destaca-se novamente a importância do fator cooperativo proporcionado pelo trabalho em grupos, pois, conforme observado nos turnos T422C–T435C e T383D–T395D, a compreensão e elaboração do modelo ocorreram por meio de discussões e debates entre os participantes. Alguns integrantes identificaram mais rapidamente o comportamento da função, enquanto outros, que ainda apresentavam dúvidas,

formularam questionamentos que possibilitaram o compartilhamento e a construção conjunta do raciocínio.

Esse processo é particularmente evidente nos turnos T422C e T430C, nos quais se estabelece uma dinâmica semelhante à estrutura I-R-P: C1 desenvolve o raciocínio e C2, a partir de suas incertezas, levanta perguntas que impulsionam o avanço do discurso, favorecendo, assim, o desenvolvimento coletivo do modelo.

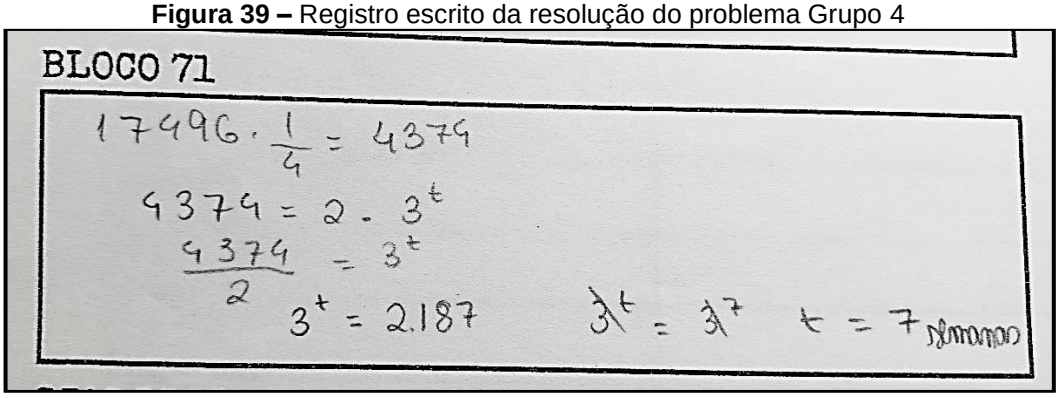
Em relação à resposta final do jogo, observa-se, com base nos segmentos analisados e nos registros escritos, que os Grupos 3 e 4 chegaram à solução correta para o modelo investigado. A partir da expressão previamente elaborada, ambos utilizaram a fatoração para representar o número de infectados como um expoente de base 3, conforme destacado nos segmentos T455C a T461C e T408D a T417D, o que possibilitou os grupo determinarem o número de semanas necessárias para que esse valor fosse alcançado.

Figura 38 – Registro escrito da resolução do problema Grupo 3



Fonte: Registros de pesquisa (2025).

Figura 39 – Registro escrito da resolução do problema Grupo 4



Fonte: Registros de pesquisa (2025).

Dessa forma, com a finalização do jogo, os jogadores, por meio de seus próprios cálculos para alcançar o desfecho final da narrativa, puderam validar as estratégias e resoluções aplicadas aos problemas e desafios propostos, assim como objetivado pela situação validação. Com base em todo o percurso desenvolvido, os participantes chegaram ao encerramento da história e gerou a consolidação o aprendizado construído ao longo da atividade.

Percebe-se, então que a atividade proposta evidencia uma progressão no pensamento dos alunos, uma vez que eles utilizaram os conhecimentos adquiridos ao longo de todo o percurso para alcançar a resposta que conduziria o jogo ao seu desfecho. As tarefas desta etapa possibilitaram uma troca efetiva entre os participantes, enquanto o professor atuou apenas como orientador e esclarecedor quando necessário, garantindo que os estudantes mantivessem o protagonismo durante todo o processo. Além disso, ao final da atividade, observou-se que a familiaridade dos alunos com a dinâmica, construída a partir dos problemas anteriores, favoreceu uma execução mais ágil e autônoma dos momentos finais.

As potencialidades observadas durante a aplicação mostram-se significativas, o que evidenciam o engajamento e participação dos alunos. As interações em grupo, a tomada de decisões de forma coletiva e a reflexão sobre os riscos e benefícios de cada escolha indicam o desenvolvimento de um pensamento estratégico e colaborativo. Além disso, os indícios de aprendizagem, como a construção conjunta de significados e o envolvimento ativo com a dinâmica proposta, reforçam que a atividade favorece a compreensão dos conteúdos relacionados à função exponencial.

7.5. SÍNTESE DA ANÁLISE DA APLICAÇÃO

Em função do exposto é possível apresentar algumas afirmações sobre a análise da aplicação do Livro-Jogo "Conspiração Contaminante", assim como é possível reunir as observações sobre o percurso vivenciado pelos alunos e refletir sobre as potencialidades pedagógicas dessa proposta. A aplicação foi planejada de forma a seguir as etapas da Teoria das Situações Didáticas (TSD) em conjunto com os Momentos do jogo de Grando (2000). E a análise dos dados coletados — especialmente os diálogos e registros escritos — confirmou que essa articulação possibilitou a consolidação dos conteúdos propostos.

O processo iniciou-se com a Situação de Ação, momento em que o objetivo central foi a familiarização dos alunos com o universo e as regras do jogo. Nesse primeiro contato, os grupos apresentaram certa dificuldade em compreender a dinâmica, principalmente no que se refere à mecânica de rolagem de dados para determinar o sucesso das ações. No entanto, à medida que avançavam, a necessidade de tomar decisões coletivas — seja por votação ou debate — favoreceu uma rápida internalização das regras e um crescente engajamento com a narrativa. Essa etapa foi fundamental para a construção de uma cultura de cooperação e imersão entre os jogadores.

Na sequência, a Situação de Formulação se constituiu como o centro da atividade voltada à construção do conhecimento matemático. Diante dos problemas sobre Funções Exponenciais Crescentes e Decrescentes — representados pela propagação da doença e pela redução de leitos —, os alunos foram desafiados a desenvolver e expressar suas estratégias. Observou-se uma progressão nítida no pensamento dos grupos: partiram de cálculos aritméticos sequenciais e, por meio da colaboração e do diálogo, avançaram para a identificação de padrões e a generalização das descobertas na forma de funções. O Registro do Investigador foi um recurso essencial, por permitir formalizar por escrito o raciocínio desenvolvido oralmente e traduzir para a linguagem matemática.

Por fim, a Situação de Validação possibilitou que os alunos aplicassem os modelos matemáticos que haviam construído para resolver o desafio final da narrativa. Esse momento exigiu revisitar conhecimentos, testar estratégias e validar procedimentos. Mesmo diante de dificuldades pontuais de interpretação, os grupos demonstraram ter assimilado os métodos de cálculo e foram capazes de encontrar

soluções, ainda que seguindo caminhos distintos. A atuação como professor aplicador foi pontual e voltada à mediação, afim de manter o protagonismo dos alunos.

A experiência com o Livro-Jogo evidenciou seu potencial enquanto recurso pedagógico. Sua estrutura narrativa e elementos lúdicos foram motores centrais para o engajamento e a participação ativa dos estudantes. A necessidade constante de decisões coletivas estimulou o desenvolvimento de um pensamento estratégico e colaborativo, enquanto a progressão dos desafios favoreceu a consolidação da função exponencial, muitas vezes vista como abstrata.

Dessa forma, a partir da aplicação e da análise dos dados obtidos podemos afirmar que o objetivo geral desta pesquisa – elaborar um Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, destinado a alunos do ensino médio, com vistas a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial – foi contemplado.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A seguir apresento elementos, argumentos e considerações decorrentes do exposto e da aplicação da proposta, que corroboram no sentido de que a questão de pesquisa “Que variante do *Roleplaying Game* pode ser elaborado, para alunos do ensino médio, com vista a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial?”, foi respondida.

Inicialmente se investigou sobre o Ensino da Função Exponencial, com vista a elaboração das atividades que consolidem os conteúdos relacionados a este objeto matemático. Isso se deu com uma revisão de literatura sobre documentos oficiais para o Ensino Médio, para entender como estes norteiam o ensino com foco na disciplina de Matemática. Em seguida, ocorreu uma revisão de dissertações relacionadas ao ensino da Função Exponencial, afim de identificar as tendências e métodos adotados pelos pesquisadores e verificar sua adequação às diretrizes oficiais. Por fim, foi apresentada uma análise de três livros didáticos, com o intuito de examinar como esses materiais introduzem a função exponencial, avaliar sua conformidade com as orientações oficiais e verificar se incluem elementos apontados pelas dissertações sobre o ensino desse conteúdo.

Com base na análise realizada embora os livros didáticos utilizem situações do cotidiano para introduzir a função exponencial, conforme orienta a BNCC, eles predominantemente seguem uma abordagem tradicional e expositiva. Observa-se, assim, uma lacuna significativa nesses materiais: a escassez de metodologias ativas e lúdicas, como a Modelagem Matemática e os jogos, que, segundo as dissertações investigadas, mostram-se eficazes para promover uma aprendizagem mais profunda, investigativa e engajadora. Diante dessa limitação, propôs-se a elaboração de um Livro-Jogo de RPG como produto educacional, com o intuito de suprir essa carência, como uma abordagem lúdica e investigativa que coloca o aluno como protagonista na aplicação e consolidação dos conceitos de função exponencial.

No terceiro capítulo foi apresentado um texto relacionado aos conteúdos de Função Exponencial, com o objetivo de subsidiar a elaboração das atividades inseridas ao longo do jogo, bem como contribuir para a formação inicial ou continuada do professor de Matemática.

O texto aborda as potências cujo expoente pertence ao conjunto dos números

reais; define-se Função e alguns conceitos fundamentais para, então, apresentar a definição de Função Exponencial e, posteriormente, sua caracterização. Esse material foi fundamental durante a elaboração das atividades, pois me proporcionou maior domínio sobre o objeto matemático de estudo e auxiliou significativamente no desenvolvimento das propostas.

No quarto capítulo, foram abordados os aportes teóricos e metodológicos que fundamentaram a pesquisa, ou seja, as teorias e procedimentos da Educação Matemática e da Didática da Matemática que sustentaram a escolha e a elaboração da proposta de uso do RPG, em formato de livro-jogo, para o ensino de função exponencial. Esses aportes constituíram o pilar da proposta, pois, por meio deste estudo se desenvolveu um quadro (Quadro 13) em que associamos a Fases da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996, 2008) e os momentos do jogo descritos por Grando (1995, 2000).

A elaboração deste quadro de correlações, se mostrou como um modelo norteador para a elaboração posterior, visto que a ausência de parâmetros claros para sua construção de um Livro-Jogo. Portanto, a partir deste quadro de correlações entre os aportes, foi possível desenvolver uma estrutura que orientou a elaboração de uma proposta que segue ambas orientações teóricas, e o que permitiu inserir os objetos matemáticos na narrativa e dinâmica do RPG em formato de livro-jogo.

Após isso, foi apresentado o jogo Roleplaying Game (RPG) e suas variantes, com o objetivo de selecionar aquela que possibilitasse seu uso na consolidação de conteúdos matemáticos relacionados à função exponencial. Iniciamos com uma exposição geral sobre os jogos de RPG para leitores não familiarizados com o gênero, abordando sua definição, a forma de jogar e as diferentes variações existentes. Em seguida, discutiu-se o uso desse tipo de jogo em sala de aula, com destaque as suas potencialidades, tanto pelos argumentos que sustentam a utilização de jogos no ensino quanto por elementos exclusivos do RPG. Por fim, argumentou-se sobre a escolha da variante Livro-Jogo para aplicação na presente pesquisa.

Essa apresentação, além de contribuir para que o leitor compreendesse melhor o jogo de RPG, foi essencial para este trabalho, pois constituiu o momento em que se definiu a proposta a ser utilizada e, consequentemente, o caminho para determinar o tipo de RPG mais adequado ao objetivo de ensino. Tendo em vista as vantagens e desvantagens observadas, entre as opções disponíveis para uso em sala de aula, o Livro-Jogo mostrou-se mais apropriado, pois facilita a inserção dessa ferramenta tanto

por professores iniciantes quanto por experientes. Além disso, sua elaboração permite a criação de um Produto Educacional pronto para ser utilizado no ensino e na consolidação de conteúdos relacionados à função exponencial.

Após essa etapa, foi descrito como ocorreu a elaboração do Livro-Jogo. Descrevemos o processo de construção dos problemas matemáticos integrados à narrativa, bem como a adaptação da história *"Conspiração Contaminante"*, presente em Barros e Sousa (2023), para o formato de Livro-Jogo. Além disso, buscamos fornecer orientações que auxiliem professores interessados em aplicar o RPG em sala de aula, apresentando os procedimentos necessários para a criação de um Livro-Jogo voltado ao ensino de conteúdos matemáticos.

É importante destacar as dificuldades encontradas na elaboração do Livro-Jogo. Um dos principais obstáculos, como dito, foi a ausência de parâmetros claros para sua construção. Mesmo com minha experiência pessoal com jogos desse tipo, integrar esse formato a conteúdos matemáticos mostrou-se um processo complexo. A existência prévia da narrativa "Conspiração Contaminante" (Souza; Barros, 2023) contribuiu para amenizar parte dessa dificuldade, pois já havia uma história definida a ser adaptada. Nesse sentido, a estruturação apoiada em aportes metodológicos foi fundamental para orientar a inserção da matemática na trama.

Outro recurso essencial foi a plataforma *Inklewriter*, que facilitou a escrita por oferecer ferramentas específicas para a criação de narrativas e jogos de hipertexto. Ao final de cada trecho, o leitor se depara com duas ou mais opções de escolha, conduzindo a história por diferentes caminhos e proporcionando uma experiência interativa e personalizada. Isso permitiu que fosse possível escrever de forma mais prática o Livro-Jogo.

Quanto à aplicação da proposta, esta foi realizada com alunos concluintes do Ensino Médio, mas, devido a dificuldades encontradas para aplicá-la em turmas desse nível, optou-se por desenvolvê-la com uma turma do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará. Considerando que o objetivo era a consolidação dos conhecimentos sobre função exponencial, tal decisão não trouxe prejuízos à proposta.

O percurso de aprendizagem iniciou-se com a Situação de Ação, na qual os alunos se familiarizaram com o universo e as regras do jogo, superando gradualmente dificuldades iniciais por meio de decisões coletivas e debates. Na Situação de Formulação, enfrentaram problemas relacionados a funções exponenciais crescentes

e decrescentes, evoluindo de cálculos aritméticos para a generalização de padrões na forma de funções, com apoio do Registro do Investigador. Já na Situação de Validação, aplicaram seus modelos para resolver o desafio final, revisitando e testando estratégias de forma colaborativa.

Os resultados evidenciaram que a narrativa e os elementos lúdicos foram fundamentais para o engajamento e a participação ativa, com estimulo o pensamento estratégico e colaborativo. A progressão dos desafios promoveu uma aprendizagem significativa, tornando mais acessível um conteúdo tradicionalmente abstrato. Assim, a proposta mostrou-se eficaz, alinhada aos referenciais teóricos e capaz de criar um ambiente dinâmico e interativo, o que reforça o potencial do Livro-Jogo como recurso pedagógico para o ensino de função exponencial.

Assim, por meio dos indícios de aprendizagem destacados durante a aplicação da proposta, concluímos que o objetivo central deste trabalho de Elaborar um Livro-Jogo, variante do Roleplaying Game, destinado a alunos do ensino médio, com vistas a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial, pode ser contemplado. E para além do objetivo geral deste trabalho, outras considerações podem ser levantadas.

Destaca-se ainda uma das desvantagens apontadas na seção que tratou da escolha da variante do *Roleplaying Game* adotada nesta proposta. No caso das aventuras-solo ou livros-jogo, por serem tradicionalmente vivenciados de forma individual, perde-se um dos elementos mais característicos do RPG: a interação entre múltiplos jogadores. Essa ausência, a princípio, poderia ser considerada um obstáculo à proposta, uma vez que a troca de ideias e o trabalho colaborativo costumam ser aspectos centrais dessa modalidade de jogo.

Entretanto, ao se aplicar o Livro-Jogo em grupos se observou, na análise dos resultados obtidos, que mesmo em uma dinâmica originalmente pensada para o jogador único, os participantes engajaram-se em processos de colaboração e debate. Isto promoveu uma construção coletiva de interpretações da narrativa e estratégias de resolução para os problemas matemáticos apresentados. Esse movimento colaborativo demonstrou ser fundamental para a consolidação dos conteúdos, e que a proposta, quando vivenciada em grupo, amplia as potencialidades do livro-jogo como recurso pedagógico.

Para além da consolidação dos conteúdos matemáticos, destaco como o Livro-Jogo contribuiu para o desenvolvimento da leitura dos participantes. A aplicação da

atividade teve duração de aproximadamente duas horas e meia, e a leitura constituiu-se como elemento central do processo, uma vez que o jogador precisava ler a narrativa para dar prosseguimento à história e fundamentar suas escolhas. Esse aspecto dialoga diretamente com o exposto por Freitas (2007), que, ao investigar a estrutura dos jogos de RPG, descreveu possíveis situações de leitura e escrita implicadas em sua prática. O autor concluiu que os jogos de RPG motivam os jogadores tanto à produção escrita quanto ao exercício da leitura, promovendo a elaboração de grande quantidade de textos, em especial manuscritos, construídos de forma individual ou coletiva.

Nesse sentido, pode-se afirmar que o Livro-Jogo favoreceu o desenvolvimento da leitura e da análise textual dos jogadores. Mais do que apenas decodificar a narrativa, era necessário compreendê-la para tomar decisões de forma adequada, além de analisar os dados fornecidos pela história a fim de resolver os problemas matemáticos propostos.

Em relação à experiência de aplicação do Livro-jogo, consideramos a necessidade de realizar ajustes na proposta. Ao analisar os áudios e os registros escritos, notou-se que cada grupo alcançou um final diferente da narrativa. Ou seja, realmente cada grupo tomou decisões e realizou escolhas distintas ao longo da história, o que demonstra a liberdade que o jogo de RPG proporciona aos alunos.

Contudo, sob o olhar da consolidação dos conteúdos relacionados à função exponencial, percebeu-se que essa liberdade poderia acarretar a não consolidação plena dos conceitos. A proposta previa, durante a etapa de validação, a existência de dois modelos matemáticos distintos a serem estudados, permitindo que o aluno tivesse a liberdade de jogar a proposta mais de uma vez e, assim, explorar ambos os modelos em momentos diferentes. Entretanto, como o professor, em sala de aula, nem sempre dispõe de tempo suficiente para aplicar o jogo mais de uma vez — e como foi observado que a realização dessa atividade demanda tempo considerável dos estudantes —, tornou-se necessário realizar uma mudança no Livro-jogo.

A alteração ocorreu no momento da narrativa que envolve a ida ao hotel. Esse trecho possui importância não apenas para a história, mas também para que os jogadores compreendam a narrativa em sua totalidade, sendo o ponto-chave em que obtêm as informações necessárias para que o modelo de função $f(x) = ba^x$ seja explorado ao final do Livro-jogo. Foram efetuadas modificações para instigar os

jogadores a seguir para essa parte da história, visto que, na aplicação, metade dos grupos não chegou a ela, impossibilitando o trabalho integral sobre os conteúdos previstos.

Além disso, outras alterações de menor escala foram realizadas na narrativa, pois algumas passagens ocasionaram interpretações equivocadas por parte dos estudantes sobre o que estava sendo destacado. Por exemplo, em alguns finais, estava descrito “cálculo imperfeito”, o que foi alterado para “falta de informações”, já que, para aquele final ser alcançado, ocorreu que os jogadores deixaram de encontrar uma informação, o que resultou em um erro de cálculo. Portanto, essa alteração foi necessária. Além disso, outras mudanças pontuais foram feitas para adequar o jogo da melhor forma possível para ser aplicado em sala de aula.

Por fim, compreende-se que a pesquisa trouxe importantes contribuições para minha formação didática, pois possibilitou não somente colocar em prática os conhecimentos desenvolvidos durante o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, como também dar continuidade às pesquisas acerca da utilização do RPG sob uma perspectiva que vai além do entretenimento, considerando seu uso pedagógico. Essa abordagem pode auxiliar alunos do ensino médio no aprendizado da matemática, mais especificamente em conteúdos relacionados a funções exponenciais, com o objetivo não apenas de desenvolver o domínio do tema, mas também de compreender como esse conteúdo se manifesta em situações reais ou próximas da realidade.

A pesquisa também trouxe contribuições significativas para formação em Matemática. Para a elaboração do capítulo matemático referente à função exponencial, foi necessário realizar um estudo aprofundado sobre o objeto matemático desta função, indo além do tratamento geral de funções estudado durante a graduação e explorado em minhas aulas com os alunos. Nesse sentido, tornou-se indispensável revisitar e aprofundar os conteúdos prévios sobre expoentes reais, para, em seguida, avançar na definição, nas propriedades e na caracterização da função exponencial. Este estudo então promoveu um desenvolvimento do meu saber sobre a própria matemática

Para além de minhas formações, observa-se que este trabalho pode contribuir para o desenvolvimento de futuras pesquisas em Educação Matemática. Com base nos referenciais teóricos e na articulação entre a Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau, e os momentos do jogo descritos por Grando (2000), espera-se que possa

servir como referência para investigações que busquem utilizar o Livro-Jogo não apenas em aulas de Matemática, mas também em outras áreas do ensino básico. Considerando a escassez de parâmetros para a elaboração de jogos dessa natureza, acredita-se que este estudo possa incentivar a criação de novos jogos com objetivos pedagógicos, ampliando o repertório de propostas didáticas voltadas à integração entre narrativa, ludicidade e aprendizagem.

Contudo, também identifiquei limitações nesta pesquisa, especialmente em relação à proposta elaborada. Primeiramente, destaco que a criação desse tipo de material por parte dos professores é um processo longo e carente de parâmetros claros a serem seguidos. Isso torna a elaboração de um Livro-Jogo um desafio, dificultando que o docente desenvolva seu próprio material, sendo muitas vezes necessário recorrer a versões já prontas. Essa dificuldade não é exclusiva desse formato, pois também está presente em outras modalidades de RPG, ainda que em diferentes proporções, sendo o RPG tradicional o mais acessível nesse aspecto.

Além disso, trata-se de um recurso que exige um tempo considerável para sua aplicação em sala de aula, bem como o hábito de leitura por parte dos alunos. A ausência desse hábito pode tornar a experiência cansativa ou até mesmo desinteressante para alguns estudantes.

Assim, recomenda-se que novas aplicações sobre o uso do Livro-Jogo com objetivos educacionais sejam realizadas em contextos semelhante e outros cenários educacionais. Espero que este trabalho sirva de incentivo para aqueles que desejam utilizar o RPG — um jogo apreciado por muitos — em sala de aula, explorando seus diversos formatos. Com o aumento das investigações nessa área, será possível contemplar uma maior variedade de conteúdos e construir um verdadeiro banco de experiências e práticas pedagógicas envolvendo o RPG em diferentes disciplinas e contextos.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA E REFERIDA

AMARAL, Ricardo Ribeiro do**. RPG na escola:** aventuras pedagógicas. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2013.

AMORIM, Natália Dias de. **O PNLD e o currículo de estatística em livros didáticos de matemática no ciclo de alfabetização**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2017.

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino aprendizagem do conceito de função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BAUER, Martin W.; GASKELL, George. **Pesquisa Qualitativa com Texto, Imagem e Som**: Um manual prático. 7ª ed. Petrópolis (RJ): Vozes, 2008.

BEZERRA, Maria de Nazaré Carvalho. **Teoria dos Números**: um curso introdutório. Belém: EditAedi/UFAPA, 2018. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/206368/2/livro_teoria_dos_numeros.pdf>. Acesso em 12 jul. 24.

BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. Em foco: História, produção e memória do livro didático. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n.3, set./dez. 2004. Disponível em: <http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/periodicos/educacao_e_pesquisa/vol_30_no3>. Acesso em: 26 ago. 2024.

BOWMAN, Sarah Lynne. **The functions of role-playing games: How participants create community, solve problems and explore identity**. McFarland, 2010.

BRASIL. Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017. Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro e do Material Didático. **Diário Oficial da União**. Brasília, DF, 19 jul. 2017. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Decreto/D9099.htm>. Acesso em: 26 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. **Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018**. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. 2018b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file>. Acesso em: 10 set. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018a. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Acesso em: 20 set. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Investimento do MEC em livro didático é 79% maior em 2024**. 27 fev. 2024. Disponível em:<https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/2024/fevereiro/investimento-do-mec-em-livro-didatico-e-79-maior-em-2024>. Acesso em: 27 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Básica/MEC, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 11 set. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**:Parte I -Bases legais. Brasília: Secretaria de Educação Básica/MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 11 set. 2024.

BRASIL. Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas**. Lei de diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, 2017. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/529732/lei_de_diretrizes_e_bases_1ed.pdf>. Acesso em: 9 set. 2024.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didáctica da Matemática. *In*: BRUM, Jean. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-114.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos. Ática. São Paulo, 2008.

CARDOSO, Maria Dolores Costa Lhamas. Um livro/jogo acessível baseado no desenho universal pedagógico para o ensino da matemática. Orientador: Mércia de Oliveira Pontes. 2023. 254f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/53031>. Acesso em: 06 de nov. 2024.

COSTA, Atilio Vieira. **Função Exponencial: Uma abordagem guiada pela BNCC**. 2021. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) Universidade Federal De Alagoas, Rio de Janeiro. 2021.

COSTA, Dielle Cruz da. **Potencialidades do uso do celular na matemática escolar: atividades investigativas de função exponencial**. 2023. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa. 2023.

CRESWELL, John Ward. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Luciana de Oliveira da Rocha. 2ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

EMER, Silvana. **MODELAGEM MATEMÁTICA ALIADA À EXPERIMENTAÇÃO NO ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS**, 2020 105 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) Universidade do Vale do Taquari, Lajeado. 2020.

FREITAS, Vivianete Milla de. **Leitura e escrita de jovens em contextos de RPG** (ROLEPLAYING GAME). 2007. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Minas Gerais. 2007.

FERNANDES, Alexsandro Marcelino et al. **Ypostírixi**: modelo de apoio baseado em RPG aventura solo para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem. 2017, 97 f. Dissertação (Mestrado em Informática), Universidade Federal da Paraíba, 2017.

FERREIRA, Genaldo Gomes. **O Ensino de Funções Exponenciais no Novo Ensino Médio: Aspectos Legais, Análise de Livros Didáticos e a Visão de Professores de Matemática**. 2023. 93 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) - Universidade Federal de Ouro Preto, Rio de Janeiro. 2023.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cadernos Cedes**, SciELO Brasil, v. 50, n. 9-25, 2000. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ccedes/a/3HgqZgZCCZHZD85MvqSNWtn/>. Acesso em: 14 de jun. 2023.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed. São Paulo (SP): Atlas, 2002.

GRANDO, Regina Celia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, São Paulo. 2000.

GRANDO, Regina Celia. **O jogo [e] suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática**. 1995. 175f. : il. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 1995.

HAMMER, Jessica, et al. Learning and Role-Playing Games. In: DETERDING, Sebastian; ZAGAL, José (Ed.). **Role-playing Game Studies: Transmedia Foundations**. Routledge, 2018. p. 283-299.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar 2**: logaritmos. 10 ed. - São Paulo: Atual, 2013.
JUNIOR, Sebastiao da Silva Lima. **UM ESTUDO SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL: PROPOSTAS DE ATIVIDADES LÚDICAS**. 2022 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Rio de Janeiro. 2022.

LAJOLO, Marisa. (org). **Livro didático**: um (quase) manual de usuário. Em Aberto, Brasília, v. 16, n 69, jan./mar. 1996. Disponível em: <https://emaberto.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/article/view/2368/2107> Acesso em: 27 ago. 2024.

LIMA, Elon Larges. *et. al*. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Elon Larges. **Logaritmos**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.
MARCATTO, Alfeu. **Saindo do quadro – uma metodologia lúdica e articipativa baseada no role playing game**. 2. ed. São Paulo: A. Marcatto, 1996.

MASETTI, Cristina. **ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA: FUNÇÃO EXPONENCIAL**' 27/03/2016 165 f. Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, São Paulo. 2016.

MIORIM, Maria Ângela.; FIORENTINI, Dario. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM-SP, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990. Disponível em: <http://files.profpereira.webnode.com/200000097846ca86603/Texto%20%20Uma%20Reflexao%20sobre%20o%20uso%20de%20Materiais%20Concretos%20e%20Jogos.pdf>. Acesso em: 28 ago. 2023.

MORTIMER, Eduardo Fleury; SCOTT, Phill. Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. **Investigações em ensino de ciências**, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002. Disponível em: https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/562. Acesso em: 21 set. 2024.

OLIVEIRA, Arthur Barbosa de; ROCHA, José Damião Trindade. Reflexões acerca do roleplaying game (rpg) na educação. **Multidebates**, v. 4, n. 2, p. 114-124, 2020.

OLIVEIRA, Rafael Henrique de. **Um estudo sobre a função exponencial**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2015. Disponível em: < https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2375543>. Acesso em 01 jul. 24.

PARÁ. Secretaria de Estado de Educação do Pará. **Documento Curricular do Estado do Pará – Etapa Ensino Médio**. Volume II. Belém: SEDUC-PA, 2021. Disponível em: <https://www.seduc.pa.gov.br/site/public/upload/arquivo/probncc/ProBNCC_DCEPA-12072021_compressed-3b8b0.pdf>. Acesso em: 20 set. 2024.

PASSOS, Claudio Manso; TEIXEIRA, Paulo Magalhaes. Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de guy brousseau (CO). In: **XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. 2011.

PAVÃO, Andréa. A aventura da leitura e da escrita entre mestres de role playing games (RPG). **São Paulo: Devir**, 2000.

SCHICK, Lawrence. Heroic Worlds**: A History and Guide to Role-Playing Game**. Buffalo: Prometheus Books, 1991, 448p.

SCHMIT, Wagner Luiz. **RPG e educação: alguns apontamentos teóricos**. 2008. 268 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação, Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2008.

SILVA, Adriano dos Santos da**. O livro-jogo como ferramenta lúdica, matemática e tecnológica no desenvolvimento de habilidades**. 2022. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

SILVA, Delciana Góes da. **Ensino de Semelhanças de Triângulos com Materiais Manipuláveis**. 193 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém. 2024.

SILVA, Pedro Panhoca da. **O livro-jogo e suas séries fundadoras**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Letras, Assis. 2019.

SILVA, Rodrigo Felipe da. **Função exponencial e logarítmica**. 118 p. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. 2016.

SOUZA, Roger Thiago Aires de; BARROS, Thiago de Vasconcelos. **Conspiração Contaminante: Roleplaying Game e conteúdos matemáticos**. 2023. 88 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

STEWART, James. Cálculo – Volume II. 7. ed. Traduzido por EZ2 Translate. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2013.

TÁBOAS, Plácido Zoega. **Cálculo em uma variável real**. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

VASQUES, Rafael Carneiro. **As potencialidades do RPG (Role Playing game) na educação escolar**. 2008. 169 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DA APLICAÇÃO COM ESTUDANTES

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada Roleplaying Game e Função Exponencial, sob a responsabilidade dos (as) pesquisadores **Miguel Chaquiam e orientando Thiago de Vasconcelos Barros**, vinculados a Universidade do Estado do Pará.
Nesta pesquisa pretendemos realizar a aplicação de um Livro-Jogo, com o objetivo de consolidar conteúdos relacionados a função exponencial. A sua colaboração na pesquisa será por meio da leitura e registro das atividades presentes no material disponibilizado, enquanto realizamos um registro por meio da gravação de voz, ambos serão utilizados somente para a análise das potencialidades apresentadas pelo material no ensino de matemática.
Ressaltamos que em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gasto ou ganho financeiro por sua participação. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo dos resultados obtidos sobre as potencialidades do Roleplaying Game e Função Exponencial, nas aulas de matemática.
Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.
Caso deseje será disponibilizado uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido a você.
Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Miguel Chaquiam e/ou Thiago de Vasconcelos Barros** por meio da Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; fone: (91) 4009-9501

_____, _____de _____ de 2025

_____
Assinatura do pesquisador

Eu, _____ aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

_____
Participante da pesquisa

APÊNDICE B – CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE (LIVRO-JOGO)

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

(LIVRO-JOGO)

INTRODUÇÃO

Você está prestes a iniciar a leitura de um Livro-Jogo, ou seja, uma história interativa em que você pode tomar as decisões durante todo o percurso da história. Cada uma de suas decisões podem refletir diretamente na história.

Nessa História fictícia você irá assumir o papel de um Investigador do Governo Espanhol, durante o ano de 1918. Sua missão consiste em apurar a origem de uma doença misteriosa que assola a cidade de Girona. O prefeito local suspeita de uma conspiração internacional, na qual potências em guerra estariam utilizando a enfermidade para desestabilizar a Espanha. Então você deverá buscar pistas, solucionar os problemas relacionados à doença e reunir indícios que possam confirmar a existência da conspiração na cidade.

REGRAS

Para guiar sua experiencia com estes jogo, ele possui, como todo jogo, regras a serem seguidas. Temos as regras das cenas e as regras da ficha de seu personagem, como descrevermos a seguir.

REGRAS DE LEITURA

A história é dividida em blocos numerados, e em cada bloco há comandos a qual sempre aparecem entre parênteses e negrito, exemplo:

(Vá para o bloco 10);

(Dificuldade: 2);

(Perca 2 pontos de saúde);

Os comando aparecem conforme você realiza escolhas ao longo da história, então para se seguir a história é necessário segui-los.

Comandos como **(Vá para o bloco 10)** indicam a que bloco é preciso seguir para dar continuidade a leitura;

COMANDOS DE DIFICULDADE

Já os comandos de dificuldade - como **(Dificuldade: 2)** - ocorrem conforme desafios surgem, e para superar estes desafios é necessário jogar o dado. Caso o valor do dado seja igual ou maior à dificuldade você obtém um sucesso; caso seja menor ocorre uma falha. Exemplo:

(Dificuldade: 3)
Sucesso: **(Vá para o bloco 9)**
Falha: **(Vá para o bloco 37)**

Ao ver este comando role o dado. Você terá um ***Sucesso*** caso o valor rolado no dado ***seja igual ou maior o valor da dificuldade***, no caso acima igual ou maior que 3.

Já uma ***Falha*** ocorre quando o valor do dado é ***menor que o valor da dificuldade***. Ou seja, no exemplo acima, um valor menor que 2.

Sucesso ou falhas levam a caminhos diferentes na história, mas não necessariamente a caminhos melhores ou piores.

RELATÓRIO DO INVESTIGADOR

A ferramenta mais importante para este Livro-Jogo é o chamado "**Relatório do Investigador**", um material complementar a este Livro. Neste material você irá registrar informações do seu investigador e os caminhos traçados durante a sua história.

No **Relatório do Investigador** você deve:

(I) Registrar a trajetória percorrida, isto é, a sequência de cenas escolhidas ao longo da aventura, desde o início até o desfecho. Este registro deve ser feito nos quadrados indicados.

(II) No relatório, além de registrar o caminho percorrido, deve-se anotar decisões tomadas, justificativas, cálculos e demais informações sempre que solicitado ao longo da aventura. Cada bloco possui uma área de registro correspondente.

O INVESTIGADOR

Como este se trata de um Livro-Jogo, você irá encarnar no papel do personagem principal, portanto cabe a você escolher o nome do **Investigador,** registrar os Itens que irão lhe auxiliar ao longo da história e tomar cuidado com a saúde do personagem.

Registre as seguintes informações no Relatório do Investigador:

Nome: Escolha um nome para seu personagem;

Pontos de Saúde: 10

Seu Investigador possui pontos de saúde que representa o bem-estar do seu personagem. Algumas escolhas podem acabar afetando a saúde do personagem como **(Perca 2 pontos de saúde)**.

Caso o Investigador chegue a 0 pontos de saúde ***você não perde o jogo***, mas representa que o seu personagem foi tomado pela doença. Continue a história mesmo assim.

Equipamentos:

Cada equipamento terá seu uso indicado como uma das ações do personagem.

Sempre que a história apresentar a opção de usar um item, você poderá utilizá-lo e seguir o caminho correspondente. Mas atenção: cada item pode ser usado apenas uma vez. Assim que usar apague-o do Relatório.

Portanto, pense bem antes de usá-lo.

1 equipamento de proteção contra contaminação (após seu uso descarte-o);
50 Pesetas (Moeda Espanhola);
Carta do prefeito de Girona;

Agora que você viu as regras, vamos iniciar a investigação

(Vá para o bloco 1)

[1]

Acomodado em uma poltrona, você observa pela janela os vastos campos agrícolas que se estendem até onde a vista alcança. Ao longe, elevam-se colinas e montanhas baixas. Trata-se das terras ao redor de Girona, cidade próxima à fronteira com a França — seu destino.

O trem segue firme pelos trilhos, embalando o pensamento. Você tenta recordar, com clareza, qual sua missão. Em busca de respostas, volta o olhar para suas mãos: nelas, um envelope oficial, endereçado ao prefeito de Girona.

O documento é sua credencial — e talvez sua chave para entender o que está por vir. Diante de você, sentados na poltrona oposta, dois homens permanecem atentos. São os agentes designados para garantir sua segurança. Silenciosos, prontos para agir ao menor sinal de perigo. Então você decide:

- Perguntar aos homens detalhes da missão **(Vá para o bloco 2)**
- Abrir e ler o documento **(Vá para o bloco 3)**
- Forçar a mente e tentar se lembrar sem ajuda **(Vá para o bloco 4)**

[2]

Um dos agentes, um homem de expressão rígida e olhar atento, inclina-se levemente em sua direção.

— Recebemos ordens diretas de Madri para garantir que você fique em segurança — diz ele, em tom contido: — Há rumores de que algo grave está acontecendo em Girona. Não é só uma doença comum. Acredita-se que possa haver interferência estrangeira, talvez até sabotagem.

O outro agente, mais jovem, completa: — Sua missão é descobrir o que está por trás disso tudo e manter discrição total. Não confie em ninguém.

O agente interrompe a fala por alguns instantes, voltando o olhar para a janela. Após uma breve pausa, diz com seriedade:

— Estamos nos aproximando de Girona. É melhor que esteja preparado. Um único erro pode custar bem mais do que apenas o fracasso da missão.

(Vá para o bloco 7)

[3]

Você observa o envelope em suas mãos por alguns segundos, hesitante. Com cuidado, rompe o lacre de cera e retira os papéis do interior.

As primeiras linhas confirmam a gravidade da situação: o surto em Girona já causou dezenas de mortes, e há indícios de que os sintomas não correspondem a nenhuma doença conhecida.

O documento serve, sobretudo, para identificá-lo como agente da Coroa Espanhola, mas não concede qualquer poder policial. E garante liberdade de investigação dentro dos limites da cidade.

Uma nota final, sublinhada em letras firmes, chama sua atenção:

"*A possibilidade de ação inimiga não deve ser descartada. Seja discreto. Seja rápido."*

— Estamos nos aproximando de Girona. É melhor que esteja preparado. Diz um dos agentes, o encara por um breve instante, depois volta o olhar para a janela. **(Vá para o bloco 7)**

[4]

Você fecha os olhos por um momento, tentando puxar da memória os detalhes que lhe foram passados. A viagem até Girona, a escolta discreta, o nome do prefeito; tudo ainda parece envolto em névoa, como se as informações tivessem sido entregues às pressas — ou propositalmente em pedaços.
(Dificuldade: 2)

- Sucesso: **(Vá para o bloco 5)**
- Falha: **(Vá para o bloco 6)**

[5]

Você se lembra de homens em Madri, relatando um surto na cidade de Girona... uma doença desconhecida, mortes rápidas, suspeitas de sabotagem. Seu papel é descobrir a verdade. Mas quanto mais força faz para lembrar, mas percebe que certas partes foram deixadas de fora — talvez de propósito.

Enquanto você estava imerso em seus pensamentos, uma voz firme cortou o silêncio e o fez levantar os olhos num sobressalto

— Estamos nos aproximando de Girona. É melhor que esteja preparado. Diz um dos agentes e depois volta o olhar para a janela **(Vá para o bloco 7)**

[6]

Você força a cabeça, tentando se lembrar...mas nada vem.

Lembra de uma sala escura, alguém falando rápido, talvez até demais, e o som de um selo sendo carimbado — e só.

Sem não conseguir lembrar, vai ter que confiar nos outros… e isso, nesse tipo de missão, pode ser um erro bem perigoso.

Enquanto você estava imerso em seus pensamentos, uma voz firme cortou o silêncio e o fez levantar os olhos num sobressalto.

— Estamos nos aproximando de Girona. É melhor que esteja preparado.

Os dois agentes continuam te encarando. O clima no vagão pesa, como se o ar estivesse mais denso a cada minuto.

Fugir passa pela sua cabeça. Mas ao mesmo tempo... você sabe que isso não vai apagar o que está vindo.

E talvez fugir só torne tudo pior. A missão parece suicida, mas continuar é a única coisa que você pode fazer agora — ou pelo menos é o que parece.

- Continuar a missão e seguir até Girona **(Vá para o bloco 7)**
- Fugir do trem na próxima parada **(Vá para o bloco 87)**

[7]

O trem para devagar na estação. Quando você olha pela janela, a cidade de Girona aparece bem na sua frente — bonita, cheia de prédios antigos e ruas estreitas. Já são 10h da manhã, e a cidade começa a ganhar movimento. Você desce do trem sabendo o que precisa fazer primeiro: achar a prefeitura e tentar falar com o prefeito.

- Tentar encontrar a prefeitura por conta própria, andando pelas ruas e observando placas e prédios oficiais **(Vá para o bloco 8)**
- Pedir informações a um dos moradores **(Vá para o bloco 9)**

[8]

Você começa a caminhar pelas ruas de pedra, observando com atenção as construções ao redor. Placas antigas, fachadas trabalhadas, cruzamentos estreitos… tudo parece igual à primeira vista. Ainda assim, você segue.

(Dificuldade: 3)

- Sucesso: **(Vá para o bloco 11)**
- Falha: **(Vá para o bloco 10)**

[9]

Você se aproxima de um senhor de boina que carrega uma sacola de frutas. Ele te encara com curiosidade, mas seu olhar logo muda ao notar os seguranças que caminham logo atrás de você. Ele fica intimidado, hesita em responder, mas ainda parece disposto a ouvir o que você tem a dizer.

(Dificuldade: 4)

- Sucesso: Você transmite segurança e o morador, ainda que apreensivo, responde a sua pergunta **(Vá para o bloco 12)**
- Falha: Sua aproximação só aumenta o desconforto. O homem assustado, se afasta sem dar qualquer resposta. **(Vá para o bloco 10)**

[10]

Você e os seguranças caminham pelas ruas. Depois de algum tempo andando em círculos, os três já estão claramente desorientados. É então que um senhor, de aparência simples e olhar gentil, percebe a confusão. Ele se aproxima devagar, com as mãos nos bolsos do casaco surrado, e pergunta:

— Estão perdidos, rapaz?

Você explica que está procurando a prefeitura. O homem sorri com simpatia e aponta para o final da rua.

— Siga por ali, depois vire à esquerda. Vai ver um prédio grande, com quatro andares e janelas altas. É lá.

Antes de se despedir, ele dá uma leve batida no seu ombro com a mão e, em seguida, solta uma tosse seca e forte, sem conseguir desviar o rosto a tempo. O som rasgado ecoa por um segundo, talvez fosse só uma gripe comum ou não. **(Dificuldade: 5)**

Sucesso: Você não sente nenhum sintoma e segue o caminho sem problemas.
Falha: Uma sensação estranha começa a surgir **(Perca 4 pontos de saúde).**

(Vá para o bloco 11)

[11]

Você segue pelas ruas da cidade até finalmente chegar à prefeitura. À sua frente, se ergue um grande prédio de quatro andares, com traços arquitetônicos que misturam o gótico do século XV com detalhes mais recentes, típicos do início do século XX.

Ao entrar no edifício, nota que está quase vazio, e atrás de uma mesa de madeira, bem ao centro, uma jovem mulher branca, de cabelos e olhos castanhos, se levanta assim que percebe sua chegada. Ela sorri de maneira cordial e os cumprimenta.

— Bom dia, Cavalheiros, eu me chamo Clara, como posso ajudá-los?

Você puxa o documento oficial que carrega consigo e o entrega a Clara. Ela pega o papel com certo cuidado, lê rapidamente e, ao terminar, ergue os olhos com uma expressão um pouco mais séria.

— Entendo... — diz, devolvendo o documento. — Nesse caso, por favor, me acompanhe. Vou levá-lo até o gabinete do prefeito. **(Vá para o Bloco 13)**

[12]

Apesar da presença dos seguranças causar um certo desconforto, você consegue manter a calma e aborda o morador de forma educada. Ele hesita por um momento, mas acaba respondendo em voz baixa, ainda desconfiado:

— Saindo da estação, vá pela avenida principal em frente, siga reto até passar por uma pequena praça com uma fonte. Depois, entre na segunda rua à direita. A prefeitura fica logo adiante, é um prédio de quatro andares.

Sem prolongar a conversa, ele se despede com um aceno contido e segue seu caminho. Agora, você já tem uma direção clara para seguir.

(Volte para o bloco 11)

[13]

Clara segue à frente guiando vocês ao quarto andar. Ao chegarem diante de uma porta, Clara pede que aguardem um instante, bate suavemente e ouve-se uma voz masculina respondendo do outro lado.

Ela abre a porta com cuidado, troca algumas palavras rápidas com quem está lá dentro e, logo em seguida, faz sinal para que entrem.

O prefeito Díaz sentado à mesa, rodeado por pilhas de papéis e com uma caneta-tinteiro em mãos. De estatura mediana, aparentando seus 45 anos, Díaz tem cabelos grisalhos, barba por fazer e olhos de um azul profundo.

— Sejam bem-vindos — diz ele, com um gesto para que entrem.

— Me chamo Díaz, prefeito de Girona. Gostaria de conhecer cada um de vocês, mas antes, precisamos ir direto ao que importa.

— A doença apareceu no hospital da cidade há alguns dias — explica Díaz. — Foi identificada pelo médico Dr. Santiago. Os sintomas são sérios: febre alta, dores fortes nas articulações e na cabeça, além de comprometer o sistema respiratório. E o pior é que, os pacientes só pioram... muitos já não resistiram.

— Ainda estamos tentando entender como essa doença se espalha — continua o prefeito, com um tom preocupado.

— Pelo que conseguimos levantar ***dentro do intervalo de uma semana o total de contaminados é triplicado***.

— O que você me diz, doutor? Ao que parece na primeira semana de infecção tínhamos 3 casos. ***Há como estimar quantos casos teríamos na primeira, na segunda e na terceira semana, respectivamente?***

Você pensa por um momento e responde:

- 3, 6 e 9 casos, respectivamente. **(Vá para o bloco 14)**
- 3, 9 e 27, casos, respectivamente. **(Vá para o bloco 15)**

[14]

Ao compartilhar sua ideia com o prefeito, diz que talvez o número de infectados aumente de forma linear, crescendo de três em três — três na primeira semana, seis na segunda, nove na terceira. O prefeito não parece convencido:

— O Dr. Santiago não era tolo… Por que ele escreveria com tanta urgência se o avanço fosse tão lento assim?

Algo no tom de voz dele denuncia inquietação. Com calma, abre um relatório sobre a mesa, empurrando-o em sua direção.

Talvez, completando os dados deixados pelo médico, você consiga entender melhor o que ele quis dizer com "***triplicar***". Será mesmo um crescimento lento? Ou a ameaça é maior do que parece? **(Vá para o bloco 16)**

[15]

— Sua linha de raciocínio está certa — responde Díaz, assentindo com a cabeça. — É exatamente o que o Dr. Santiago relatou.

Com isso, Díaz destranca uma das gavetas da mesa e puxa um envelope com o símbolo de um hospital estampado. Coloca o documento sobre a mesa, bem à sua frente. — Esse é o relatório preliminar que o Dr. Santiago conseguiu me entregar — diz, com um olhar sério.

— Mas, com tantos doentes chegando, ele não teve tempo de completar tudo. Mesmo assim, o que tem aí já dá uma boa ideia de como essa doença está se espalhando. Você acha que consegue me ajudar a completar essas informações? pergunta Díaz. **(Vá para o bloco 16)**

[16]

Na carta o Dr. Santiago descreve os sintomas enfrentados pelos pacientes e destaca que, até o momento, nenhum tratamento apresentou qualquer eficácia. Diante disso, o médico sugere que medidas de contenção devem começar a

serem tomadas de imediato, para impedir o espalhar da doença pela cidade e pelo país.

Logo abaixo na carta, o Dr. Santiago apresenta uma relação incompleta do número de infectados registrados a cada semana desde a identificação dos primeiros casos.

Figura 1 - Relação Incompleta Carta de Santiago;

SEMANA	NUMÉRO DE CONTAMINADOS
1	3
	9
3	
4	

(Esboce e preencha o quadro no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 17)

[17]

O prefeito agradece pela sua dedicação e fala sobre o pedido do Dr. Santiago para estudar a sequência de casos da doença, mas admite que, com todos os problemas que enfrenta na cidade, não conseguiu dar conta da tarefa.

Ele aponta para a anotação deixada pelo médico na carta:

“***A chave está em escrever o valor do número de infectados como um produto de um ou mais números***.”

Ele franze a testa, balança a cabeça devagar e desabafa:

— Confesso que não entendi muito bem o que ele quis dizer com isso… talvez tenha algo a ver com matemática. Você conseguiria me ajudar a escrever esses números dessa forma?

(Anote no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 18)

[18]

O prefeito coça a cabeça, confuso, e olha para os números escritos na folha com uma expressão cansada.

— Obrigado por me ajudar nesta etapa... — diz ele. — Mas como não sou muito hábil com matemática, esse tipo de representação ainda parece complicado pra mim. Existe alguma forma mais simples de entender essas multiplicações repetidas?

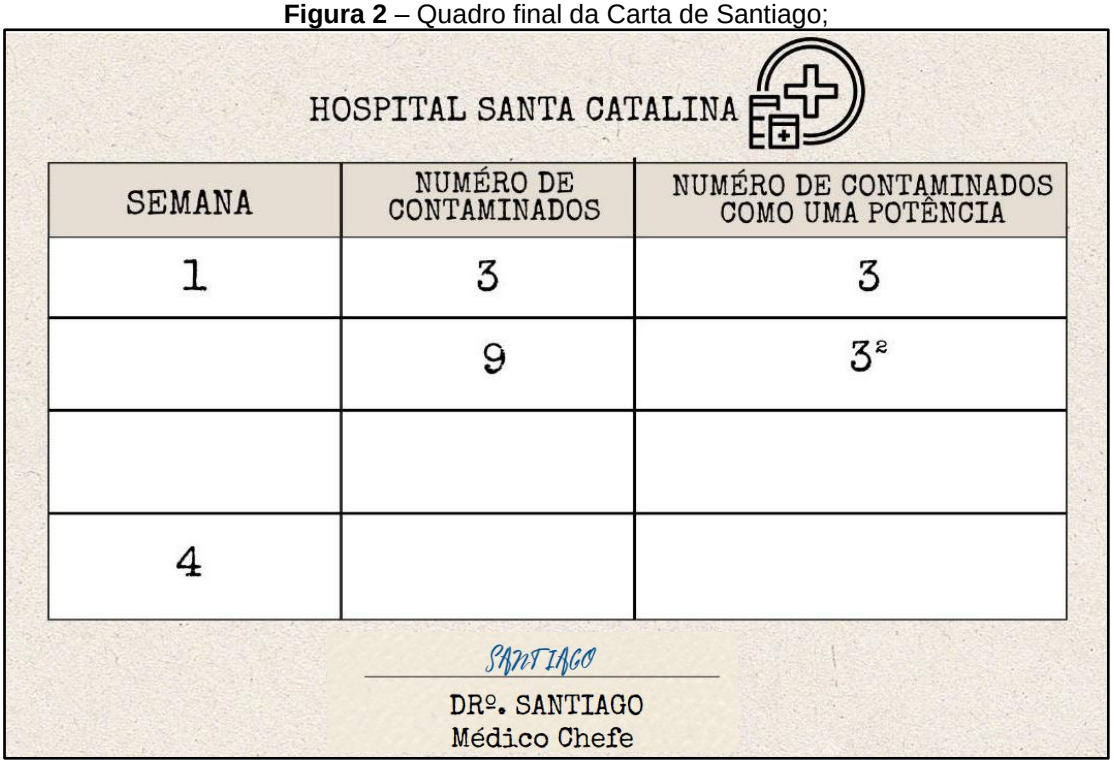
Você pensa por um instante e lembra de um recurso útil: ***Potenciação***.

(Vá para o bloco 19)

[19]

— Era exatamente isso que Santiago havia pensado... — diz em voz baixa, quase para si mesmo. — ***Está na última página da carta. Ele deixou um quadro, disse que aquilo ajudaria a entender de vez a gravidade da doença. Na época, confesso que não compreendi, mas agora...***

Figura 2 – Quadro final da Carta de Santiago;



HOSPITAL SANTA CATALINA

SEMANA	NUMÉRO DE CONTAMINADOS	NUMÉRO DE CONTAMINADOS COMO UMA POTÊNCIA
1	3	3
	9	3^2
4		

SANTIAGO

DRº. SANTIAGO
Médico Chefe

(Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 20)

[20]

Díaz folheia a carta com mais cuidado, os olhos buscando algo específico. Então, aponta para o rodapé da última página. Há uma anotação feita à mão, com a caligrafia trêmula de Santiago, como se tivesse sido escrita às pressas.

— Aqui está... — diz o prefeito, deslizando o dedo sob a frase sublinhada. — Essa foi a última pergunta que ele me fez antes de me entregar a carta.

"Díaz, meu amigo... você consegue, não é? Perceber que existe uma relação entre o número de semanas e o valor contido na potência?"

Ele se encosta na cadeira e cruza os braços, olhando para você como se esperasse que a resposta viesse agora, não de Santiago, mas de você.

- Se você acredita ter entendido a relação entre o número de semanas e o valor do expoente na potência **(Anote no seu Relatório do Investigador e Vá para o bloco 22).**
- Se ainda não consegue ver essa relação, ou prefere não arriscar (**Vá para o bloco 21)**

[21]

Díaz suspira fundo, mas não com decepção — e sim com preocupação, e percebendo a sua confusão diante dos números e potências, se inclina levemente para frente, repousando os cotovelos sobre a mesa. Com um tom mais calmo e paciente, ele diz:

— Entendo que não seja simples à primeira vista. Vamos fazer assim: coloque os números lado a lado. De um lado, as semanas — 1, 2, 3, e assim por diante e ao lado desses números coloque as potências de base 3: 3^1, 3^2...

— Perceba que a cada semana o número de infectados é um 3 multiplicado por ele mesmo várias vezes.

(Desenvolva a expressão no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 22)

[22]

Díaz cruza os braços e solta um suspiro, com um tom de alívio.

— Agora finalmente conseguimos entender o comportamento da doença — diz ele, enquanto observa novamente o relatório. — Para saber o número de contaminados, basta olhar a semana estamos e usar potências de base 3.

— Agora, antes de enviarmos essas informações ao Hospital Santa Catalina, precisamos desenvolver uma forma clara para que os médicos de lá também possam fazer os cálculos e acompanhar o avanço da doença.

— ***Vamos chamar de t o tempo em semanas e C o número de contaminados***.

Com base descobriu, pode-se escrever a expressão assim:

(Desenvolva a expressão no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 23)

[23]

— Leve essas informações ao Hospital Santa Catalina o quanto antes. O Dr. Santiago e sua equipe precisam saber disso. Talvez, com esses dados, eles consigam conter a doença antes que ela se espalhe ainda mais. Confio essa tarefa a você, investigador... vidas dependem disso.

Anote o Item "***Permissão do Prefeito***" no seu Relatório do Investigador.

— Pensando bem. Reflete o prefeito.

— Você mal chegou à cidade. Deve estar cansado da viagem. Talvez o melhor agora fosse ir até o hotel e descansar um pouco antes de seguir para o hospital. Mas deixo essa escolha em suas mãos. Seja como for, o tempo é precioso.

- Ir ao hotel primeiro, para recuperar as energias e se preparar melhor para os próximos desafios. **(Vá para o bloco 24)**
- Ir direto ao hospital, para encontrar médicos em meio ao caos e talvez fazer a diferença imediatamente. **(Vá para o bloco 35)**

HOTEL ROSA DE OÑAR

[24]

Você segue até o hotel para sua estadia em Girona. Trata-se do Hotel Rosa de Oñar, nome dado em homenagem a um dos rios que corta a cidade.

O prédio, de três andares e fachada vermelha, tem um estilo que lembra as tavernas medievais. Assim que atravessa a porta, percebe que o térreo funciona como restaurante: mesas e cadeiras de madeira estão distribuídas por todo o salão, criando um ambiente acolhedor.

Atrás do balcão, encontra-se um senhor idoso — cabelos brancos, roupas vermelhas simples, e um sorriso quase desdentado, mas cheio de simpatia.

— Venham, venham, sejam muito bem-vindos ao Rosa d'Oñar, a melhor hospedaria da cidade, não tenham a menor dúvida! — diz com entusiasmo. — No que o velho senhor Ortega poderia lhes ser útil?

Você se apresenta ao senhor Ortega, e solicita um quarto. Agora, é hora de decidir como deseja proceder para garantir sua acomodação no Rosa d'Oñar:

- Apenas pagar pela estadia **(Use as o item "50 Pesetas" e vá para o bloco 25)**
- Relatar que está a serviço do prefeito **(Vá para o bloco 26)**

[25]

Você apenas menciona que precisa de um quarto e realiza o pagamento.

— Muito bem! Com um gesto tranquilo, entrega a chave do quarto 7, no segundo andar. — Cama boa e banho quente, é o que oferecemos.

Nas paredes, você repara em várias fotos antigas em molduras gastas. Em algumas, vê uma jovem sorridente de cabelos castanhos e olhos vivos.

O velho percebe seu olhar fixo nas fotos e, com um suspiro quase imperceptível, comenta: — Essa é minha filha Rosa, ele se cala por alguns segundos. Sua expressão muda, deixando transparecer certa tristeza.

- Percebendo a expressão do senhor Ortega, você pergunta o que houve **(Vá para o bloco 27)**
- Optando por não se envolver, você apenas agradece, entra no quarto e encerra a conversa ali. **(Vá para o bloco 28)**.

[26]

Assim que você menciona que está a serviço do prefeito, o semblante de Ortega muda. Seu sorriso diminui e um olhar preocupado surge em seus olhos.

— O prefeito me disse que vocês vieram para ajudá-lo com problemas no saneamento, mas pelas suas roupas e equipamentos... diria que são médicos!

— Talvez isso seja um abuso de minha parte, mas apenas se tiverem tempo, eu peço por favor que ajudem a minha Rosa, ela está muito doente.

Você entra no quarto com a chave em mãos, mas agora carrega mais do que bagagem — carrega também um pedido comovente.

- Se desejar ajudar Ortega e sua filha Rosa. **(Vá para o bloco 28)**
- Se preferir descansar, vá direto para o quarto. Afinal, a investigação que o aguarda no dia seguinte é urgente. **(Vá para o bloco 29)**

[27]

Ao notar a expressão entristecida, você pergunta se está tudo bem.

Ele fala com a voz carregada de pesar.

— Desculpe,… é que… tenho passado noites em claro por causa da minha filha. Rosa. Desde que minha esposa se foi, ela é tudo o que me resta. Mas agora, a pobrezinha está doente e nenhum remédio tem feito efeito.

— Sei que não devo me meter na vida de ninguém, mas… pelo seu jeito, me parece um médico, ou algo do tipo. Seria um abuso da minha parte pedir para dar uma olhada nela? Ela está muito doente.

- Se desejar ajudar Ortega e sua filha Rosa **(Vá para o bloco 28)**
- Se preferir descansar, vá direto para o quarto. Afinal, a investigação que o aguarda no dia seguinte é urgente **(Vá para o bloco 29)**

[28]

Ao ouvir que você está disposto a ajudar, o senhor Ortega parece aliviado. Seus olhos marejam discretamente e ele solta um suspiro contido.

— Muito obrigado, meu jovem… por favor, me acompanhem. Ela está no andar de cima, no quarto ao final do corredor.

Antes de girar a maçaneta, você pensa se algum dos seus itens pode ser útil nessa situação:

- Entrar diretamente no quarto para examinar Rosa **(Vá para o Bloco 30)**
- Verificar seus Itens antes de entrar **(Vá para o Bloco 31)**

[29]

Ao entrar em seu quarto, a luz suave do abajur ilumina as paredes vermelhas e os móveis simples de madeira. O corpo pede por descanso. Deita-se na cama, olhando por instantes para o teto antes de fechar os olhos. Sabe que o dia seguinte será decisivo para entender essa doença.

(Vá para o bloco 34)

[30]

Você entra no quarto com cuidado. O ambiente é abafado e com pouca luz. Sobre a cama, uma jovem de cerca de 15 anos está sentada.

Ela segura uma tigela de ensopado, tentando se alimentar apesar do cansaço evidente. A cada movimento, solta um leve gemido de dor.

O senhor Ortega se aproxima da cama e fala com carinho:

— Minha filha, esse grupo gentil decidiu nos ajudar. Eles são médicos e sabem o que fazer para que você melhore. Deixe que eles a examinem.

À primeira vista, os sintomas da jovem lembram apenas um resfriado comum. No entanto, ao realizar um exame mais cuidadoso, você começa a notar sinais preocupantes.

Na mão esquerda dela, há um lenço de pano branco, manchado com sangue vindo do nariz e da boca. Ao medir sua temperatura, o resultado ultrapassa os 39,5ºC. Ela relata dores fortes na cabeça e nas articulações, além de demonstrar clara dificuldade para respirar.

(Vá para o bloco 32)

[31]

Você vasculha rapidamente seus pertences, refletindo sobre a possibilidade de contágio. Então se lembra de um dos itens que carrega: um equipamento de proteção contra contaminação. Luvas grossas e uma máscara ajustável compõem o conjunto, usado anteriormente em zonas de risco sanitário.

Gaste o Item "***equipamento de proteção contra contaminação***"

Com rapidez e cuidado, você veste o equipamento, ajustando cada parte ao corpo. Ortega observa em silêncio, surpreso com a precisão e o profissionalismo de seus movimentos.

Quando termina, você leva a mão até a maçaneta da porta do quarto de Rosa, pronto para examiná-la.

(Volte para o bloco 30)

[32]

Ortega cruza os braços e observa a filha com preocupação.

— Ela está nessa cama há três dias. Antes disso, estava bem, trabalhando normalmente no restaurante. Isso é… até aquele rapazinho aparecer.

Rosa, de voz fraca e interrompida por tosses, tenta defender o visitante: — Papai, por favor... (tosse) o rapaz foi um cavalheiro. Ele só estava me ajudando a entender os pedidos.

O velho franze o cenho, impaciente.

— Ele estava perto demais, perto demais de você pro meu gosto. Aquele tal de Maxwell, com aquele uniforme Francês.

— É Maximilien… — corrige Rosa, com esforço — e não é nada do que o senhor pensa, meu pai... (espirro) deixe o rapaz fora disso, por favor...

Com isso, você percebe que Rosa, filha do senhor Ortega, foi infectada após o contato com um rapaz de nome ***Maximilien***.

O velho pousa a mão no peito, como quem tenta conter a raiva:

— Eu não poderia ter mais certeza. Vi aquele sujeito tossindo o tempo todo enquanto esteve aqui. ***Mal ele apareceu, e essa doença começou a se espalhar. Foi aquele francesinho… Ele que começou tudo isso***.

Adicione o Item "***Informações sobre Rosa e Maximilien***" no seu Relatório do Investigador.

(Vá para o bloco 33)

[33]

Você explica ao senhor Ortega que, como ainda não existe um tratamento específico para a doença, o melhor a fazer é manter Rosa em isolamento.

Diz também que qualquer pessoa que teve contato direto com ela sem proteção deve se afastar por um tempo, além de reforçar a importância da alimentação e da hidratação. Ortega escuta com atenção e logo responde:

— Muito obrigado. Me desculpem pelo incômodo. Farei tudo como disseram.

Após orientar o senhor Ortega sobre os cuidados com Rosa, você se despede e sai do quarto com passos calmos, sentindo o peso do que descobriu.

Ao entrar em seu quarto, a luz suave do abajur ilumina as paredes vermelhas e os móveis simples de madeira. O corpo pede por descanso. Deita-se na cama, olhando por instantes para o teto antes de fechar os olhos.

Caso você não utilizou o Item "***Equipamento de proteção contra contaminação***" ao consultar Rosa (Perca 5 pontos de saúde).

(Vá para o Bloco 34)

[34]

Na manhã seguinte, a luz do sol atravessa as cortinas do quarto, aquecendo suavemente o ambiente. Você desperta com a mente mais clara e o corpo revigorado — o breve descanso foi suficiente para renovar suas forças.

- Seguir para o Hospital Santa Catalina **(Vá para o Bloco 35)**
- Caso já tenha investigado o Hospital **(Vá para o Bloco 65)**

HOSPITAL SANTA CATALINA

[35]

Após uma caminhada de cerca de um quilômetro pelas ruas da cidade, você finalmente avista o Hospital Santa Catalina.

Os portões estão abertos, sem nenhum guarda ou funcionário por perto.

A construção, feita em parte com as pedras de Girona — típicas da região —, destaca-se pelos detalhes em porcelanato amarelo, especialmente a partir do segundo andar, dando ao local um aspecto elegante e acolhedor.

Próximo à entrada principal, uma jovem de cabelos loiros e curtos chama a atenção. Ela usa um uniforme de enfermeira impecável e segura uma prancheta com a mão direita, escrevendo com agilidade com a mão esquerda.

Mesmo com a expressão calma e um leve sorriso no rosto, seus olhos permanecem fixos nas anotações, sem dar muita atenção ao redor.

— Olá, no que posso ajudar? — pergunta a enfermeira;

— Preciso informar que nossa capacidade de atendimento está limitada.

Usar o Item "***Permissão do Prefeito***" para de identificar **(Vá para o bloco 36)**

[36]

Você retira de dentro da bolsa a carta com o selo da prefeitura e a entrega à jovem enfermeira. Ela pausa por um instante, encara o documento e, ao reconhecer o brasão, sua postura muda sutilmente.

— Ah, entendo... vieram a mando do prefeito, me acompanhem.

A enfermeira se vira e começa a guiá-los pelos corredores do hospital.

— Me chamo Patrícia. Fico à disposição.

Com isso ela coloca sua máscara e adentra ao hospital.

- Gastar o Item "equipamento de proteção contra contaminação" **(Vá para o bloco 37)**
- Pedir um "equipamento de proteção contra contaminação" a enfermeira **(Vá para o bloco 38)**

[37]

A jovem enfermeira os guia para dentro do hospital, sem trocar palavras com os pacientes que gemem ao redor, ela segue confiante e durante o trajeto, sua postura chama atenção: indiferente aos doentes que sofrem nos corredores, ela segue ajeitando os cabelos com os dedos e trocando olhares insinuantes com outros funcionários.

Mudando de direção, a moça conduz o grupo por outro corredor. Ali, três enfermeiras e um médico atendem pacientes deitados fora dos quartos, sobre leitos improvisados.

O médico, de costas, preenche prontuários em uma prancheta. É um homem baixo, careca, por volta dos 50 anos, com um cavanhaque branco e barriga proeminente. Ele observa a enfermeira e pergunta:

— Senhorita Patrícia, terminou suas tarefas?

Ela reponde:

— Ainda não, doutor. Estes senhores têm assuntos a tratar com o hospital, então os trouxe até o senhor. Com licença.

A enfermeira se despede com um aceno e o médico se vira lentamente para o grupo e ajusta a máscara sobre o rosto:

— Por favor, sejam breves. Quem são os senhores e o que desejam?

Você informa que está a serviço do prefeito da cidade, trazendo dados importantes sobre o avanço da nova doença.

Ao ouvir isso, o médico se mostra mais atento, ajeita os óculos sobre o nariz e diz com um leve aceno:

— Muito bem, senhores. Sou o Dr. Perez, responsável por esta ala do hospital. Acompanhem-me até minha sala, acredito que precisamos discutir.

(Vá para o bloco 39)

[38]

Ao perceber que está prestes a adentrar uma ala com risco de contaminação, você leva a mão à bolsa instintivamente, mas logo se dá conta: Você não tem mais seu equipamento de proteção.

Com a situação exigindo cautela, você se aproxima da enfermeira Patrícia. E pergunta a ela se há algum disponível no hospital.

— Estamos com falta de equipamentos, infelizmente… — responde a enfermeira em tom preocupado, mas logo acrescenta, enquanto olha em direção a uma sala ao lado

— Espere aqui. Talvez eu consiga algo para você.

(Dificuldade: 4)

Sucesso: Ela o entrega um "equipamento de proteção contra contaminação".

Falha: Não há equipamentos disponíveis, terá que prosseguir sem proteção.

(Volte para o bloco 37)

[39]

Enquanto seguem pelo corredor em direção à sala do doutor, você passa diante de uma grande janela de vidro, parcialmente transparente, que dá vista para a zona de quarentena, um setor isolado do hospital.

Através dela, é possível ver o ambiente superlotado, com mais de 80 pacientes em leitos improvisados, distribuídos por todo o espaço.

O olhar dos pacientes transmite angústia, e a cena deixa claro que o lugar já ultrapassou sua capacidade há muito tempo. O médico reduz o passo, observa a cena por alguns segundos e comenta em tom baixo:

— Essa é uma situação deplorável... me envergonha não poder fazer nada. Santiago, mesmo com todo seu talento, nada pôde fazer além de manter os doentes em isolamento. Creio que ele percebeu que não havia mais o que fazer por essas pessoas... e decidiu pedir ajuda externa enquanto concentra seus esforços nos hospitais de campanha. Partiu há quatro dias.

- Caso você possui o item "***Informações sobre Rosa e Maximilien***" **(Vá para o bloco 40)**
- Senão **(Vá para o bloco 41)**

[40]

Após o comentário sobre Santiago, o doutor começa a explicar:

— Ainda não sabemos o nome exato da doença. Os sintomas surgem de forma repentina: febre acima de 39°C, dores musculares e nas articulações, cefaleia intensa, tosse seca persistente, espirros e, nos casos mais graves, sangramentos nas vias respiratórias, como nariz e boca. Em alguns pacientes, nota-se também dificuldade para respirar, olhos avermelhados e uma fadiga que os impede de se levantar da cama...

Nesse momento, o médico é interrompido por sua memória. Lembra-se do caso da jovem Rosa, que apresentava exatamente os mesmos sinais: febre elevada, tosse com sangue, dores fortes e cansaço extremo.

O caso da garota também envolvia um visitante recente, o que poderia indicar uma origem clara para o contágio.

O doutor para por um instante, observando com atenção:

— Interessante… você tem um olhar atento. Vai ser de grande ajuda por aqui. Precisamos de gente assim.

(Vá para o bloco 42)

[41]

Após o comentário sobre Santiago, o doutor retoma o passo e, enquanto caminha, começa a explicar com seriedade:

— Ainda não sabemos o nome exato da doença. Os sintomas surgem de forma repentina: febre acima de 39°C, dores musculares e nas articulações, cefaleia intensa, tosse seca persistente, espirros e, nos casos mais graves, sangramentos nas vias respiratórias, como nariz e boca. Você ouve com atenção a informação dada pelo médico, e continua o trajeto até a sua sala.

(Vá para o bloco 42)

[42]

Ao chegarem à sala, o doutor destranca a porta e a empurra com certa pressa. O ambiente é simples, com pilhas de prontuários sobre a mesa e um mapa da cidade afixado à parede.

Dr. Perez, ele observa os quadros e a expressão matemática que você produziu em conjunto com o prefeito. Ao analisá-los com atenção, sua expressão muda, tornando-se mais séria.

— Estes números confirmam o que já suspeitávamos… a situação está se agravando rapidamente.

O médico então reforça mais uma vez que quem poderá fazer um uso ainda mais estratégico dessas informações é o Dr. Santiago, ele conclui:

— ***Santiago entenderá o valor disso tudo e saberá o que fazer. Encontre-o, por favor***. Pelo que eu soube ele está em um hospital de campanha a leste da cidade.

— Contudo, há uma situação aqui no hospital que requer atenção imediata. Preciso da sua ajuda agora. É algo que não posso ignorar, e, francamente, não há ninguém além de vocês disponíveis no momento.

(Vá para o bloco 43)

[43]

— A situação aqui está fora de controle — diz o doutor, com o olhar cansado. — ***O hospital foi projetado para comportar um máximo de 512 até leitos, mas com o avanço da doença, esse número está diminuindo pela metade a cada dia***.

— Você concorda comigo, não é? — indaga o médico, ajustando os óculos no rosto. — ***Se começamos com 512 leitos e perdemos metade a cada dia, então me diga… quantos leitos temos no final do primeiro dia? E no segundo? E no terceiro***?

- 256, 128 e 64, respectivamente. **(Vá para o bloco 44)**
- 512, 1024, 2048, respectivamente. **(Vá para o bloco 45)**

[44]

— Exatamente, isso mostra o estado preocupante que estamos enfrentando aqui no hospital. A cada dia conseguimos suportar menos pacientes — diz o doutor, tirando um lenço do bolso para enxugar a testa.

Ele caminha até sua mesa, abre uma gaveta e retira um papel timbrado com o selo do hospital.

(Vá para o bloco 46)

[45]

O Dr. franze o cenho e cruza os braços, demonstrando certa desconfiança.

— Hm... creio que está se equivocando — diz ele, com tom mais sério. — Não estamos lidando com um aumento... observe: a cada dia o número de leitos é cortado pela metade.

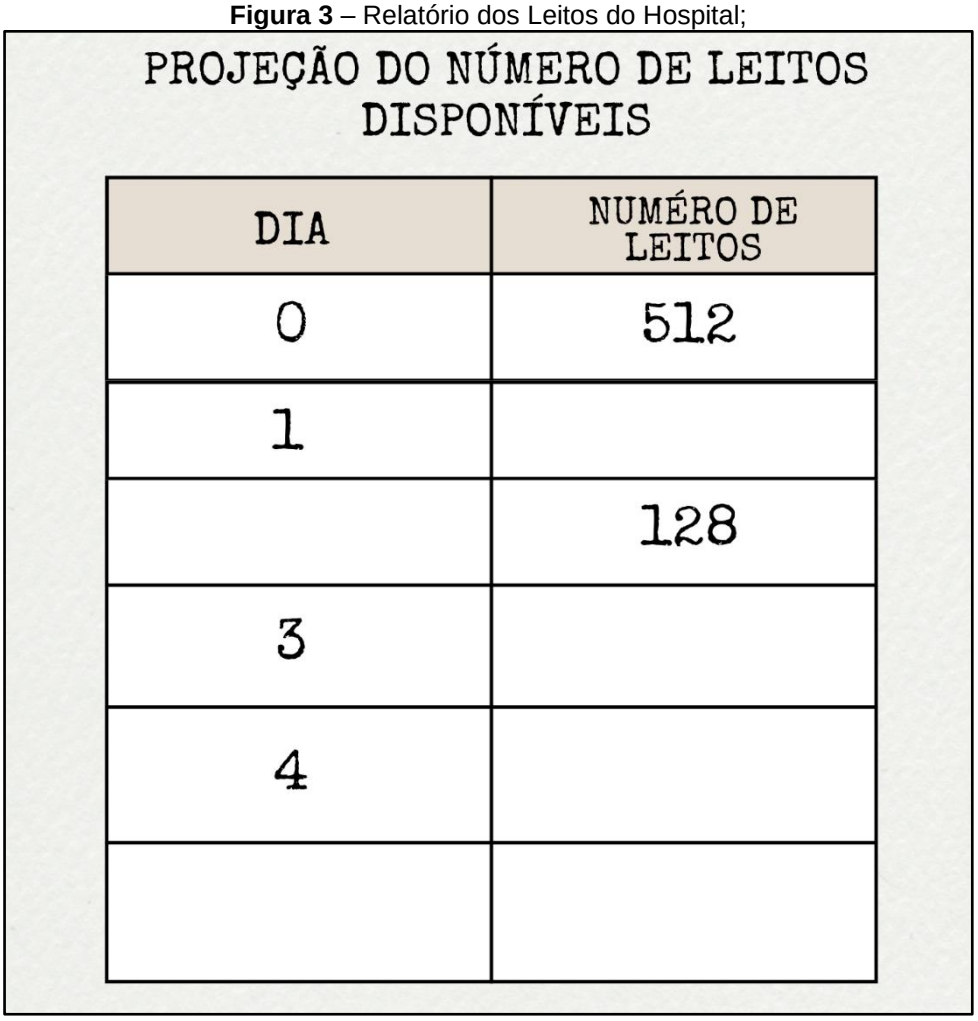
O Dr. Perez estende a mão até a borda da mesa e puxa um documento: — Este é o formulário oficial que pretendo encaminhar ao prefeito. Preciso de ajuda para preenchê-lo com a projeção correta. Talvez, ao fazê-lo junto a mim, você compreenda melhor a situação crítica que enfrentamos.

(Vá para o bloco 46)

[46]

— Eu gostaria de solicitar ao prefeito que apenas os casos mais graves permanecessem internados, mas para isso preciso de um documento que mostre a ele uma projeção clara da redução no número de leitos a cada dia. Poderia me ajudar com isso?

Figura 3 – Relatório dos Leitos do Hospital;



PROJEÇÃO DO NÚMERO DE LEITOS DISPONÍVEIS

DIA	NUMÉRO DE LEITOS
0	512
1	
	128
3	
4	

(Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 47)

[47]

Com o documento preenchido, o Dr. Perez observa atentamente os números anotados e, após alguns segundos de silêncio, ergue o olhar:

— Agora precisamos de algo mais preciso... Uma expressão matemática que represente essa progressão. Se conseguirmos desenvolver essa expressão, poderemos anexá-la ao documento e reforçar a gravidade da situação.

— Veja… na situação da propagação da doença, observamos uma multiplicação sucessiva — os casos aumentavam vezes três a cada intervalo. ***Mas agora, com os leitos, temos o contrário: uma divisão sucessiva por 2.***

Ele faz uma pausa, ajustando os óculos.

— Me diga, seria possível representar essa divisão por 2 de outra forma, talvez como uma multiplicação? Afinal, dividir por 2 repetidamente também parece seguir um padrão...

— ***Se no primeiro dia temos metade dos 512 leitos, como podemos escrever isso como uma multiplicação de dois números?***

- $512 \cdot 2$ **(Vá para o bloco 48)**

- $512 \cdot \frac{1}{2}$ **(Vá para o bloco 49)**

[48]

— Não, meu caro — o Dr. Perez responde com firmeza, mas sem perder a paciência —, lembre-se de que não se trata de um aumento de leitos. Muito pelo contrário. A cada dia, mais enfermos chegam ao hospital, e os recursos se esgotam. É natural que o número de leitos diminua, não aumente.

— Teste e verifique qual fração, torna o 512 para sua metade que é 256.

(Vá para o bloco 50)

[49]

— Exatamente meu amigo, — diz ele, animado —, se no primeiro dia temos 512 leitos, e no segundo dia esse número é dividido por 2, podemos pensar que estamos multiplicando 512 por um fator que represente essa metade, neste caso $\frac{1}{2}$.

Então, o Dr. continua:

— E se seguirmos, a cada novo dia, multiplicamos o valor anterior por $\frac{1}{2}$

(Vá para o bloco 50)

[50]

O Dr. Perez pega novamente o quadro de projeção que haviam começado juntos. Com um gesto rápido, traça uma nova coluna à direita e diz:

— Vamos fazer como combinamos. Já que você entendeu como representar a diminuição com multiplicação, vamos organizar isso aqui.

Figura 4 – Relatório dos Leitos do Hospital 2;

HOSPITAL SANTA CATALINA

DIA	NUMÉRO DE LEITOS	NUMÉRO DE LEITOS COMO UM PRODUTO POR 512
0	512	512.1
1	256	512.
		512.
		512.
		512.
		512.

(Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 51)

[51]

O Dr. Perez aponta para a última coluna preenchida e comenta:

— Agora que temos o quadro completo, veja com atenção... ***Você consegue perceber a relação entre o número do dia e a quantidade de vezes que multiplicamos por meio?***

Ele espera a resposta, observando você.

(Anote sua percepção no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 52)

[52]

O Dr. Perez, agora visivelmente mais animado, comenta com um leve sorriso no rosto:

— Isso mesmo, acredito que agora podemos entender o comportamento do número de leitos em relação aos dias. Veja, meu caro, aquilo que você utilizou antes... como se chama mesmo? Ah, ***Potenciação***!

Ele pega um novo papel e começa a rascunhar com a caneta, dizendo:

— Vamos chamar o número de leitos por L, e os dias que se passam por d. Como a quantidade de leitos está sendo multiplicada por $\frac{1}{2}$ ***a cada dia, vamos desenvolver uma expressão usando isso.***

(Desenvolva a Expressão no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 53)

[53]

O Dr. Perez aponta para a expressão que acabaram de montar e diz, pensativo:

— ***Então estamos no 5º dia... segundo nossa expressão, temos um total de quantos leitos, meu caro?***

Ele cruza os braços, aguardando atentamente a resposta do jogador com um olhar avaliativo.

(Registre o resultado, no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 54)

[54]

O Dr. Perez respira fundo ao olhar para os quadros preenchidos e a expressão matemática que produziram juntos e diz:

— Agradeço imensamente por toda a sua ajuda. Com esses dados que acabamos de organizar, acredito que finalmente conseguirei convencer o prefeito a liberar o hospital apenas para os casos mais graves. Isso pode nos dar algum fôlego para lidar com a situação.

Ele faz uma breve pausa, ajusta os papéis sobre a mesa e prossegue com firmeza:

— Enquanto eu me encarrego disso, você precisa encontrar o Dr. Santiago. Só com ele será possível tomar as medidas necessárias para conter essa contaminação antes que a cidade entre em colapso. O olhar do médico é sério, mas carregado de esperança.

(Vá para o bloco 55)

A PROCURA DE SANTIAGO

[55]

Ao sair da sala de Dr. Perez, você mal tem tempo de reagir antes que um jovem de aparência séria se aproxima discretamente, ele segura o seu braço, meio hesitante, ele fala com você em tom de segredo:

— Com licença, peço desculpa pela interrupção e por ter ouvido a conversa de vocês... O rapaz se apresenta como Juan, assistente do Dr. Santiago.

Ele prossegue dizendo que sua namorada, Clara, o informou sobre sua missão na cidade. Juan compartilha da desconfiança de Díaz: ***confirma que o paciente zero veio de fora do país e revela que há pessoas trabalhando ativamente para facilitar a propagação da doença.***

— Trabalho aqui há três anos, e nunca vi médicos ou enfermeiros virarem as costas para quem precisa...mas a novata, Patrícia, não é como os outros. Já a vi recusar atendimento a pacientes com sintomas sérios.

— Ela chegou há menos de seis meses, por indicação misteriosa. ***Ela costuma escrever num diário durante o expediente***... tenho certeza de que ela esconde algo.

Juan olha ao redor, garantindo que ninguém os ouça, e finaliza:

— Se vocês realmente quiserem ajudar, talvez esse diário possa revelar mais do que as aparências deixam ver.

Nesse momento, Dr. Perez aparece ao fim do corredor e chama por Juan com certa urgência:

— Juan, preciso de você aqui com o paciente do leito 27, agora!

O jovem hesita por um instante, encara o personagem como se quisesse dizer mais, mas apenas assente com a cabeça:

— Vou precisar ir... mas cuidado com quem confiam.

- Investigar a enfermeira **(Vá para o bloco 56)**
- Ir à procura de Santiago de forma imediata **(Vá para o bloco 64)**

[56]

Você caminha pelos corredores do hospital, até que você chega no que parece ser uma sala de descanso dos funcionários. Lá pela fresta da porta entreaberta você avista Patrícia.

Ela está sentada no sofá, curvada sobre um pequeno caderno escuro, escrevendo com pressa e concentração.

De repente, a porta se abre por completo — um homem entra sorrindo, cumprimenta Patrícia e a surpreende. Ela esconde o caderno num movimento

brusco, enfiando-o na bolsa ao seu lado. Depois, disfarça com um sorriso e inicia uma conversa leve com o recém-chegado. Eles trocam palavras rápidas e risos — e você percebe: estão prestes a sair juntos da sala.

É agora. A escolha está em suas mãos:

- Entrar na sala e confronta Patrícia imediatamente **(Vá para o bloco 57)**
- Ou espera que ambos saiam, na tentativa de pegar o diário discretamente **(Vá para o bloco 58)**

[57]

Você dá passos firmes à frente e empurra a porta da sala de descanso.

Patrícia, ainda sorrindo, se vira surpresa ao vê-lo entrar. Seu olhar se estreita imediatamente. Você diz que sabe que ela está escondendo algo. E pede que ela o entregue.

O sorriso dela se desfaz, mas antes que possa responder, o enfermeiro ao lado se coloca entre vocês, erguendo a mão como se quisesse barrar sua aproximação.

— Ei! Você não tem autoridade para fazer isso — diz em tom ríspido, os olhos faiscando indignação. — Aqui é um hospital!

No mesmo instante, seus dois seguranças, atentos à movimentação e à sua expressão, entram na sala atrás de você. Com um gesto eles se posicionam à sua frente, o corpo entre você e o enfermeiro.

A tensão se instala no ar.

(Dificuldade: 3)

- Sucesso: **(Vá para o bloco 59)**
- Falha: **(Vá para o bloco 62)**

[58]

Você observa atentamente o corredor enquanto Patrícia e o enfermeiro conversam de maneira descontraída.

Ela larga a bolsa sobre uma das cadeiras da sala de descanso e se levanta junto ao colega. Ao que tudo indica, pretendem sair juntos.

Assim que Patrícia e o outro enfermeiro saem da sala, rindo e conversando casualmente, você age.

Avança com passos contidos e silenciosos até a porta entreaberta. Espia rapidamente o interior. A sala está vazia, tranquila, iluminada por uma luz suave que atravessa as persianas. A bolsa repousa sozinha sobre uma cadeira.

(Dificuldade: 4)

- Sucesso: **(Vá para o bloco 60)**
- Falha: **(Vá para o bloco 61)**

[59]

Patrícia observa os seguranças à sua frente e o silêncio absoluto que domina o corredor. Percebe que não há saída daquela situação. Seu semblante tenso se transforma em um sorriso forçado.

— Está bem… — ela diz em voz baixa, evitando encarar o enfermeiro ao lado. Com movimentos lentos, retira o pequeno caderno de sua bolsa. O

Ela estende o diário em sua direção, os dedos hesitando por um breve instante antes de soltá-lo.

— Espero que saiba o que está fazendo...

Ela dá um passo atrás, visivelmente abalada, e sai da sala em silêncio, acompanhada pelo outro enfermeiro que agora evita qualquer olhar. Em suas mãos, o diário — talvez a chave para os segredos por trás daquela enfermaria.

(Vá para o bloco 63)

[60]

Com movimentos rápidos, mas silenciosos, você vasculha o interior da bolsa. Entre itens pessoais e papéis amassados, encontra o que buscava: um caderninho de capa escura, com páginas escritas à mão. O diário.

Você o esconde sob o manto de sua roupa, fecha a bolsa da forma mais parecida possível com a original e sai discretamente, fechando a porta atrás de si. Os seguranças observam à distância e você sinaliza que está tudo certo.

Agora, com o diário em mãos, é hora de descobrir o que, afinal, Patrícia tem a esconder.

(Vá para o bloco 63)

[61]

Entra com cuidado, evitando chamar atenção. O ambiente está silencioso, você se aproxima da bolsa, estende a mão…

— Ei! — uma voz feminina grita da porta.

— Alguém ajude! Estão mexendo nas coisas da Patrícia!

O pânico se espalha no corredor. Seus próprios seguranças já estão em posição, um deles grita:

— Vamos, senhor, agora!

Você sai da sala correndo, mãos vazias, com o coração martelando no peito. A confusão no corredor lhe dá tempo para escapar pelos fundos do hospital, cruzando uma saída de emergência.

Agora do lado de fora, entre os becos ao redor do prédio, você recupera o fôlego. O diário continua com Patrícia, mas a certeza permanece: você precisa encontrar o Dr. Santiago.

(Vá para o bloco 64)

[62]

O clima já é tenso quando Patrícia percebe que não há como escapar apenas com palavras. Seus olhos encontram os do enfermeiro ao lado e, em um sutil aceno, ela dá o sinal.

De forma repentina, o homem empurra um dos seus seguranças com força, e a confusão se instala na sala. Cadeiras tombam, uma bandeja metálica cai ao chão com estrondo. Pessoas do corredor se aglomeram na porta, tentando entender o que está acontecendo.

— Ela está fugindo! — grita um dos seus guardas, tentando ultrapassar o enfermeiro em meio ao tumulto.

Mas já é tarde. Você a perdeu de vista em meio ao hospital cheio de pacientes. Mas agora, mais do que nunca, você tem certeza: ela estava escondendo algo.

Agora só lhe resta procurar Santiago.

(Vá para o bloco 64)

[63]

O pequeno caderno revela algo mais complexo do que um simples diário. Escrito em francês, contém relatórios detalhados que denunciam uma série de ações suspeitas: negligência médica deliberada, ***registros da entrada clandestina de um homem identificado como Adam***, ***supostamente o portador inicial da doença***.

Sobretudo, a revelação de que Patrícia é, na verdade, Emmanuelle Meurer, uma agente do governo francês incumbida de espalhar o contágio na cidade.

Qualquer pessoa, ao ler aquilo, acreditaria sem hesitar que a doença foi uma arma usada por interesses estrangeiros.

Mas algo não parece certo. Você, um investigador experiente, estranha a facilidade com que esse material foi deixado para trás. Um agente treinado deixaria suas anotações comprometedoras largadas em uma sala comum? Não.

É como se quisessem que esse caderno fosse encontrado. Como se quisessem fabricar um culpado. Felizmente, foi você quem encontrou o caderno. Se caísse nas mãos erradas, a culpa certamente recairia sobre os franceses, alimentando acusações diplomáticas e conflitos internacionais.

Adicione o Item "***Diário de Patrícia***" no seu Relatório do Investigador.

Ao sair do hospital, você observa ao redor: pessoas com máscaras improvisadas, olhares desconfiados e ruas cada vez mais silenciosas. Há uma tensão no ar difícil de ignorar. A situação do contágio é mais séria do que imaginava.

No entanto, apesar da preocupação crescente, uma certeza o acompanha: você está mais próximo de desvendar essa trama. Resta agora encontrar Santiago — talvez ele tenha as peças que faltam para completar esse quebra-cabeça.

Caso você esteve no hospital sem o Item "***Equipamento de proteção contra contaminação***" **(Perca 6 pontos de saúde)**

- Caso você descansou no Hotel anteriormente **(Vá para o bloco 65)**
- Senão **(Vá para o bloco 64).**

[64]

O peso da descoberta ainda pulsa em sua mente. O caderno de Patrícia, as anotações comprometedoras, a cidade está à beira do colapso, o contágio avança sem controle, tudo isso indica que cada minuto pode ser crucial.

Mas seu corpo protesta. Desde a chegada a esta cidade você não descansou um instante. Foi direto ao hospital, enfrentou corredores sombrios, médicos tensos e revelações perturbadoras. Agora, os músculos doem, os olhos pesam e até a clareza de raciocínio começa a se apagar. Um investigador exausto é um investigador vulnerável.

Você respira fundo. Sabe que a urgência exige ação imediata, mas também reconhece que um breve descanso pode ser a diferença entre agir com precisão ou cometer erros fatais.

- Seguir em busca de Santiago **(Perca 3 pontos de saúde e Vá para o Bloco 65)**
- Ir ao hotel descansar e recuperar as forças **(Vá para o Bloco 24)**

DR. SANTIAGO

[65]

Você e seus seguranças seguem pela trilha de terra batida que leva à saída leste da cidade.

Após algumas horas você observa barracas verdes que dominam a paisagem como um campo de batalha recém-erguido, alinhadas de maneira meticulosa, mas sempre em expansão, como se o avanço da doença as obrigasse a crescer a cada dia.

Você adentra com passo firme, seus seguranças logo atrás. Lá dentro, o ar é mais abafado e o cheiro de álcool, suor e medicamentos é forte.

Um homem imponente vira-se brevemente, encarando você com um olhar analítico, quase indiferente. Cabelos escuros ondulados caem até os ombros e sua presença se impõe mesmo em silêncio. A barba espetada contrasta com o jaleco branco que ostenta detalhes verdes, remetendo à organização daquele posto avançado de resistência médica.

O homem ergue uma sobrancelha, sem alterar muito a expressão séria, e pergunta com um tom direto, mas sem agressividade:

— Posso ser útil?

Você se apresenta de forma firme, revelando sua posição como investigador enviado pela Coroa Espanhola para auxiliar na contenção da crise e descobrir a verdade por trás da epidemia.

Ao ouvir isso, o homem cruza os braços e responde:

— Fico feliz em saber que a Coroa os mandou para resolver a situação. O que informações você coletou até o momento?

Você abre sua pasta e mostra os documentos que trouxe do hospital central — os quadros com os números de leitos, as projeções e a expressão matemática construída em conjunto com o prefeito.

(Vá para o bloco 66)

[66]

Santiago observa tudo com atenção, inclina a cabeça, e seus olhos ganham um brilho de surpresa.

— Isso é impressionante… uma abordagem clara e organizada. Com certeza, isso pode ajudar bastante — comenta, enquanto folheia os papéis.

Guardando os documentos, ele se recosta levemente sobre uma mesa repleta de prontuários e mapas da região. Então, começa a falar

— ***Estamos, oficialmente, na quarta semana de contágio. Mas os primeiros casos... surgiram há 33 dias***.

Ele faz uma breve pausa e cruza os braços, encarando o chão por um instante antes de continuar: — ***A cada semana, o número de infectados triplica***. E não é uma suposição... é o que temos visto na prática.

— E pelas minhas investigações aqui no hospital de campanha e com os registros que consegui recuperar... ***o primeiro infectado foi um soldado chamado Adam***. Francês. Chegou à cidade de forma clandestina, há pouco mais de um mês.

— Ele faleceu há cerca de dez dias. O corpo já estava em estado crítico quando conseguimos atendimento. Nenhum tratamento surtiu efeito.

Santiago solta um suspiro pesado, então aponta para os números no quadro mais uma vez:

— Com base na progressão que você demonstrou e nos dados que coletamos aqui, acredito que podemos, enfim, fazer uma estimativa mais precisa da situação. Se o contágio de fato triplica a cada semana, e se Adam foi o paciente zero... então temos um ponto de partida. Podemos trabalhar juntos para prever a extensão do surto nas próximas semanas.

Ele o encara por um instante, firme e determinado: — ***Essa pode ser a chave para convencer o alto escalão a tomar decisões mais drásticas... e talvez salvar muitas vidas.***

- Se você tiver o Item "***Informações sobre Rosa e Maximilien***" **(Vá para o bloco 67)**
- Senão **(Vá para o bloco 68)**

[67]

Ao ouvir o nome ***Adam***, algo desperta na sua memória. A conversa que você teve com Ortega e Rosa, ditas dias atrás no hotel, voltam com nitidez, e lhe levantam um questionamento: ***"O homem que trouxe a doença não se chamava Maximilien? Um também Francês..."***

Você franze a testa, encara Santiago e compartilha a lembrança. Explica que, segundo os relatos, outro francês — ***Maximilien*** — também teria chegado à cidade com sintomas e, supostamente, espalhado a doença.

Santiago o escuta atentamente, a expressão endurecendo a cada palavra. Por um momento, ele permanece em silêncio, então dá um passo para trás, visivelmente surpreso.

— ***Então quer dizer que... não foi apenas uma pessoa que trouxe a infecção para cá... foram duas?*** Santiago caminha de um lado ao outro da tenda, refletindo em voz alta:

— Isso muda tudo. Explicaria por que o contágio avançou tão rápido em regiões distintas da cidade...

(Vá para o bloco 69)

[68]

Ele franze o cenho, como se estivesse tentando antecipar o pior cenário. Com um tom grave, mas controlado, comenta:

— Com base nessas informações, acredito que a situação vai ***se tornar incontrolável no momento em que a doença atingir um quarto da população de Ginona.***

Ele caminha até uma prancheta próxima, puxa um papel e continua:

— ***Pelo último censo, a cidade tem 17.496 habitantes. Precisamos saber em quantas semanas o número de infectados ultrapassará esse limite***.

(Esboce sua resposta no Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 72)

[69]

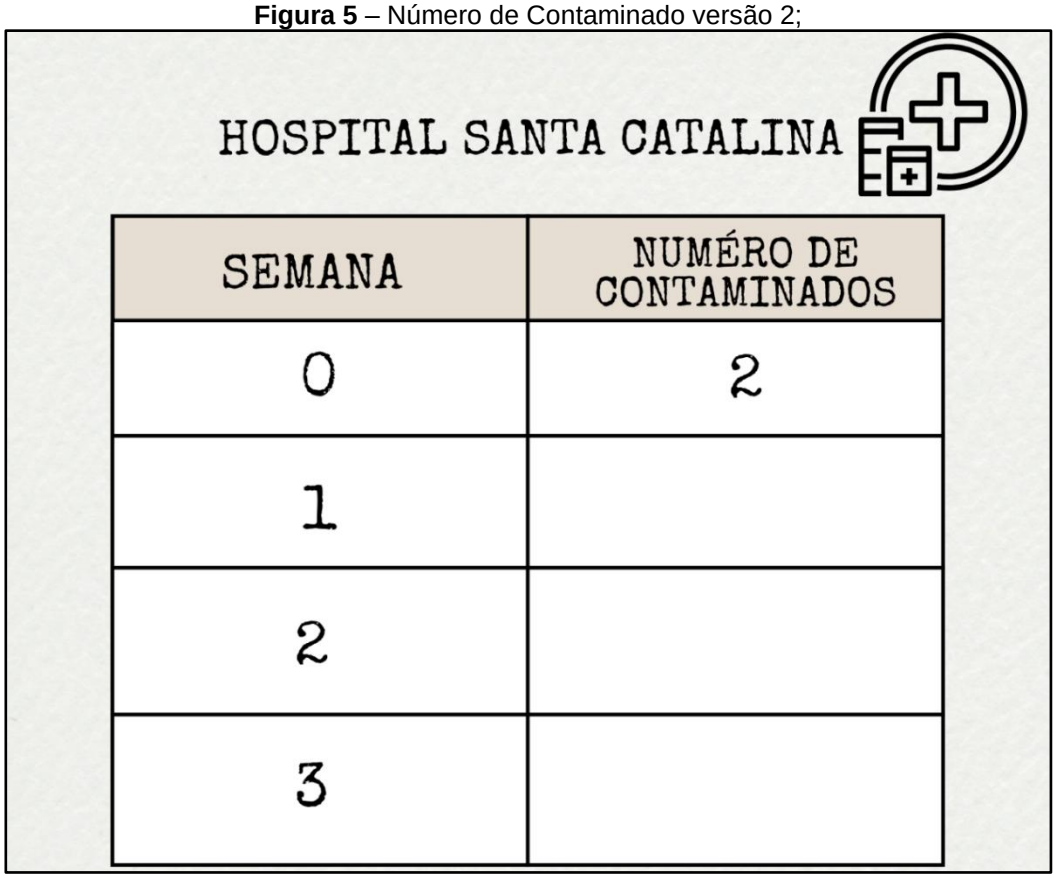
Santiago encara o quadro por um instante, em silêncio, depois franze a testa e se volta a você.

— Com dois infectados iniciais, e considerando que o número de contaminados triplica a cada semana, não teremos apenas três ao fim da primeira semana... mas seis. Isso significa que a situação é ainda mais grave.

Ele se vira, apanha o quadro anterior com os cálculos feitos com base em um único infectado, e apaga os valores cuidadosamente. Em seguida, traça novamente a estrutura da tabela, deixando os espaços em branco.

— Precisamos reformular essa expressão. Vamos refazê-la com base nesse novo dado. Pode me ajudar a preenchê-la?

Figura 5 – Número de Contaminado versão 2;



(Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 70)

[70]

Com o quadro preenchido, Santiago observa os números se multiplicando a cada linha, com os olhos atentos, como se enfim pudesse visualizar com clareza o que antes era apenas uma suspeita.

— Agora temos uma noção concreta da forma como a propagação está ocorrendo — diz ele, com um tom mais grave.

— É essencial que o prefeito compreenda a urgência da situação. Ele se volta a você com firmeza.

— Com base no que desenvolvemos até agora, ***preciso que utilize os conhecimentos que aplicou anteriormente para construir uma nova expressão. Uma que represente de forma fiel a real propagação da doença. Isso será fundamental para decidirmos os próximos passos***.

(Esboce a expressão no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 71)

[71]

Santiago com os olhos fixos no quadro com os números recém-preenchidos. Ele franze o cenho, como se estivesse tentando antecipar o pior cenário. Com um tom grave, mas controlado, comenta:

— ***Com base nessas informações, acredito que a situação vai se tornar incontrolável no momento em que a doença atingir um quarto da população de Ginona.***

Ele caminha até uma prancheta próxima, puxa um papel e continua:

— ***Pelo último censo, a cidade tem 17.496 habitantes. Precisamos saber em quantas semanas o número de infectados chegará a esse limite.***

(Desenvolva no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 72)

[72]

Santiago observa atentamente os dados diante de si, traça mentalmente as semanas e murmura com preocupação contida:

— Agora que temos uma noção de quantas semanas levará para a situação sair de controle, ***precisamos saber quantos dias ainda temos para tentar contê-la.***

Ele se vira para você, direto e objetivo:

— ***Estamos no 33° dia de infecção. Assim, quantos dias ainda temos?***

(Anote no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 73)

[73]

Santiago cruza os braços, olhando fixamente para os números no quadro. Após alguns segundos de silêncio, ele se volta a você com um semblante mais duro:

— Agora que sabemos quantos dias temos, só falta descobrir ***quem é o responsável por trazer essa doença para nosso país***. Ele caminha lentamente pela tenda, como se reunisse as peças de um quebra-cabeça.

— O primeiro infectado que identificamos foi Adam. Francês. E se somarmos isso à proximidade dessa cidade com a fronteira... bem, ***é difícil não concluir que os franceses estejam por trás disso***.

Você reflete sobre as palavras de Santiago. O peso da situação parece se intensificar à medida que as possibilidades se desenrolam em sua mente.

- Concordar com Santiago **(Vá para o bloco 74)**
- Questionar se foram realmente os franceses **(Vá para o bloco 75)**

[74]

Você pensa por um momento, refletindo sobre tudo o que foi dito. A conexão entre a chegada de ***Adam*** e o surto da doença parece inegável.

As evidências se alinham, e as circunstâncias apontam para os franceses como os responsáveis. Concorda com Santiago.

Está bem claro: O governo francês ordenou que Adam, de alguma forma, trouxesse a doença para a cidade.

(Anote o culpado no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 78)

[75]

Você pensa por um momento, algo não se encaixa. As peças ainda não estão completas, e embora a teoria sobre os franceses faça sentido à primeira vista, uma dúvida persiste em sua mente, mas é necessário uma prova concreta.

- Sem provas basta concordar com Santiago **(Volte para o bloco 74)**
- Apresentar o Item "Diário de Patrícia" a Santiago **(Vá para o bloco 76)**

[76]

Você apresenta o diário a Santiago, explicando que, embora os relatos de Patrícia só reforcem a ideia de que os franceses são os culpados, algo não parece certo. Levanta o fato de que isso seria conveniente demais, talvez até demais fácil para ser a verdade.

Santiago fica em silêncio por um momento, seu semblante mudando para algo mais sério e triste. Ele suspira profundamente antes de começar a falar:

— ***A Enfermeira Patrícia foi indicada ao cargo pelo próprio prefeito Díaz***. — Ele faz uma pausa, como se digerisse o peso da informação.

— O prefeito de Girona é espanhol, mas tem ascendência alemã, um segredo que não está documentado e que poucas pessoas sabem. Parte da família dele está na Alemanha e, se bem me lembro, podem ser usados como reféns. Isso me faz pensar... talvez tudo isso não tenha sido coincidência. — Ele dá um longo suspiro e olha fixamente para você.

— Isso poderia ser parte de uma conspiração para envolver a Espanha em um conflito com a França. Se a Espanha estivesse em guerra com a França, a Alemanha, que está ao norte, também começaria a pressionar pelo outro lado. Assim, a França estaria cercada, com suas frentes tanto ao sul quanto ao norte, uma situação insustentável. A doença pode ter sido usada como um catalisador para essa trama.

O peso das palavras de Santiago ressoam no ar.

(Vá para o bloco 77)

[77]

Santiago continua olhando para você com uma expressão grave, como se estivesse compartilhando uma informação crucial:

— o prefeito Díaz e eu somos amigos de infância, ele sempre foi um bom estrategista. — Ele pausa por um momento, refletindo sobre o que vai dizer.

— E além disso, eu me lembro de uma vez que ouvi Patrícia sussurrando algo para Adam, enquanto estavam no hospital. Eu estava perto, e embora eu seja fluentemente espanhol, português, inglês, francês e italiano, porém não entendi nada do que foi sussurrado. ***Por isso, eles devia estar falando alemão na época.***

(Vá para o bloco 78)

CONCLUSÕES

[78]

Você respira fundo, absorvendo as palavras de Santiago, que agora te observa com seriedade.

Como investigador da coroa você é a chave para resolver essa situação. Somente você por meio das as provas que reuniu, pode, no momento certo, mobilizar a coroa ***antes que a doença se torne incontrolável***.

E mais, ***será você quem revelará o verdadeiro culpado por essa tragédia***.

A tensão no ambiente é palpável, e você sente o peso da responsabilidade recair sobre seus ombros. O destino da cidade, talvez até do país, está em suas mãos.

Santiago dá um leve aceno, como se entendesse a magnitude do que lhe foi confiado. E lhe diz:

— ***Agora, o desenrolar do que acontecerá, e a decisão de como tudo se resolverá.***

Agora siga com base nas respostas obtidas e nos seus pontos de vida, da seguinte forma: **(Dias restantes/Culpado/Pontos de vida)**

Resposta:

(23 dias/França/Igual ou menor que zero) (Vá para o bloco 79)

(16 dias/França/Igual ou menor que zero) (Vá para o bloco 80)

(23 dias/Alemanha/Igual ou menor que zero) (Vá para o bloco 81)

(16 dias/Alemanha/Igual ou menor que zero) (Vá para o bloco 82)

(23 dias/França/Maior que zero) (Vá para o bloco 83)

(16 dias/França/Maior que zero) (Vá para o bloco 84)

(23 dias/Alemanha/Maior que zero) (Vá para o bloco 85)

(16 dias/Alemanha/Maior que zero) (Vá para o bloco 86)

[79]

Você se esforçou. Cruzou dados, construiu a expressão matemática que modelava a propagação da doença com base nos relatos e nos documentos obtidos. Mas a doença começou a escapar do controle antes do previsto.

Suas estimativas indicavam que a epidemia se tornaria incontrolável apenas dali a ***23 dias***, mas a realidade se impôs com brutalidade***: uma semana antes do esperado, os casos explodiram em ritmo alarmante.***

O governo agiu, sim — mas às pressas. Tropas de contenção mal treinadas tentavam barrar a fuga de moradores. Médicos adoeciam tão rápido quanto tratavam os outros. Centenas, talvez milhares, sucumbiram. Filas de carroças transportavam corpos pelas trilhas até os cemitérios improvisados.

Você esteve lá, e sua presença evitou que Girona fosse completamente engolida pela epidemia. Ainda assim, a sensação é amarga. Restou apenas o peso de uma pergunta que não cessa de ecoar em sua mente: **Qual caminho ignorei na pressa de avançar?**

Ao chegar na capital você relata diante das autoridades que a origem da doença está nas ações de ***Adam***, um agente francês que teria atravessado clandestinamente a fronteira com o conhecimento e respaldo do próprio governo francês.

O diário encontrado em posse da enfermeira ***Patrícia*** reforça suas palavras com detalhes precisos: datas, movimentações, e até mesmo instruções escritas em francês. Tudo aponta para uma ação orquestrada.

O prefeito Díaz confirma sua acusação e compartilha as informações com as autoridades da Coroa.

A revelação abala os ânimos do Conselho Real. A França já está fragilizada por conflitos internos e externos, e agora se vê às portas de uma possível retaliação diplomática — ou até militar. Você percebe o peso do que acaba de provocar. Talvez tenha evitado uma catástrofe maior, ou talvez tenha acendido o estopim de uma guerra.

E após tudo passar, você observa o desfecho de tudo em casa. As janelas estão fechadas, e a luz do fim de tarde atravessa o vidro, dourando as paredes. A cidade lá fora parece tranquila.

A sensação de dever cumprido está lá, mas misturada a outra, mais amarga.

Você tosse. Levemente no início, depois com força. Quando afasta a mão dos lábios, o sangue se espalha pela palma. A mente corre para os momentos em que poderia ter evitado esse fim: o hospital lotado, o contato próximo com pacientes, os dias sem descanso. Talvez tivesse sido imprudente. Talvez tivesse sido inevitável.

Agora, só resta aguardar. Que o destino seja gentil. Afinal, não há arrependimento — apenas a certeza de que você fez o que era preciso, mesmo que o preço tenha sido sua própria vida.

FIM

[80]

Graças à análise minuciosa que você fez junto ao Dr. Santiago foi possível determinar com precisão o ritmo acelerado da contaminação.

A descoberta de que dois indivíduos foram os portadores iniciais da doença — ***Adam e Maximilien*** — foi decisiva. Isso dobrou a velocidade esperada da propagação, e sem esse ajuste, o tempo teria sido desperdiçado.

Com os números atualizados, você mobilizou a Coroa no momento certo. Médicos e remédios chegaram em grandes quantidades e, embora ainda houvesse sofrimento, o caos foi evitado. A cidade se manteve à beira do abismo — mas não caiu.

Adam, o francês citado nos documentos da enfermeira, foi oficialmente registrado como falecido pela doença. Já Maximilien desapareceu sem deixar rastros.

Ao chegar na capital você relata diante das autoridades que a origem da doença está nas ações de ***Adam***, um agente francês que teria atravessado clandestinamente a fronteira com o conhecimento e respaldo do próprio governo francês.

O diário encontrado em posse da enfermeira ***Patrícia*** reforça suas palavras com detalhes precisos: datas, movimentações, e até mesmo instruções escritas em francês. Tudo aponta para uma ação orquestrada.

O prefeito Díaz confirma sua acusação e compartilha as informações com as autoridades da Coroa.

A revelação abala os ânimos do Conselho Real. A França já está fragilizada por conflitos internos e externos, e agora se vê às portas de uma possível retaliação diplomática — ou até militar. Você percebe o peso do que acaba de provocar. Talvez tenha evitado uma catástrofe maior, ou talvez tenha acendido o estopim de uma guerra.

E após tudo passar, você observa o desfecho de tudo em casa. As janelas estão fechadas, e a luz do fim de tarde atravessa o vidro, dourando as paredes. A cidade lá fora parece tranquila.

A sensação de dever cumprido está lá — mas misturada a outra, mais amarga.

Você tosse. Levemente no início, depois com força. Quando afasta a mão dos lábios, o sangue se espalha pela palma. A mente corre para os momentos em que poderia ter evitado esse fim: o hospital lotado, o contato próximo com pacientes, os dias sem descanso. Talvez tivesse sido imprudente. Talvez tivesse sido inevitável.

Agora, só resta aguardar. Que o destino seja gentil. Afinal, não há arrependimento — apenas a certeza de que você fez o que era preciso, mesmo que o preço tenha sido sua própria vida.

FIM

[81]

Você se esforçou. Cruzou dados, construiu a expressão matemática que modelava a propagação da doença com base nos relatos e nos documentos obtidos. Mas a doença começou a escapar do controle antes do previsto.

Suas estimativas indicavam que a epidemia se tornaria incontrolável apenas ***dali a 23 dias,*** mas a realidade se impôs com brutalidade: ***uma semana antes do esperado, os casos explodiram em ritmo alarmante***.

O governo agiu, sim — mas às pressas. Tropas de contenção mal treinadas tentavam barrar a fuga de moradores. Médicos adoeciam tão rápido quanto tratavam os outros. Centenas, talvez milhares, sucumbiram. Filas de carroças transportavam corpos pelas trilhas até os cemitérios improvisados.

Você esteve lá, e sua presença evitou que Girona fosse completamente engolida pela epidemia. Ainda assim, a sensação é amarga. Restou apenas o peso de uma pergunta que não cessa de ecoar em sua mente: **Qual caminho ignorei na pressa de avançar?**

Quanto aos culpados pelas mortes, você se lembra que junto a Santiago, vocês confrontaram o ***prefeito Díaz*** diretamente dentro da própria prefeitura.

O homem, abatido tanto fisicamente quanto emocionalmente, tenta sustentar o silêncio, mas seus olhos já não escondem a culpa. Ao final, com a voz embargada, ele confessa: ***Patrícia*** era agente do governo alemão, e ele, ameaçado pela segurança de seus familiares ainda na Alemanha, concordou em colaborar com o plano.

A epidemia seria o pretexto para instigar um conflito entre a Espanha e a França. A confissão choca todos os presentes. Em um ato rápido, as forças leais à Coroa prendem Díaz e Patrícia.

Santiago é nomeado governador provisório de Girona, assumindo o controle da cidade em meio ao caos. A notícia chega à Corte espanhola, que agora precisa decidir que medidas serão tomadas contra a Alemanha.

Você observa o desfecho em casa. As janelas estão fechadas, e a luz do fim de tarde atravessa o vidro, dourando as paredes. A cidade lá fora parece tranquila. A missão foi concluída.

A Coroa recebeu suas descobertas, os responsáveis foram identificados, o avanço da doença, contido. A sensação de dever cumprido está lá — mas misturada a outra, mais amarga.

Você tosse. Levemente no início, depois com força. Quando afasta a mão dos lábios, o sangue se espalha pela palma. A mente corre para os momentos em que poderia ter evitado esse fim: o hospital lotado, o contato próximo com pacientes, os dias sem descanso.

Talvez tivesse sido imprudente. Talvez tivesse sido inevitável. Agora, só resta aguardar. Que o destino seja gentil. Afinal, não há arrependimento —

apenas a certeza de que você fez o que era preciso, mesmo que o preço tenha sido sua própria vida.

FIM

[82]

Graças à análise minuciosa que você fez junto ao Dr. Santiago foi possível determinar com precisão o ritmo acelerado da contaminação.

A descoberta de que dois indivíduos foram os portadores iniciais da doença — ***Adam e Maximilien*** — foi decisiva. Isso dobrou a velocidade esperada da propagação, e sem esse ajuste, o tempo teria sido desperdiçado.

Com os números atualizados, você mobilizou a Coroa no momento certo. Médicos e remédios chegaram em grandes quantidades e, embora ainda houvesse sofrimento, o caos foi evitado. A cidade se manteve à beira do abismo — mas não caiu.

Adam, o francês citado nos documentos da enfermeira, foi oficialmente registrado como falecido pela doença. Já Maximilien desapareceu sem deixar rastros.

Quanto aos culpados pelas mortes, você se lembra que junto a Santiago, vocês confrontaram o ***prefeito Díaz*** diretamente dentro da própria prefeitura.

O homem, abatido tanto fisicamente quanto emocionalmente, tenta sustentar o silêncio, mas seus olhos já não escondem a culpa. Ao final, com a voz embargada, ele confessa: **Patrícia** era agente do governo alemão, e ele, ameaçado pela segurança de seus familiares ainda na Alemanha, concordou em colaborar com o plano.

A epidemia seria o pretexto para instigar um conflito entre a Espanha e a França. A confissão choca todos os presentes. Em um ato rápido, as forças leais à Coroa prendem Díaz e Patrícia.

Santiago é nomeado governador provisório de Girona, assumindo o controle da cidade em meio ao caos. A notícia chega à Corte espanhola, que agora precisa decidir que medidas serão tomadas contra a Alemanha.

Você observa o desfecho em casa. As janelas estão fechadas, e a luz do fim de tarde atravessa o vidro, dourando as paredes. A cidade lá fora parece tranquila. A missão foi concluída.

A Coroa recebeu suas descobertas, os responsáveis foram identificados, o avanço da doença, contido. A sensação de dever cumprido está lá — mas misturada a outra, mais amarga.

Você tosse. Levemente no início, depois com força. Quando afasta a mão dos lábios, o sangue se espalha pela palma. A mente corre para os momentos em que poderia ter evitado esse fim: o hospital lotado, o contato próximo com pacientes, os dias sem descanso.

Talvez tivesse sido imprudente. Talvez tivesse sido inevitável. Agora, só resta aguardar. Que o destino seja gentil. Afinal, não há arrependimento —

apenas a certeza de que você fez o que era preciso, mesmo que o preço tenha sido sua própria vida.

FIM

[83]

Você se esforçou. Cruzou dados, construiu a expressão matemática que modelava a propagação da doença com base nos relatos e nos documentos obtidos. Mas a doença começou a escapar do controle antes do previsto.

Suas estimativas indicavam que a epidemia se tornaria incontrolável apenas dali a **23 dias**, mas a realidade se impôs com brutalidade**: uma semana antes do esperado, os casos explodiram em ritmo alarmante.**

O governo agiu, sim — mas às pressas. Tropas de contenção mal treinadas tentavam barrar a fuga de moradores. Médicos adoeciam tão rápido quanto tratavam os outros. Centenas, talvez milhares, sucumbiram. Filas de carroças transportavam corpos pelas trilhas até os cemitérios improvisados.

Você esteve lá, e sua presença evitou que Girona fosse completamente engolida pela epidemia. Ainda assim, a sensação é amarga. Restou apenas o peso de uma pergunta que não cessa de ecoar em sua mente: **Qual caminho ignorei na pressa de avançar?**

Ao chegar na capital você relata diante das autoridades que a origem da doença está nas ações de ***Adam***, um agente francês que teria atravessado clandestinamente a fronteira com o conhecimento e respaldo do próprio governo francês.

O diário encontrado em posse da enfermeira ***Patrícia*** reforça suas palavras com detalhes precisos: datas, movimentações, e até mesmo instruções escritas em francês. Tudo aponta para uma ação orquestrada.

O prefeito Díaz confirma sua acusação e compartilha as informações com as autoridades da Coroa.

A revelação abala os ânimos do Conselho Real. A França já está fragilizada por conflitos internos e externos, e agora se vê às portas de uma possível retaliação diplomática — ou até militar. Você percebe o peso do que acaba de provocar. Talvez tenha evitado uma catástrofe maior, ou talvez tenha acendido o estopim de uma guerra.

Você observa o desfecho de tudo pela janela de um trem, assim como no começo. A locomotiva serpenteia pelos trilhos que cortam os campos ao redor da cidade, agora mais silenciosa.

Os dados foram entregues à Coroa. Os responsáveis, apontados. A epidemia, finalmente contida. Pode não ter sido uma vitória sem perdas, mas foi, sem dúvidas, uma vitória.

Enquanto a paisagem desfila diante dos seus olhos, permite-se um raro momento de alívio. As lembranças se alinham como páginas de um relatório que só você conhece: o primeiro contato com o prefeito Díaz, o hospital, a tensão das decisões urgentes.

Tudo isso agora faz parte de quem você é. Mesmo que algumas perguntas permaneçam, há uma certeza firme em seu peito: você cumpriu o seu dever

FIM

[84]

Graças à análise minuciosa que você fez junto ao Dr. Santiago foi possível determinar com precisão o ritmo acelerado da contaminação.

A descoberta de que dois indivíduos foram os portadores iniciais da doença — ***Adam e Maximilien*** — foi decisiva. Isso dobrou a velocidade esperada da propagação, e sem esse ajuste, o tempo teria sido desperdiçado.

Com os números atualizados, você mobilizou a Coroa no momento certo. Médicos e remédios chegaram em grandes quantidades e, embora ainda houvesse sofrimento, o caos foi evitado. A cidade se manteve à beira do abismo — mas não caiu.

Adam, o francês citado nos documentos da enfermeira, foi oficialmente registrado como falecido pela doença. Já Maximilien desapareceu sem deixar rastros.

Ao chegar na capital você relata diante das autoridades que a origem da doença está nas ações de ***Adam***, um agente francês que teria atravessado clandestinamente a fronteira com o conhecimento e respaldo do próprio governo francês.

O diário encontrado em posse da enfermeira ***Patrícia*** reforça suas palavras com detalhes precisos: datas, movimentações, e até mesmo instruções escritas em francês. Tudo aponta para uma ação orquestrada.

O prefeito Díaz confirma sua acusação e compartilha as informações com as autoridades da Coroa.

A revelação abala os ânimos do Conselho Real. A França já está fragilizada por conflitos internos e externos, e agora se vê às portas de uma possível retaliação diplomática — ou até militar. Você percebe o peso do que acaba de provocar. Talvez tenha evitado uma catástrofe maior, ou talvez tenha acendido o estopim de uma guerra.

Você observa o desfecho de tudo pela janela de um trem, assim como no começo. A locomotiva serpenteia pelos trilhos que cortam os campos ao redor da cidade, agora mais silenciosa.

Os dados foram entregues à Coroa. Os responsáveis, apontados. A epidemia, finalmente contida. Pode não ter sido uma vitória sem perdas, mas foi, sem dúvidas, uma vitória.

Enquanto a paisagem desfila diante dos seus olhos, permite-se um raro momento de alívio. As lembranças se alinham como páginas de um relatório que só você conhece: o primeiro contato com o prefeito Díaz, o hospital, a tensão das decisões urgentes.

Tudo isso agora faz parte de quem você é. Mesmo que algumas perguntas permaneçam, há uma certeza firme em seu peito: você cumpriu o seu dever.

FIM

[85]

Você se esforçou. Cruzou dados, construiu a expressão matemática que modelava a propagação da doença com base nos relatos e nos documentos obtidos. Mas a doença começou a escapar do controle antes do previsto.

Suas estimativas indicavam que a epidemia se tornaria incontrolável apenas dali a ***23 dias***, mas a realidade se impôs com brutalidade: ***uma semana antes do esperado, os casos explodiram em ritmo alarmante.***

O governo agiu, sim — mas às pressas. Tropas de contenção mal treinadas tentavam barrar a fuga de moradores. Médicos adoeciam tão rápido quanto tratavam os outros. Centenas, talvez milhares, sucumbiram. Filas de carroças transportavam corpos pelas trilhas até os cemitérios improvisados.

Você esteve lá, e sua presença evitou que Girona fosse completamente engolida pela epidemia. Ainda assim, a sensação é amarga. Restou apenas o peso de uma pergunta que não cessa de ecoar em sua mente: **Qual caminho ignorei na pressa de avançar?**

Quanto aos culpados pelas mortes, você se lembra que junto a Santiago, vocês confrontaram o ***prefeito Díaz*** diretamente dentro da própria prefeitura.

O homem, abatido tanto fisicamente quanto emocionalmente, tenta sustentar o silêncio, mas seus olhos já não escondem a culpa. Ao final, com a voz embargada, ele confessa: ***Patrícia*** era agente do governo alemão, e ele, ameaçado pela segurança de seus familiares ainda na Alemanha, concordou em colaborar com o plano.

A epidemia seria o pretexto para instigar um conflito entre a Espanha e a França. A confissão choca todos os presentes. Em um ato rápido, as forças leais à Coroa prendem Díaz e Patrícia.

Santiago é nomeado governador provisório de Girona, assumindo o controle da cidade em meio ao caos. A notícia chega à Corte espanhola, que agora precisa decidir que medidas serão tomadas contra a Alemanha.

Você observa o desfecho de tudo pela janela de um trem, assim como no começo. A locomotiva serpenteia pelos trilhos que cortam os campos ao redor da cidade, agora mais silenciosa.

Os dados foram entregues à Coroa. Os responsáveis, apontados. A epidemia, finalmente contida. Pode não ter sido uma vitória sem perdas, mas foi, sem dúvidas, uma vitória.

Enquanto a paisagem desfila diante dos seus olhos, permite-se um raro momento de alívio. As lembranças se alinham como páginas de um relatório que só você conhece: o primeiro contato com o prefeito Díaz, o hospital, a tensão das decisões urgentes.

Tudo isso agora faz parte de quem você é. Mesmo que algumas perguntas permaneçam, há uma certeza firme em seu peito: você cumpriu o seu dever.

FIM

[86]

Graças à análise minuciosa que você fez junto ao Dr. Santiago foi possível determinar com precisão o ritmo acelerado da contaminação.

A descoberta de que dois indivíduos foram os portadores iniciais da doença — ***Adam e Maximilien*** — foi decisiva. Isso dobrou a velocidade esperada da propagação, e sem esse ajuste, o tempo teria sido desperdiçado.

Com os números atualizados, você mobilizou a Coroa no momento certo. Médicos e remédios chegaram em grandes quantidades e, embora ainda houvesse sofrimento, o caos foi evitado. A cidade se manteve à beira do abismo — mas não caiu.

Adam, o francês citado nos documentos da enfermeira, foi oficialmente registrado como falecido pela doença. Já Maximilien desapareceu sem deixar rastros.

Quanto aos culpados pelas mortes, você se lembra que junto a Santiago, vocês confrontaram o ***prefeito Díaz*** diretamente dentro da própria prefeitura.

O homem, abatido tanto fisicamente quanto emocionalmente, tenta sustentar o silêncio, mas seus olhos já não escondem a culpa. Ao final, com a voz embargada, ele confessa: ***Patrícia*** era agente do governo alemão, e ele, ameaçado pela segurança de seus familiares ainda na Alemanha, concordou em colaborar com o plano.

A epidemia seria o pretexto para instigar um conflito entre a Espanha e a França. A confissão choca todos os presentes. Em um ato rápido, as forças leais à Coroa prendem Díaz e Patrícia.

Santiago é nomeado governador provisório de Girona, assumindo o controle da cidade em meio ao caos. A notícia chega à Corte espanhola, que agora precisa decidir que medidas serão tomadas contra a Alemanha.

Você observa o desfecho de tudo pela janela de um trem, assim como no começo. A locomotiva serpenteia pelos trilhos que cortam os campos ao redor da cidade, agora mais silenciosa.

Os dados foram entregues à Coroa. Os responsáveis, apontados. A epidemia, finalmente contida. Pode não ter sido uma vitória sem perdas, mas foi, sem dúvidas, uma vitória.

Enquanto a paisagem desfila diante dos seus olhos, permite-se um raro momento de alívio. As lembranças se alinham como páginas de um relatório que só você conhece: o primeiro contato com o prefeito Díaz, o hospital, a tensão das decisões urgentes.

Tudo isso agora faz parte de quem você é. Mesmo que algumas perguntas permaneçam, há uma certeza firme em seu peito: você cumpriu o seu dever.

FIM

FINAL ALTERNATIVO O PREÇO DA FUGA

[87]

Assim que o trem começou a diminuir a velocidade na próxima parada, você agiu no impulso. Você se levantou rápido, pegou sua maleta e desceu sem dar tempo pros agentes perceberem. Entrou no meio da pequena multidão da estação, virou em uma rua qualquer, trocou o casaco com um ambulante e sumiu.

Coração acelerado, pernas bambas, mas você tinha escapado. Passou os dias seguintes escondido numa pensão esquecida no interior, tentando se convencer de que fez o certo. Que continuar seria loucura. Que aquilo nunca foi sua responsabilidade. Mas aí vieram as manchetes:

"Surto em Girona sai do controle"

"Mortes aumentam em ritmo assustador"

"Governo espanhol culpa a França por sabotagem"

A doença se espalhou. Ninguém soube dizer como começou, ninguém conseguiu conter. Sem investigação, só sobrou desconfiança — e ela virou raiva. Agora o país está em pé de guerra, e o caos que você podia ter ajudado a evitar já tomou conta. Deitado na cama do quarto abafado, você encara o teto e se pergunta:

E se eu tivesse ficado?

FIM?

APÊNDICE C – RELATÓRIO DO INVESTIGADOR

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

RELATÓRIO DO INVESTIGADOR

NOME

ITEMS

PONTOS DE SAÚDE

Trajetória percorrida

1

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

REGISTROS

BLOCO 16:

BLOCO 17:

BLOCO 19:

BLOCO 20/21:

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

REGISTROS

BLOCO 22:

BLOCO 46:

BLOCO 50:

BLOCO 51:

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

REGISTROS

BLOCO 52:

BLOCO 53:

BLOCO 68:

BLOCO 69:

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

REGISTROS

BLOCO 70

BLOCO 71

DIAS RESTANTES:

CULPADO:

NOTAS:

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

REGISTROS SOLICITADOS

RASCUNHOS:

Universidade do Estado do Pará

Centro de Ciências Sociais e Educação

Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo 66113 – 200

Belém-Pa