



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de
Matemática no Nível Fundamental.

Fernando Emmi Corrêa

**Teorema de Pitágoras: uma proposta de
ensino por Sequência Didática**

BELÉM/PA
2026

Fernando Emmi Corrêa

**Teorema de Pitágoras: uma proposta de ensino por
Sequência Didática**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.

Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

BELÉM/PA
2026

***Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará***

C823 Corrêa, Fernando Emmi
 Teorema de Pitágoras: uma proposta de ensino por sequência
 didática / Fernando Emmi Corrêa. — Belém, 2026.
 150 f.

 Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam
 Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática)
 - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Centro de Ciências Sociais
 e Educação (CCSE), 2026.

 1. Ensino de matemática. 2. Relações métricas no triângulo retângulo.
 3. Teorema de Pitágoras. 4. Sequência didática. I. Título.

CDD 22.ed. 510.7

Elaborado por Priscila Melo CRB-2/1345

FERNANDO EMMI CORRÊA

TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO POR SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam.

Data de aprovação: 07/05/2026

Banca examinadora:

 Orientador
Prof. Dr. MIGUEL CHAQUIAM

Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Universidade do Estado do Pará

 Examinador Interno
Prof. Dr. SAUL RODRIGO DA COSTA BARRETO

Doutor em Educação em Ciências e Matemática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

 Examinadora Externa
Prof. Dra. MARIA LÚCIA PESSOA CHAVES ROCHA

Doutora em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte / UFRN
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - IFPA

Belém – PA

2026

Dedico este trabalho a todos aqueles
que gostam da Matemática, bem como
aos que consagram seu tempo e
talentos ao ensino dessa Ciência.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus único e verdadeiro, e a Seu Filho Unigênito, Jesus Cristo, meu Salvador, pela beleza da criação e pelo corpo perfeito e saudável que me concederam;

Aos meus pais, Fernando (in memoriam) e Nazareth (in memoriam), pela educação recebida;

A minha eterna esposa Nelise, pelo amor, dedicação, confiança, apoio e palavras de incentivo diárias. Nem que tivesse uma página inteira de agradecimento dedicada a você seria suficiente para expressar sua importância nessa conquista.

As minhas filhas, Jade e Sophia, que antes mesmo do primeiro suspiro de vida, já iniciaram em mim o processo que me transformou no homem que sou hoje.

A minha neta Rosie, símbolo de amor e da continuidade da promessa de Deus a Abraão.

Aos colegas Damião Meira, Lúcia Rocha e Reginaldo da Silva, pelas palavras de incentivo, por meio dos quais agradeço o Instituto Federal do Pará pela liberação para realizar essa qualificação.

Aos colegas Luciana Santos e Walter Miranda, que compartilharam comigo as agruras dessa caminhada, por meio dos quais eu abraço e agradeço o apoio de todos os demais colegas de turma.

Aos professores Pedro Sá e Acylena Coelho, por compartilharem comigo seus conhecimentos, por meio dos quais eu abraço e agradeço todos os demais professores e servidores do PPGEM/UEPA.

Ao professor Miguel Chaquiam, por ter aceitado ser o meu navegador durante cada fase da pesquisa, me aconselhando, demonstrando paciência, confiança, e por me conduzir com suas orientações em segurança até a conclusão desse trabalho. Agradeço por nossos caminhos terem novamente se cruzado após 34 anos.

A todos aqueles que se dispuserem a ler o resultado do nosso trabalho.

O ensino de Matemática precisa estimular a percepção de regularidades e do estabelecimento de generalizações. Mesmo que essas generalizações não possam ser consolidadas com o rigor Matemático de um especialista, esse processo, que é parte integrante da natureza da própria disciplina, necessita ser estimulado no cotidiano de sala de aula.

Cabral (2017, p. 96).

CORRÊA, Fernando Emmi. **Teorema de Pitágoras**: uma proposta de ensino por Sequência Didática. 2026. 150f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2026.

RESUMO

O ensino de Geometria compõe uma das unidades temáticas presentes na BNCC. Entre os objetos de conhecimento a serem trabalhados está o ensino das relações métricas no triângulo retângulo, em especial do teorema de Pitágoras. Em que pese sua aplicação estar presente em diversas áreas, nosso sentimento é de que os alunos continuam chegando ao 1º ano do Ensino Médio sem ter estudado, ou com baixa aprendizagem sobre esse importante tema, haja vista as dificuldades observadas quando do estudo sobre a relação fundamental da trigonometria ou do cálculo da distância entre dois pontos. Essa percepção é reforçada pelos baixos resultados em exames de larga escala. O resultado do Saeb 2021 revelou aumento do número de estudantes nos níveis mais baixos da escala de proficiência em Matemática se comparados a edição do Saeb (2019), e a pontuação média dos estudantes brasileiros no Pisa (2022) foi inferior a de países vizinhos como Chile, Uruguai e Peru. Diante deste cenário, a presente pesquisa teve a intensão de responder a seguinte questão norteadora: que potencialidades apresentam uma sequência didática, estruturada segundo as Unidades Articulas de Reconstrução Conceitual, em relação à aprendizagem do teorema de Pitágoras? Definimos como objetivo geral investigar as potencialidades do uso de uma sequência didática para o ensino do teorema de Pitágoras, aplicada junto a um grupo de alunos do 9º ano da rede pública de Ensino Fundamental. A Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1986), a concepção de Sequência Didática de Zabala (1998), Oliveira (2013), Cardoso (2024) e a Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC) proposto por Cabral (2017) foram os aportes teóricos e metodológicos que nortearam este estudo, o qual pode ser caracterizado como aplicado quanto a sua natureza, qualitativo quanto a sua abordagem, exploratório quanto aos objetivos e bibliográfico quanto aos procedimentos. A revisão da literatura, os resultados da pesquisa de campo sobre o ensino do teorema de Pitágoras e a análise de livros didáticos subsidiaram a construção da sequência didática proposta. Além disso, o estudo aprofundado das diferentes formas de demonstrar esse teorema permitiu a organização do Produto Educacional vinculado a essa dissertação, o qual ficará disponível para consulta na página do PPGEM/UEPA e no Portal eduCAPES, e poderá ser acessado clicando [aqui](#) ou [aqui](#).

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Teorema de Pitágoras. Sequência Didática.

CORRÊA, Fernando Emmi. **Pythagorean Theorem**: a teaching proposal by didactic sequence. 2026. 150p. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) - State University of Pará, Belém, 2026.

ABSTRACT

Geometry education is one of the thematic units present in the BNCC (Brazilian National Curriculum). Among the knowledge objects to be worked on is the teaching of metric relations in right triangles, especially the Pythagorean theorem. Despite its application in various areas, we feel that students continue to reach the first year of high school without having studied, or with low learning of, this important topic, given the difficulties observed when studying the fundamental trigonometric relation or calculating the distance between two points. This perception is reinforced by the low results in large-scale exams. The results of the 2021 SAEB (National Basic Education Assessment System) revealed an increase in the number of students at the lowest levels of proficiency in mathematics compared to the 2019 SAEB edition, and the average score of Brazilian students in PISA (2022) was lower than that of neighboring countries such as Chile, Uruguay, and Peru. Given this scenario, the present research aimed to answer the following guiding question: what potential does a didactic sequence, structured according to the Articulated Units of Conceptual Reconstruction, present in relation to learning the Pythagorean theorem? Our general objective was to investigate the potential of using a didactic sequence for teaching the Pythagorean theorem, applied to a group of 9th-grade students in the public elementary school system. Brousseau's (1986) Theory of Didactic Situations (TSD), Zabala's (1998), Oliveira's (2013), and Cardoso's (2024) concept of Didactic Sequence, and Cabral's (2017) Articulated Unit of Conceptual Reconstruction (UARC) were the theoretical and methodological contributions that guided this study, which can be characterized as applied in nature, qualitative in approach, exploratory in its objectives, and bibliographic in its procedures. The literature review, the results of field research on the teaching of the Pythagorean theorem, and the analysis of textbooks supported the construction of the proposed teaching sequence. Furthermore, the in-depth study of different ways to demonstrate this theorem allowed for the organization of the Educational Product linked to this dissertation, which will be available for consultation on the PPGEM/UEPA page and on the eduCAPES Portal, and can be accessed by clicking [here](#) or [here](#).

Keywords: Teaching Mathematics. Metric Relations in Right Triangles. Pythagorean Theorem. Didactic Sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Triângulo Didático (relações na concepção do ensino na TSD)	21
Figura 2 – Detalhe da situação introdutória (C1 - Unidade 7 - 9º ano).....	44
Figura 3 – Enunciado do teorema de Pitágoras (C1 - Unidade 7 - 9º ano)	45
Figura 4 – Aplicação do teorema de Pitágoras (C1 - Unidade 7 - 9º ano).....	45
Figura 5 – Seção do Capítulo 2 (C1 - Unidade 7 - 9º ano).....	46
Figura 6 – Conhecimentos prévios revisados (C2 - Capítulo 8 - 9º ano).....	50
Figura 7 – Demonstração por equivalência de áreas (C2 - Capítulo 8 - 9º ano).....	51
Figura 8 – Demonstração algébrica (C2 - Capítulo 8 - 9º ano).....	52
Figura 9 – Relações métricas (C3 - Capítulo 11 - 9º ano).....	55
Figura 10 – Aplicação do teorema de Pitágoras (C3 - Capítulo 11 - 9º ano).....	56
Figura 11 – Seção NA HISTÓRIA (C3 - Capítulo 11 - 9º ano).....	57
Figura 12 – Representação cuneiforme – números babilônicos menores que 60 ...	64
Figura 13 – Representação sexagesimal do número 276.741	65
Figura 14 – Representação sexagesimal do número 36.005	65
Figura 15 – Tabela dos recíprocos	66
Figura 16 – Tableta YBC 7289.....	67
Figura 17 – $\triangle ABC$	70
Figura 18 – Classificação dos triângulos quanto à medida dos lados	71
Figura 19 – Classificação dos triângulos quanto à medida dos ângulos	71
Figura 20 – Desigualdade Triangular (esboço da demonstração)	72
Figura 21 – Elementos do triângulo retângulo.....	73
Figura 22 – Triângulo inscrito em uma semicircunferência	76
Figura 23 – Demonstração atribuída a Pitágoras (demonstração 1).....	78
Figura 24 – Construção de Leibniz (demonstração 2)	79
Figura 25 – Construção de J. Barry Sutton (demonstração 3)	80
Figura 26 – Construção de Jack Oliver (demonstração 4)	81
Figura 27 – Construção de Garfield (demonstração 5)	83
Figura 28 – Construção de Larry Hoehn (demonstração 6)	85
Figura 29 – Construção genérica de Larry Hoehn (demonstração 7)	86
Figura 30 – Construção de WJ Dobbs (demonstração 8)	88
Figura 31 – Construção de Perigal (demonstração 9)	89
Figura 32 – Construção de Ferrarese (demonstração 10)	90
Figura 33 – Generalização da ideia de Perigal (demonstração 11)	91
Figura 34 – Construção de KB Subramaniam (demonstração 12)	92
Figura 35 – Diagonal de um Quadrado.....	93

Figura 36 – Altura de um triângulo equilátero	94
Figura 37 – Quadrado inscrito em uma circunferência	95
Figura 38 – Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência	96
Figura 39 – Hexágono regular inscrito em uma circunferência	98
Figura 40 – Média e extrema razão.....	99
Figura 41 – Triângulo áureo.....	101
Figura 42 – Pirâmide áurea	102
Figura 43 – Círculo trigonométrico de raio unitário.....	104
Figura 44 – Pontos A e B no plano cartesiano	105
Figura 45 – Esboço da recíproca do teorema de Pitágoras (1º caso).....	106
Figura 46 – Esboço da recíproca do teorema de Pitágoras (2º caso)	107
Figura 47 – kit de varetas (14 unidades) – TAREFA 1 (1ª UARC).....	114
Figura 48 – Triângulo de varetas fixadas com massa – TAREFA 2 (2ª UARC).....	115
Figura 49 – Percorso Metodológico (da definição do objeto à validação da SD) ...	124

LISTA DOS QUADROS

Quadro 1 – Total de pesquisas por banco de dados após a aplicação dos filtros ...	31
Quadro 2 – Pesquisas analisadas por atenderem os critérios de busca.....	32
Quadro 3 – Resultados de Matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental	34
Quadro 4 – Aproveitamento - ENEM de 2017 a 2022 - Município de Belém (PA)...	35
Quadro 5 – Classificação das questões do teste por nível de dificuldade.....	37
Quadro 6 – Coleções de Matemática – PNLD 2024 – Belém/PA	40
Quadro 7 – Descritores considerados na análise dos livros didáticos	41
Quadro 8 – Descritores considerados na análise das coleções C1, C2 e C3.....	42
Quadro 9 – Resultado da análise da coleção C1 – A Conquista Matemática.....	47
Quadro 10 – Resultado da análise da coleção C2 – Matemática Bianchini	52
Quadro 11 – Resultado da análise da coleção C3 – Matemática e Realidade	57
Quadro 12 – Cálculo babilônico para a divisão de 160 por 8	66
Quadro 13 – Cálculo da razão entre a diagonal e o lado na Tableta YBC 7289.....	68
Quadro 14 – Dimensões das pirâmides do Egito	103
Quadro 15 – Exemplos de ternos pitagóricos	111
Quadro 16 – Ficha de observação (TAREFA 1).....	118
Quadro 17 – Ficha de observação (TAREFA 2).....	121

LISTA DE SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAFe	Comunidade Acadêmica Federada
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENEC	Estratégia Nacional de Escolas Conectadas
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
EVA	Etileno-Vinil-Acetato
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
IFPA	Instituto Federal do Pará
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEF	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental
Pisa	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPGEM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RNP	Rede Nacional de Ensino e Pesquisa
Saeb	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SD	Sequência Didática
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UARC	Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UFOPA	Universidade Federal do Oeste do Pará
UNAMA	Universidade da Amazônia
UNESPA	União das Escolas Superiores do Pará

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....	20
1.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	20
1.2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA	24
1.3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA ESTRUTURADA POR UARC	27
2. O ENSINO DE RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	30
2.1. REVISÃO DE LITERATURA	30
2.1.1. Estudos diagnósticos.....	33
2.1.2. Análise de Livros Didáticos de Matemática.....	39
2.1.3. Estudos experimentais	61
2.2. PERCEPÇÃO DOS ALUNOS.....	61
2.2.1. Descrição dos dados	61
3. AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	63
3.1. OS PRIMEIROS REGISTROS HISTÓRICOS	63
3.2. AS RELAÇÕES MÉTRICAS NAS SEMELHANÇAS DE TRIÂNGULOS	69
3.3. O TEOREMA DE PITÁGORAS	75
3.3.1. Demonstrações do teorema.....	77
3.3.2. Aplicações do teorema	93
3.3.3. A recíproca do teorema de Pitágoras:	106
3.3.4. A Equação Pitagórica	108
4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ENSINO DE RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	113
4.1. ATIVIDADES PROPOSTAS.....	113
5. APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO	124
CONCLUSÕES	126
REFERÊNCIAS	128
ANEXO A: QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS	133
ANEXO B: TCLE DOS ALUNOS	136
ANEXO C: TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM.....	137
ANEXO D: FICHAS DE INSTRUÇÃO E/OU DE OBSERVAÇÃO.....	141
ANEXO E: PAINÉIS DE GABARITO – TAREFA 3 (3ª UARC).....	148

INTRODUÇÃO

Falar em primeira pessoa não deveria ser dificuldade para ninguém. Contudo, quando a exigência é pelo uso do “eu” no lugar do “nós”, algumas pessoas costumam apresentar dificuldade. Mesmo acreditando fazer parte deste grupo, irei me esforçar para falar um pouco deste humilde pesquisador, sem que isso canse os olhos de quem lê essas linhas.

Sou natural de Belém, capital do Estado do Pará. Tendo nascido de bons pais, tive a benção de receber várias instruções proveniente deles que moldaram meu caráter e a pessoa que sou hoje. Foram pais dedicados que, mesmo não possuindo curso superior, já naquela época compreendiam a importância de uma boa educação.

Estudei sempre em escolas particulares, inclusive quando me graduei como Licenciado Pleno em Matemática pela UNESPA (atual UNAMA) entre 1989 e 1992. Confesso que mesmo com toda a qualidade da preparação recebida, a escolha do curso de Licenciatura em Matemática se deu por exclusão, uma vez que os demais cursos da área de exatas que aquela Universidade oferecia não me interessavam, ou a elevada concorrência vista em seleções anteriores me deixaram temeroso.

Acabei ingressando em 2º lugar, com uma pontuação naquele exame que me permitiria ser aprovado em qualquer outro curso. Fui aluno de excelentes professores que contribuíram muito com a minha formação profissional e fizeram com que eu me apaixonasse pelo curso. Alguns destes professores eu tive a alegria de reencontrar ao ingressar no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, em especial o Prof. Dr. Miguel Chaquiam, meu orientador nesta jornada. Mas antes de falar do trabalho desenvolvido neste PPGEM, considero importante comentar brevemente sobre as minhas experiências profissionais.

Deixando de lado as práticas adquiridas com aulas particulares, minha primeira experiência a frente de uma sala de aula ocorreu em agosto de 1991, quando assumi uma única turma de 6ª série (hoje o 7º ano) no Colégio Moderno. Mesmo estando no 6º semestre da minha formação, eu pude perceber que ainda me faltavam conhecimentos que me ajudassem não apenas em um melhor controle da turma, mas principalmente na apresentação dos assuntos constantes no currículo escolar, e a capacidade para mostrar a relação deles com outras áreas do

conhecimento, ou a sua aplicação no dia-a-dia.

Mesmo assim, graças a uma Supervisora paciente que enxergava em mim qualidades que eu não via, e certamente ainda não as possuía, visto que ainda não havia concluído a minha Graduação, passei sem perceber por um processo de lapidação diária que, somado a um esforço pessoal, me permitiu atuar como professor naquela instituição até o final do ano 2000, ensinando Matemática para alunos da 5ª e 6ª série (hoje o 6º e 7º ano).

Depois de alguns cursos de aperfeiçoamento, na busca por melhorar a qualidade do trabalho que desenvolvia, bem como em preencher algumas lacunas deixadas pela Graduação, ingressei no Curso de Especialização em Educação Matemática, oferecido pela Universidade do Estado do Pará de janeiro de 1998 a fevereiro de 1999.

Nesse meio tempo, atuei como professor temporário em diversos cursos técnicos na antiga Escola Técnica Federal do Pará, hoje Instituto Federal do Pará (IFPA), de abril de 1993 a janeiro de 1997, regressando um ano depois como professor efetivo. Nessa instituição tive minha primeira experiência em uma escola de ensino público e recebi, ao longo desses vinte e oito anos, a oportunidade de atuar como gestor em diversos cargos administrativos.

Para não cansar o leitor, limito-me aqui a citar o cargo de Diretor Geral do IFPA-Campus Óbidos de abril de 2013 a abril de 2018, o que considero ter sido o principal cargo exercido por mim, e que me fez descobrir talentos, conhecer mais a fundo sobre leis e condutas administrativas, além de desenvolver novas habilidades, em especial no trato com pessoas e de relacionamento com representantes de outros órgãos.

Contudo, em uma coincidência nefasta, a maioria dos convites para atuar como gestor ocorreu quando estava inserido em algum curso de capacitação, o que acabava por prejudicar a formação iniciada. Foi o que aconteceu no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), junto a Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), cuja formação foi interrompida em 2013, alguns meses após assumir o cargo de Diretor Geral.

É bem verdade que tinha a opção de não aceitar os convites feitos e concluir as formações iniciadas, mas confesso que acabava sendo seduzido pela possibilidade, ou pela utopia, de poder contribuir para a melhoria da educação de uma outra forma durante o tempo que permanecesse no cargo. Embuído desse

espírito, procurei desenvolver ações que permitisse o IFPA levar oportunidades de formação a todos os municípios que compunham a área de abrangência do IFPA-Campus Óbidos.

Terminada a missão no interior do Estado, reassumi minhas atribuições de professor da Rede Federal no IFPA-Campus Belém. O retorno à capital não apenas me trouxe de volta para perto da minha família, mas para o convívio com colegas da coordenação de Matemática, alguns deles contemporâneos da época de graduação, mas já com formação *stricto sensu* concluída. Senti-me acolhido e constantemente estimulado a buscar ingressar novamente em uma capacitação deste nível, mas era hora de apoiar minha esposa na retomada de sua formação *stricto sensu*, sonho interrompido com a maternidade e a sobrecarga familiar que a minha ausência provocava.

Passada essa etapa, e após um período obscuro onde a principal meta era a proteção contra o vírus da COVID-19, chegou a hora de retomar o planejamento de futuro. Nesse ponto, o apoio extra e intra familiar foram determinantes para uma preparação que, ao final, se mostrou exitosa com a aprovação no processo seletivo para ingressar no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA) na linha de pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Em que pese não estar mais atuando nesse nível de ensino, temos sentido que ano após ano, os alunos estão chegando ao Ensino Médio com muito mais dificuldades em Matemática, em especial em pontos relacionados ao ensino de Geometria. Esse fato já foi apontado em vários estudos, mas a piora sentida pode estar ligada ao período de ensino remoto, o qual nem instituições, nem docentes e muito menos os discentes estavam preparados para lidar com os desafios.

Nesse sentido, no regresso a esta Universidade por intermédio do PPGEM, pretendemos investigar especificamente o ensino das relações métricas no triângulo retângulo, com destaque para as verificações experimentais e a demonstração do teorema de Pitágoras, buscando responder a seguinte questão norteadora: que proposta de sequência didática, estruturada segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem do teorema de Pitágoras?

Na busca da resposta a essa pergunta, definimos como objetivo geral propor o uso de uma sequência didática para o ensino do teorema de Pitágoras junto aos

alunos do 9º ano da rede pública de Ensino Fundamental.

Este objetivo geral será delimitado pelos seguintes objetivos específicos: (1) desenvolver um levantamento prévio dos estudos realizados sobre o ensino e a aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo, com destaque para o teorema de Pitágoras, (2) realizar um diagnóstico da aprendizagem sobre o teorema de Pitágoras a partir da análise de questionários aplicados junto a uma amostra com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede federal em Belém do Pará e (3) elaborar atividades na forma de uma sequência didática, estruturada segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual, baseada nos resultados da revisão de literatura, bem como no diagnóstico realizado.

Para favorecer a exposição da pesquisa realizada, decidimos estruturar esta dissertação em cinco capítulos. No Capítulo 1 realizamos a apresentação dos aportes teóricos e metodológicos que nortearam este estudo, a começar pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (1986), seguida da concepção sobre uma Sequência Didática na visão de Zabala (1998), Oliveira (2013) e Cardoso (2024), e da construção do conceito de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC) proposto por Cabral (2017).

No Capítulo 2 apresentamos uma revisão da literatura, seguido de alguns resultados da pesquisa diagnóstica realizada, entre os quais a percepção dos alunos a respeito do ensino do objeto matemático pesquisado. O Capítulo traz ainda a análise de como o mesmo é tratado nas três coleções de livros didáticos mais escolhidos entre as escolas da rede pública de Belém por ocasião do PNLD 2024 – Objeto 1.

A parte teórica relacionada ao ensino das relações métricas no triângulo retângulo aparece no Capítulo 3, incluindo os primeiros registros históricos sobre o assunto e a apresentação das relações através de semelhança de triângulos. Além disso, são apresentadas doze formas diferentes que o professor pode utilizar para demonstrar o teorema de Pitágoras para além das que aparecem nos livros didáticos, as quais se constituirão no Produto Educacional vinculado a essa dissertação e ficarão disponíveis para consulta na página do PPGEM/UEPA (<https://propesp.uepa.br/ppgem/dissertacoes/>) e no Portal eduCAPES (<https://educapes.capes.gov.br/>). O capítulo também traz aplicações do teorema de Pitágoras, a demonstração da recíproca desse teorema e uma forma simples para identificar ternos pitagóricos.

No Capítulo 4 apresentamos uma sequência didática constituída por três atividades na forma de UARC's para o ensino do objeto matemático pesquisado. Essa sequência não será aplicada nesse momento para aferição de sua validação, tornando-se um ponto de partida para novos estudos no futuro. Entretanto, visando aplicar e validar a sequência proposta, apresentamos no Capítulo 5 uma síntese do que deve ser feito nas últimas 06 (seis) etapas do percurso metodológico segundo Chaquiam e Cabral (2025).

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresento os aportes teóricos e metodológicos que estearam essa pesquisa e subsidiaram a concepção da sequência didática para o ensino do teorema de Pitágoras.

Iniciamos apresentando caracterizações acerca da utilização da Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Guy Brousseau (1986), quando sequências didáticas são preparadas para permitir a autonomia do educando na construção de seus saberes. No contrato didático firmado, o aluno é convidado a construir os saberes relativos a um conteúdo matemático, sem a interferência direta do professor nessa construção. A definição, estrutura e desenvolvimento de uma sequência didática são apresentadas com mais detalhes no tópico seguinte.

Na sequência, trazemos a construção teórica do conceito denominado por Cabral (2017) de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC), apoiado numa série de categorias de Intervenções Estruturantes criadas com o olhar voltado para o processo de reconstrução de conceitos durante as aulas de Matemática.

1.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A palavra didática é proveniente do grego e sua análise etmológica nos permite defini-la como a ciência ou a arte do ensino. Comenius¹ a definia como “a arte de ensinar”.

Em oposição ao conceito de Comenius, Brousseau (1986, apud Teixeira; Passos, 2014, p. 156-157) define Didática como “uma relação específica entre conteúdos de ensino, a maneira como os alunos adquirem conhecimentos e os métodos”. Em relação à Didática da Matemática, Brousseau considera que:

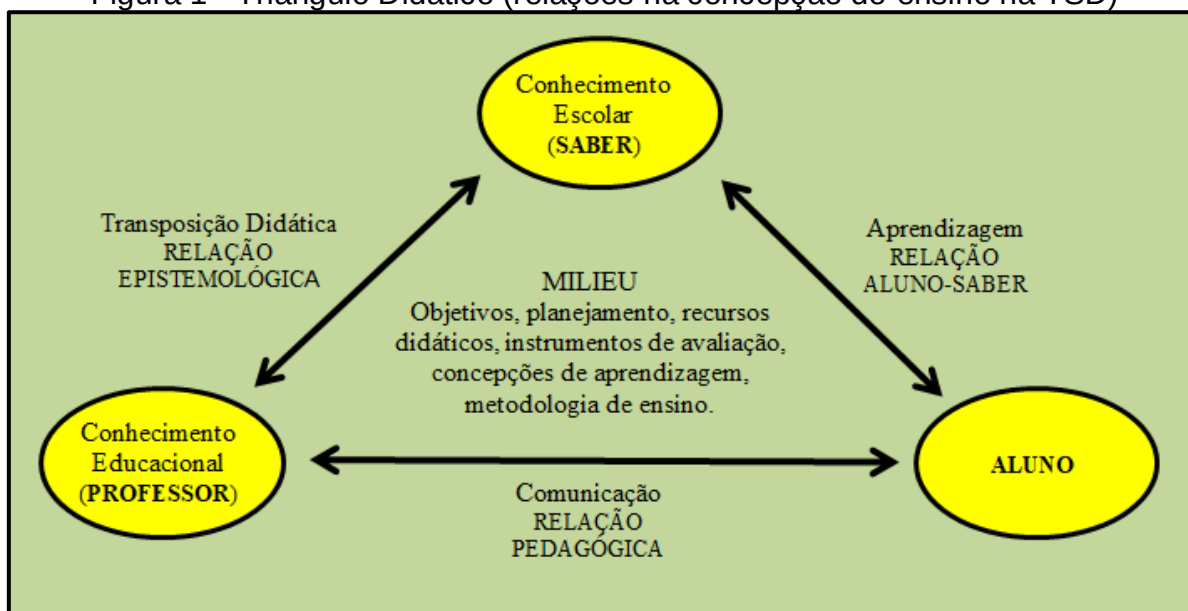
A Didática da Matemática estuda atividades didáticas que têm como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber (Brousseau, 1986, apud Teixeira; Passos, 2014, p. 157).

¹ Jan Ámos Komluský (Comenius, em latim), foi um teólogo tcheco que viveu entre os anos de 1592 e 1670. Escreveu várias obras, dentre elas a *Didacta Magna*.

Segundo Teixeira e Passos (2014, p. 157), na Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Brousseau, o professor e os alunos são atores indispensáveis na relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (milieu) em que a situação didática se faz presente. Os autores destacam que a TSD esclarece a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no campo da Educação Matemática, favorecendo a compreensão das interações sociais que ocorrem na sala de aula e das condições e formas com que o conhecimento matemático pode ser apropriado e aprendido.

A caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de Situações Didáticas, representa um dos objetivos basilares da Didática da Matemática. Teixeira e Passos (2014, p. 158) e Almouloud (2007, p. 32) ensinam que “o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber”. Esse sistema didático de interações entre professor e alunos mediados pelo saber pode ser representado pelo esquema proposto por Silva (2020), indicado na Figura 1.

Figura 1 - Triângulo Didático (relações na concepção do ensino na TSD)



Fonte: Silva (2020, p. 15).

Os autores explicam que, na perspectiva socioconstrutivista, a psicologia só considera que houve aprendizagem de fato, quando ela é resultante da interação social estabelecida entre o sujeito que aprende e o contexto no qual a aprendizagem

foi desenvolvida. Eles lembram ainda que nos “processos de aprendizagem aos quais o ser humano está submetido, é essencial a mediação (interação) entre aquele que aprende e aquele que ensina, sem o que a aprendizagem não se concretiza” (Teixeira; Passos, 2014, p. 159).

Para uma melhor compreensão da Teoria das Situações proposta por Brousseau, os autores destacaram a definição de alguns termos, a saber:

- Uma situação é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado, reunindo as circunstâncias nas quais uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao *milieu*.
- *Milieu* seria subsistema autônomo, antagônico ao sujeito.
- Situações didáticas, na década de 1970, eram aquelas que serviam para ensinar, sem que fosse levado em consideração o papel do professor. Posteriormente, “os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno [...] é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor, o sistema educacional” Brousseau (2008, p.10, *apud* Teixeira; Passos, 2014, p. 160).

Brousseau defendia que as situações deveriam ser concebidas de modo a provocar no aluno o aparecimento dos conhecimentos que eles já possuem, em respostas, espontâneas ou não, e em condições apropriadas. Essas situações devem ser, porém, sem nenhuma relação visível para o aluno, com uma intenção didática desejada e sem qualquer intenção complementar.

Teixeira e Passos (2014, p. 162) explicam que para Brousseau, uma sequência didática é, portanto, uma série de situações estruturadas com o objetivo de “tornar possível a aquisição de saberes, sem esgotar o assunto trabalhado”. Assim, “uma sequência didática não pode, a priori, ter seu tempo de duração estipulado de acordo com o programado”, pois o seu cumprimento precisa levar em consideração “as necessidades e as dificuldades dos alunos durante o processo”.

Deste modo, o modelo teórico da TSD se constitui em um campo de reflexões no ensino de matemática onde o professor orienta o aprendiz para que o mesmo possa desenvolver atividades que lhe permitam apropriar-se de novos saberes. Essa teoria discute, portanto, as formas de apresentação de determinado conteúdo matemático por meio da sequência didática regulamentada através de acordos bilaterais, os quais Brousseau (1986) chama de “contrato didático” entre o professor e o aluno, alguns explícitos e outros não, onde são pautadas as relações didáticas entre eles, criando assim as condições favoráveis para que a aprendizagem ocorra.

De acordo com Brousseau (1986, *apud* Teixeira; Passos, 2014),

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos (Brousseau, 1986, p. 8, *apud* Teixeira; Passos, 2014, p. 163).

Na visão de Teixeira e Passos (2014), a atividade do professor não se restringe a mera comunicação de um saber. A ele cabe a responsabilidade de propor uma situação problema que desencadeie a busca de um novo saber; cabendo ao aluno o papel de aceitar o desafio da resolução do problema, dando início assim ao processo de aprendizagem.

Entretanto, o professor não tem o controle de todas as variáveis que podem incidir na situação proposta. O conjunto dessas variáveis Brousseau classifica como situações adidática. Elas são representadas “pelo esforço independente do aluno em certos momentos de aprendizagem”, devendo o professor encontrar um equilíbrio na quantidade de informações passadas ao aluno durante as orientações do melhor caminho em direção à resolução, transformando assim uma situação adidática em uma situação didática.

Analisando as principais interações específicas da aprendizagem da matemática, Brousseau (1986, *apud* Teixeira; Passos, 2014) desenvolveu cinco tipos de situações didáticas, a saber:

- **Situação didática de devolução:** ato pelo qual o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem, incluindo-o no jogo e assumindo os riscos por tal ato;
- **Situação didática de ação:** o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o *milieu*, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema;
- **Situação didática de formulação:** ocorre troca de informação entre o aluno e o *milieu*, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar;
- **Situação didática de validação:** os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação adidática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador.
- **Situação didática de institucionalização:** destinada a estabelecer

convenções sociais e a intenção do professor é revelada. O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização (Brousseau, 1986, *apud* Teixeira; Passos, 2014, p. 165-166).

A TSD tem como foco os procedimentos adotados dentro das situações de devolução, de ação, de formulação, de validação e, finalmente, de institucionalização. Ao obedecer àqueles procedimentos e não fornecer ele mesmo a resposta, o professor faz com que o aluno participe efetivamente da elaboração dos novos saberes com base em suas experiências pessoais e sua própria interação com o meio.

Nesse sentido, nossa opinião vai ao encontro do pensamento de Teixeira e Passos (2014, p. 167) ao afirmarem que “o estudo das situações didáticas permite revelar e utilizar o papel dos conhecimentos não explícitos ou, mesmo, não válidos, para o estabelecimento e a aprendizagem de saberes matemáticos”. No próximo tópico, apresentamos a concepção de sequência didática no âmbito do ensino, pois acreditamos que através da aplicação de uma sequência didática bem estruturada seremos capazes de identificar indícios de aprendizagem do objeto matemático Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

1.2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Uma definição amplamente aceita de Sequência Didática (SD) é encontrada em Zabala (1998). Segundo o autor, uma SD é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (Zabala, 1998, p. 18). De outro modo, Oliveira (2013) definiu uma SD como

um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino aprendizagem (Oliveira, 2013, p. 39).

Araújo (2013) por sua vez ensinou, de modo simples e direto, que uma SD “é

um modo de o professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentais” (Araújo, 2013, p. 323).

Assim, quando falamos de SD estamos nos referindo a uma metodologia de ensino fracionado de um determinado objeto, mediante o planejamento cuidadoso de um conjunto de atividades estruturadas e interligadas entre si, aplicadas de modo sequencial visando a aprendizagem desse objeto. Entre os passos básicos que uma SD deve ter, Oliveira (2013) destaca:

escolha do tema a ser trabalhado; questionamentos para problematização do assunto a ser trabalhado; planejamento dos conteúdos; objetivos a serem atingidos no processo de ensino aprendizagem; delimitação da sequência de atividades, levando-se em consideração a formação de grupos, material didático, cronograma, integração entre cada atividade etapas, e avaliação dos resultados (Oliveira, 2013, p. 40).

Uma SD tem sua origem a partir de uma produção inicial ou diagnóstica, através da qual o professor verifica os conhecimentos e as habilidades que os alunos já possuem. Esse levantamento é fundamental para que ele possa adequar às atividades e os exercícios subsequentes, levando em consideração as dificuldades e as capacidades reais da turma, bem como os objetivos que deseja alcançar e os recursos disponíveis.

O tempo de duração de uma SD pode variar e sua estrutura deve ser flexível, permitindo que o professor realize adequações que atendam, tanto o ritmo de aprendizagem da turma, quanto a necessidade específica de um determinado aluno. Além disso, a presença de atividades de avaliação em uma SD favorece o monitoramento do progresso de aprendizagem dos alunos.

Cardoso (2024) apresenta um modelo para a elaboração de uma SD, recomendando que,

Após elaborar a identificação da sequência didática, para cada objetivo de aula, deve-se elaborar a ação do professor, a ação do aluno e o material utilizado de modo que esse objetivo possa ser atingido. Além disso, deve-se descrever os problemas que serão desenvolvidos na Sequência Didática bem como as orientações necessárias para a resolução de tais problemas. Prever possíveis dificuldades e erros que os alunos podem cometer é um conhecimento específico do professor e deve ser analisado. Essa análise pode ser realizada quando o professor desenvolve a resolução de modo analítico², observando os detalhes dos problemas, os conhecimentos requeridos articulando com as suas experiências em sala de aula e as dificuldades dos seus estudantes. (Cardoso, 2024, p. 16-17).

² Característica da análise realizada de forma qualitativa ou quantitativa.

Para a autora, as ações do professor englobam as estratégias, os métodos e as abordagens que ele utilizará para ensinar e facilitar a aprendizagem dos alunos. Por outro lado, as ações do aluno referem-se ao seu envolvimento ativo durante todo o processo, incluindo sua participação nas atividades, realização de tarefas e a discussão dos conceitos com os demais colegas. Quanto ao material utilizado, este refere-se a todos os recursos relacionados pelo professor capazes de aprimorar a aprendizagem dos alunos. Devem estar alinhados aos objetivos da aula e seu uso adequado é vital para o sucesso da atividade.

Cardoso (2024) divide o desenvolvimento de uma SD em cinco etapas a saber:

- **Diagnóstico Inicial:** importante para identificar os conhecimentos prévios, dos estudantes e o estabelecimento de objetivos de aprendizagem claros.
- **Planejamento:** está articulada ao diagnóstico inicial ou ao problema detectado que o docente pretende corrigir, devendo conter tudo que será executado.
- **Execução da Sequência Didática:** momento em que o professor desenvolverá os conceitos matemáticos sobre o objeto estudado, inclusive mediante atividades de aplicação, projetos e simulações.
- **Avaliação Formativa:** visa obter um *feedback* do conhecimento adquirido mediante indagações orais, aplicação de questionários, exercícios de revisão, entre outros.
- **Síntese e Reflexão:** momento de autoavaliação do professor buscando aferir a eficácia da SD proposta e a necessidade de melhorias.

Silva (2024) ensina que o processo de construção de uma SD pode ocorrer de várias formas. Segundo a autora,

a teoria das Situações Didáticas [...] se encaixa na construção da sequência que se preocupa com a superação de obstáculos, que consiste em seguir os tempos dominantes denominados de ação, formulação, validação e institucionalização, que são as fases de construção de uma sequência didática sob a luz da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) (Silva, 2024, p. 25).

O trabalho que desenvolvemos tem como foco a construção de uma SD segundo o enfoque na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC) de Cabral (2017), cuja apresentação faremos a seguir.

1.3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA ESTRUTURADA POR UARC

Muitos professores acalentam o desejo de ensinar a Matemática de um modo diferente do modelo tradicional em que foram ensinados, baseados na tríade definição, exemplo e exercício. Motivado por este espírito, Cabral (2017) apresentou uma alternativa capaz de contribuir na promoção de interações verbais reflexivas ao criar condições para a exploração de regularidades e o estabelecimento de generalizações, ainda que de maneira intuitiva.

A concepção proposta por Cabral (2017, p. 39) foi fundamentada na reconstrução do conceito de um objeto matemático por meio de uma sequência de Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual – UARC's.

A primeira geração dessas unidades o autor chamou de UARC-1. Ela representa o ponto de partida da reconstrução de um conceito e não necessita ser na forma de um problema. A partir daí, a escolha das demais gerações dessas unidades (UARC-2, UARC-3, etc.) pelo professor estarão condicionadas as unidades escolhidas anteriormente. À medida que uma nova UARC vai sendo adicionada, a capacidade de reconstrução conceitual vai sendo potencializada, até o momento que, após a n -ésima UARC, o conceito pretendido é finalmente reconstruído,

Para uma melhor compreensão, Cabral (2017, p. 40-43) descreve o processo de construção das UARC's, materializadas nos textos de uma Sequência Didática (SD), em seis categorias estruturantes, resumidas a seguir:

- 1ª) Intervenção Inicial (I_i):** serve de aporte para que o professor estimule o aluno a perceber de maneira empírico-intuitiva as regularidades funcionais de um conceito. Representa o primeiro elemento de um jogo discursivo dirigido pelo professor com uma intenção bem definida: estimular nos alunos à percepção de alguma verdade do pensamento matemático.
- 2ª) Intervenção Reflexiva (I_r):** materializada através de questionamentos referentes a um ou mais aspectos do conceito objeto da reconstrução. O aluno é orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências.
- 3ª) Intervenção Exploratória (I_e):** Aqui os alunos são convidados a fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações visando aprofundar o olhar deles em relação as respostas obtidas por ocasião das Intervenções Reflexivas (I_r), objetivando a percepção

de certos padrões que ajudem no processo de generalização do conceito.

- 4ª) Intervenção Formalizante (I_f):** momento em que o professor orienta o pensamento dos alunos, mediado por uma seqüência didática, e se apropria das verdades “empírico-intuitivas” percebidas por eles durante as Intervenções Estruturantes Pré-formais (Reflexivas e Exploratórias), para, a partir delas, estimular as generalizações dos conceitos aprendidos, para só então introduzir a formalidade matemática.
- 5ª) Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r):** pensadas com o objetivo de realizar uma primeira aferição da aprendizagem, devem ter como ênfase as implicações conceituais do objeto de reconstrução e as propriedades operacionais (manipulação de algoritmos) envolvidas, buscando fortalecer as justificativas dos procedimentos adotados durante o processo de reconstrução.
- 6ª) Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a):** nesta intervenção, o aluno precisa ser capaz de mobilizar conceitos e propriedades operacionais (algoritmos) para resolver problemas aplicados em diversos contextos reais e/ou abstratos adequados ao seu nível de ensino.

Importante frizar que, ao propor esse modelo, Cabral (2017) não sugere que abandonemos as formalidades exigidas no ensino da Matemática, mas a adoção de um olhar diferenciado. Nas palavras do autor:

Em outros termos, o que estou sugerindo com esse modelo estruturante para as Sequências Didáticas não é o abandono das exigências formais do saber disciplinar da Matemática, mas que se valorize um *cenário didático amplificado* que pressupõe um olhar mais compassivo em respeito às limitações dos aprendizes. O que realmente quero dizer com um “olhar mais compassivo” é a valorização inicial no ambiente pré-formal de modo diferente do que ocorre no modelo tradicional no qual a formalização precede quaisquer possibilidades de argumentação por parte do aluno (Cabral, 2017, p. 42).

Visando entender como as Intervenções Estruturantes poderiam consolidar o texto de uma Sequência Didática para o ensino, Cabral (2017, p. 45) concebeu duas modalidades para a materialização da Intervenção Inicial, quais sejam: “**Exploração Potencial**” (I_i - EP) e “**Conexão Pontual**” (I_i - CP).

Para o autor, a Exploração Potencial se inicia com a construção de um cenário didático favorável, uma espécie de “caixa de pandora” que, ao ser aberta, é capaz de despertar a curiosidade dos alunos que culminarão na redescoberta de uma verdade matemática, graças às ações diretivas do professor a partir de uma

Sequência Didática, materializada com base na Intervenção Inicial adotada.

Além das seis intervenções descritas anteriormente, Cabral (2017, p. 47) também criou uma sétima categoria de intervenção, chamada de **Intervenção Oral de Manutenção Objetiva (I- OMO)**, cuja finalidade é a manutenção da objetividade do planejamento, isto é, manter o foco da reconstrução pretendida pela Sequência Didática. Elas costumam ser mais intensas no início das atividades e diminuem ao longo do processo à medida que os alunos vão se tornando mais independentes.

Nos arredores das I- OMO aparecem o que o autor chama de **Zonas de Tensão Discursivas** classificadas em três tipos, a saber: **ALFA**, **BETA** e **GAMA**. Para Cabral (2017, p. 50), a primeira zona de tensão é a **ALFA** marcada por pequenos avanços e frequentes intervenções do professor diante de um menor domínio dos alunos em relação aos objetos de conhecimento. A zona **BETA** é marcada por uma redução na tensão discursiva em razão do professor já conseguir perceber que certas aprendizagens fundamentais estão sendo consolidadas e dos sinais de autonomia dos alunos. A última zona discursiva é a **GAMA**. Nela é possível perceber que o domínio adquirido pelo aluno em relação ao objeto de conhecimento está relativamente consolidado, permitindo ao professor a proposição de situações problemas mais complexas.

2. O ENSINO DE RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

No presente capítulo, apresentamos o resultado do levantamento junto as bases de dados de reconhecida relevância acadêmica sobre o estado da arte referente ao estudo do teorema de Pitágoras, com o objetivo de mapear todos os trabalhos relacionados ao objeto matemático pesquisado, seus objetivos, percursos metodológicos, resultados alcançados e possíveis oportunidades de estudos complementares.

O capítulo traz também, o resultado da análise do tratamento dispensado ao objeto matemático Relações Métricas no Triângulo Retângulo, presente no volume referente ao 9º ano do Ensino Fundamental, nas três coleções de Matemática mais escolhidas por ocasião do PNLD 2024 – Objeto 1, entre as escolas da rede pública do município de Belém do Pará.

2.1. REVISÃO DE LITERATURA

De acordo com os PCN's de Matemática, “as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo [...] é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações”. (Brasil, 1998, p. 122). Portanto, estudos nessa área do conhecimento matemático que ajudem os alunos a adquirirem competências e habilidades para resolver problemas, especialmente na área do espaço e das formas, bem como de estabelecer conexões entre os objetos matemáticos, tem potencial para contribuir com a melhoria do processo de aprendizagem.

Nesse sentido, ao desenvolvermos esta pesquisa bibliográfica, de caráter quantitativo e qualitativo, buscamos identificar em cada trabalho selecionado no tempo e espaço geográfico definido, todos os dados relacionados com o objeto matemático pesquisado, classificando e organizando as informações de forma que conseguíssemos reconhecer padrões que evidenciassem convergências e divergências entre as ideias dos autores, bem como os resultados e conclusões obtidos ao final das pesquisas. Nas palavras de Gil (2002, p. 44), a pesquisa bibliográfica é aquela “(...) desenvolvida com base em material já elaborado,

constituído principalmente de livros e artigos científicos”.

Na busca desses objetivos, esta revisão foi realizada entre os dias 20 e 25/01/2024, destacando apenas artigos, dissertações e teses publicados entre os anos 2018 e 2023 nos bancos de dados da BDTD³, do Portal de Periódicos CAPES⁴ (Banco de Dissertações e Teses), nos repositórios de Universidades e nos portais de Institutos e centros de pesquisa.

O acesso ao Portal de Periódicos da CAPES se deu por meio da Rede da CAFe⁵, provida pela RNP⁶, utilizando login e senha deste pesquisador junto ao IFPA⁷, instituição participante da Comunidade. A decisão por acessar desta forma se deu em razão de que assim teríamos acesso a toda a base de dados publicada naquele Portal, inclusive aos conteúdos que só seriam possíveis mediante pagamento. O total de trabalhos encontrados em cada banco de dados consultado, após a aplicação dos filtros, no período: 2018 a 2023 estão apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 – Total de pesquisas por banco de dados após a aplicação dos filtros

Fontes	Estudos retornados	1ª seleção	2ª SELEÇÃO (RESUMO E CONCLUSÃO)			
			Excluídos			Incluídos
		Estudos relevantes	Estudos não relevantes	Repetido/ duplicado	Incompleto	Estudos primários
Portal CAPES	9	9	0	3	0	6
BDTD	2	2	0	0	0	2
EduCapes	289	1	288	0	0	1
Total	300	12	288	3	0	9

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

A pesquisa no Portal CAPES utilizando como critérios de seleção as palavras-chave “relações métricas” AND “triângulo retângulo”, depois “relações métricas” AND “sequência didática” e por último “triângulo retângulo” AND “sequência didática” identificou um total de nove trabalhos. Após aplicação dos filtros de inclusão “2018 a 2023” e “disponibilizados na íntegra no idioma português” foi observado que três deles estavam publicados em duplicidade, fato este que provocou a sua exclusão.

As demais buscas no Portal CAPES com uso das palavras-chave "ensino e

³ Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

⁴ Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

⁵ Comunidade Acadêmica Federada

⁶ Rede Nacional de Ensino e Pesquisa

⁷ Instituto Federal do Pará

aprendizagem" ou "educação básica", combinadas com os filtros de inclusão aplicados, apresentaram resultados já conhecidos ou que não abordavam o tema relações métricas no triângulo retângulo. Deste modo, o mapeamento realizado no Portal de Periódicos da CAPES resultou em seis estudos científicos, todos na forma de artigo.

A pesquisa no banco de dados da BDTD com uso das palavras-chaves “relações métricas” AND “triângulo retângulo” AND “sequência didática” combinada com os filtros de inclusão “2018 a 2023” e “disponibilizados na íntegra no idioma português” retornou como resultado duas dissertações de Mestrado e nenhuma tese.

Por outro lado, a busca no portal EduCAPES com uso das palavras-chave “relações métricas” AND “triângulo retângulo” AND “sequência didática” retornou duzentos e oitenta e nove trabalhos. Todavia, após a combinação com os filtros de inclusão “2018 a 2023” e “disponibilizados na íntegra no idioma português”, apenas uma dissertação de Mestrado atendeu os critérios de busca.

O Quadro 2 apresenta a relação dos trabalhos selecionados, listados por tipo de pesquisa e ano da publicação, da mais recente para a mais antiga.

Quadro 2 – Pesquisas analisadas por atenderem os critérios de busca

Trabalhos selecionados	Autor(a/es)	Título
A1 ⁸	Silva e Barbosa (2023)	A Teoria Antropológica do Didático como uma ferramenta metodológica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo.
A2	Pontes e Paixão (2021)	Uma abordagem das relações métricas no triângulo retângulo para alunos do campo.
A3	Cruz e Quartieri (2021)	Investigando conhecimentos prévios de trigonometria dos alunos do 9º ano do ensino fundamental.
A4	Gonçalves, Cardoso e Moraes (2021)	Uma sequência didática para o ensino do teorema de Pitágoras a partir de construções geométricas.
A5	Vasconcelos e Carvalho (2019)	Idoneidade cognitivo-afetiva de uma sequência didática para a construção do conceito de razões trigonométricas por meio de uma história em quadrinhos.
A6	Santos e Alves (2018)	A Engenharia Didática para o ensino de olimpíadas de matemática: situações olímpicas com o amparo do software Geogebra.
D1	Santana (2023)	Atenção seletiva e teoria dos campos conceituais: articulação para a aprendizagem da noção de relações métricas no triângulo retângulo.

⁸ Utilizamos a letra “A” para identificar artigos científicos e a letra “D” para identificar dissertações de mestrado.

D2	Fonseca (2018)	Laboratório de ensino de matemática no processo de ensino-aprendizagem.
D3	Ferreira (2018)	O ensino de relações métricas no triângulo retângulo por meio de atividades.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

Ao analisar a síntese de cada trabalho, observamos que os estudos A1, A3, A4 e A5 tiveram uma abordagem qualitativa. No que se refere a coleta de dados, a forma mais frequente foi a aplicação de questionários, presente em A2, A5, D1 e D2. Em D3 a coleta foi feita mediante a aplicação de teste diagnóstico. Já em A1 os documentos oficiais foram a única fonte de coleta.

No que tange aos sujeitos da pesquisa, observamos que em A3, A4, D1 e D3 os sujeitos foram os alunos, em D2 foi os docentes e em A2, A5 e A6 foram ambos. Já A1 teve como sujeito os autores dos livros didáticos analisados. Quanto ao espaço utilizado na aplicação da pesquisa, observamos que os autores de D2 e D3 usaram os seus próprios alunos e a estrutura da própria escola onde trabalhavam. Já os pesquisadores em A2, A3, A5 e A6 utilizaram outro lugar. Não observamos aplicação em A1, A4 e D1.

As pesquisas D1, D2 e D3 trataram a temática central (ensino de relações métricas no triângulo retângulo) através de sequências didáticas de forma direta, enquanto que em A1, A2, A3, A4 e A5 é vista de forma indireta. Notamos ainda que o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação foi estudado em A2 e A6.

De um modo geral, as pesquisas analisadas apontaram que se faz necessário pensar cada vez mais em práticas de ensino diferenciadas, que coloquem o aluno não apenas no centro do processo, mas como peça ativa na (re)construção de conhecimentos matemáticos.

2.1.1. Estudos diagnósticos

Embora o agrupamento proposto na BNCC não seja obrigatório para a construção do desenho curricular de Matemática nas escolas e sistemas de ensino, mas apenas exemplo de um possível arranjo a ser adotado, este costuma estar dividido em cinco unidades temáticas, a saber: (1) Números, (2) Álgebra, (3) Geometria, (4) Grandezas e Medidas e (5) Probabilidade e Estatística.

No que diz respeito à Geometria, as diversas utilidades que a mesma tem no dia a dia das pessoas, bem como suas aplicações em diferentes ramos das ciências como, por exemplo, nas Engenharias, fazem com que essa parte da matemática tenha um papel relevante no currículo escolar.

Documentos oficiais como a BNCC, destacam que os estudos da geometria nas séries finais do Ensino Fundamental devem consolidar e ampliar as aprendizagens já realizadas.

A Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BNCC, 2018, p. 272).

Além disso, para balizar o trabalho docente, a BNCC do 9º ano do Ensino Fundamental traz, entre os objetos de conhecimento a serem trabalhados, o ensino das relações métricas no triângulo retângulo, visando a obtenção das seguintes habilidades:

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (Brasil, 2018, p. 319).

Em que pese sua importância, o ensino de geometria costuma enfrentar dificuldades com consequências graves para o processo de aprendizagem. O resultado do Saeb 2021, por exemplo, revelou que houve uma queda de desempenho dos estudantes brasileiros quando comparados com o resultado da edição do Saeb 2019, com mais estudantes concentrados nos níveis mais baixos de proficiência em Matemática. No Quadro 3, temos um recorte desse estudo onde é possível confrontar os resultados de Matemática dos estudantes paraenses no 9º ano do Ensino Fundamental com a média nacional.

Quadro 3 – Resultados de Matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental

UF	Total de estudantes nos níveis 0, 1, 2 ou 3 da escala de proficiência (em %)	Proficiência média dos estudantes (em pontos)
Brasil	62,6	256,0
Pará	79,5	236,5

Fonte: Adaptado de Saeb (2021).

Considerando a metodologia de organização da escala de referência adotada pelo Saeb, essa fotografia revela que 79,5% dos estudantes paraenses no 9º ano do Ensino Fundamental ficaram distribuídos nos níveis 0, 1, 2 ou 3 da escala de proficiência em Matemática, com uma proficiência média de apenas 236,5 pontos. Essa pontuação ficou abaixo dos 256,0 pontos da proficiência média nacional, representando 62,6% dos estudantes brasileiros nessa faixa de ensino.

Diante desses números, é possível inferir que estes estudantes não adquiriram habilidades para resolver problemas utilizando o Teorema de Pitágoras, uma vez que estas habilidades só estão presentes nos níveis 6 e 7 da escala de proficiência considerada.

Destaca-se ainda, que essa baixa proficiência apontada pela escala de referência do Saeb para habilidades geométricas específicas, não está sendo superada durante o Ensino Médio e podem ser observadas nas provas do ENEM. Um exemplo disso está no recorte que apresentamos no Quadro 4, contendo o percentual de aproveitamento dos alunos das escolas da rede estadual do Pará, no município de Belém, nas questões que buscavam avaliar a competência: utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Quadro 4 – Aproveitamento - ENEM de 2017 a 2022 - Município de Belém (PA)

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.							
Ano	2017	2018	2019	2020	2021	2022	Média
Aproveitamento (em %)	27,6	29,3	21,2	31,8	20,1	25,5	25,9

Fonte: elaborado pelo próprio autor⁹ (2024).

No cenário internacional, os mais recentes resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) 2022, divulgados pelo INEP¹⁰ mostraram que as médias brasileiras de 2022 foram praticamente as mesmas de 2018 em leitura, ciências e matemática. Apesar da média da OCDE¹¹ nesta edição do estudo ter sido a menor em toda a série histórica, os estudantes brasileiros

⁹ Dados compilados a partir do site <https://www.zbs.com.br/enem-antecedentes>

¹⁰ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

¹¹ Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

obtiveram pontuação inferior a ela nas três disciplinas analisadas.

Em relação à Matemática, o Brasil apresentou um desempenho médio de 379 pontos, pontuação que é inferior à média de países vizinhos como Chile (412), Uruguai (409) e Peru (391). Entre os estudantes brasileiros, 73% registraram baixo desempenho nesta disciplina (abaixo do nível 2¹²), bem superior ao percentual verificado nos países membros da OCDE, onde o número de estudantes que não atingiram o nível 2 foi de 31%.

Todos esses números corroboram nosso sentimento, como professor do Ensino Fundamental e Médio com mais de 30 anos de experiência, de que os alunos continuam chegando ao 1º ano do Ensino Médio sem ter estudado, ou com baixa aprendizagem sobre esse importante tema, haja vista as dificuldades observadas quando do estudo sobre a relação fundamental da trigonometria ou do cálculo da distância entre dois pontos. Diante desse sentimento, realizamos uma pesquisa de campo procurando resposta a seguinte inquietação: que indícios de aprendizagem os alunos do 1º ano do Ensino Médio demonstram sobre o teorema de Pitágoras?

Para isso, definimos como objetivo geral realizar um diagnóstico da aprendizagem sobre o teorema de Pitágoras a partir da análise de questionários aplicados junto a uma amostra com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Pará, e como objetivos específicos: (1) identificar o perfil sócio educacional da amostra pesquisada, (2) verificar junto à amostra que metodologias e avaliações foram utilizadas pelos professores de matemática durante o ensino do teorema de Pitágoras e (3) constatar quais indícios de conhecimentos sobre o teorema de Pitágoras foram absorvidos pelos alunos.

O Campus onde a pesquisa foi realizada pertence a uma escola da rede federal com uma história centenária na oferta de vagas na Educação Básica. Localizada em Belém, possuía 1242 alunos ativos entre 02 e 06/09/2024, período em que o questionário foi aplicado, distribuídos nas três séries do Ensino Médio, sendo que desses, 460 estavam cursando o 1º ano em uma das 15 turmas mantidas pela instituição nos turnos da manhã e tarde.

A amostra considerada para a realização do diagnóstico representou 15,65% da população elegível e foi formada por 4 turmas do período da tarde, escolhidas de forma aleatória, totalizando 72 alunos do 1º ano do Ensino Médio, após a exclusão

¹² O nível 2 é considerado pela OCDE como o padrão mínimo para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania.

daqueles que não apresentaram o TCLE¹³ assinado por um responsável legal.

O questionário utilizado para a produção dos dados, disponível no ANEXO A, foi formado por duas partes. A primeira buscava conhecer o perfil sócio educacional do participante, seu interesse pela Matemática, bem como os seus sentimentos diante de uma avaliação. A segunda parte continha uma tabela para o participante informar se lembrava, ou não, de ter estudado o nosso objeto de pesquisa, além de outros conhecimentos prévios trabalhados nas séries iniciais e finais do Ensino Fundamental. Também buscávamos conhecer o grau de dificuldade que o mesmo teve para aprender cada um dos conhecimentos listados ali.

Para confirmar ou refutar as afirmações prestadas através da tabela, cada participante foi submetido a um teste de verificação de aprendizagem, disponível no ANEXO C, composto por dez questões sobre o objeto pesquisado, contendo cinco alternativas cada, mas com apenas uma resposta correta.

Cada uma das dez questões objetivas sobre o componente teorema de Pitágoras foi classificada por nós em três níveis de dificuldade, de acordo com a quantidade de habilidades envolvidas para a sua resolução, conforme indicado a seguir no Quadro 5.

Quadro 5 – Classificação das questões do teste por nível de dificuldade

Questão	Habilidades envolvidas	Nível de dificuldade
1	Conceito e classificação de ângulos	Fácil
2	Classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos	Fácil
3	Conceitos de ângulos e definição de triângulo retângulo.	Fácil
4	Identificação de elementos em um triângulo retângulo.	Fácil
5	Identificação de elementos em um triângulo retângulo e das relações métricas com os elementos de um triângulo retângulo.	Médio
6	Identificação de elementos em um triângulo retângulo e das relações métricas com os elementos de um triângulo retângulo.	Médio
7	Equivalência entre medidas de segmentos, transformação de unidades de medidas de comprimento, identificação dos lados de um triângulo retângulo e aplicação do Teorema de Pitágoras.	Difícil
8	Aplicação do Teorema de Pitágoras	Médio
9	Propriedade da desigualdade triangular e aplicação do Teorema de Pitágoras.	Difícil
10	Relações métricas no triângulo retângulo.	Médio

Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir do protocolo da pesquisa (2024).

¹³ Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, disponível no ANEXO B.

Destacamos a seguir a análise do resultado de quatro questões desse teste de verificação, a começar pela quarta questão, cujo nível de dificuldade foi classificado como de fácil resolução. Aqui o nosso objetivo foi verificar se o participante conseguia identificar e relacionar as medidas indicadas na figura com cada um dos elementos do triângulo, habilidade necessária para resolver e elaborar problemas envolvendo a aplicação das relações métricas, conforme previsto na EF09MA14. O resultado revelou que 51% dos participantes que responderam o teste acertaram a questão.

A segunda questão que analisamos foi a quinta questão, que consideramos ter um nível de dificuldade médio. Nosso objetivo aqui foi verificar se o participante conseguia reconhecer relações métricas, inclusive o teorema de Pitágoras, condição adquirida por quem desenvolveu a habilidade EF09MA13. Ao observar o resultado percebemos que apenas 14% dos participantes assinalaram a alternativa correta.

A terceira questão analisada foi a sexta questão, cujo nível de dificuldade também consideramos mediano. Os resultados apontaram que apenas 31% dos participantes conseguiram mobilizar diferentes registros de representação do teorema de Pitágoras, nosso objetivo ao propor a questão.

Por fim, analisamos a sétima questão do teste, que consideramos ter um nível de dificuldade difícil. Nosso objetivo aqui era aferir a capacidade do participante de acionar um conjunto de informações, entre elas o teorema de Pitágoras, para resolver problemas envolvendo o cálculo de medidas acessíveis, conforme previsto na EF09MA14. O resultado indicou que apenas 14% dos participantes adquiriram a habilidade requerida em sua plenitude ao final do 9º ano do Ensino Fundamental.

O recorte das questões analisadas revelou percentuais de acerto muito baixo, mesmo entre aqueles que afirmaram se lembrar de terem estudado o assunto avaliado. Isto permite responder a pergunta inicial com boa margem de segurança, e afirmar que a amostra pesquisada apresenta baixos índices de aprendizagem sobre o teorema de Pitágoras. Esses resultados não só confirmaram os nossos sentimentos iniciais, como também reforçam a necessidade de realizar novas pesquisas que tenham como objetivo a criação de propostas de ensino diferenciadas, capazes de despertar o interesse do aluno pela Matemática, contribuindo assim para a melhoria do processo de aprendizagem.

2.1.2. Análise de Livros Didáticos de Matemática

Segundo o site¹⁴ do Ministério da Educação, o PNLD¹⁵ tem suas origens na publicação do Decreto-Lei nº 93, de 21/12/1937 por ocasião da criação do Instituto Nacional do Livro, sendo hoje o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino no Brasil.

Entre avanços e recuos motivados por limitações orçamentárias, teve em 1992 sua distribuição nacional comprometida e o atendimento restrito até a 4ª série do Ensino Fundamental. Após a vinculação de recursos por meio da Resolução CD/FNDE nº 6, em julho de 1993, um fluxo regular de verbas foi estabelecido, permitindo com que a partir de 1995 a distribuição do livro didático voltasse a ser universalizado a todo o Ensino Fundamental.

Em 1997 a responsabilidade pela execução do PNLD foi transferida integralmente para o FNDE¹⁶. O programa foi ampliado e o Ministério da Educação passou a adquirir, de forma continuada, livros didáticos de alfabetização, língua portuguesa, matemática, ciências, estudos sociais, história e geografia para todos os alunos de 1ª a 8ª série do ensino fundamental público.

Os dados disponíveis até a data consultada dão conta de que na aquisição integral dos livros e materiais didáticos no PNLD 2024 para os anos finais do Ensino Fundamental foram mobilizados um volume de recursos superior a R\$ 921.300.000,00 beneficiando quase 9.800.000 alunos nas mais de 46.300 escolas em todo o território nacional.

A apresentação do Guia Digital do PNLD 2024 (Objeto 1) informa que “as obras presentes neste Guia foram aprovadas na avaliação pedagógica realizada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e produzidas, com exclusividade, e em consonância à Base Nacional Comum Curricular/BNCC” (Brasil, 2024).

Uma vez que as obras aprovadas chegarão às escolas em contexto pós-pandemia, o Guia pondera ainda que:

a avaliação buscou assegurar que elas promovam a leitura e o estímulo à atitude investigativa dos estudantes, como forma de garantir que eventuais lacunas ou problemas de aprendizagem decorrentes do período de isolamento social sejam sanados durante o ciclo do PNLD 2024 (Brasil,

¹⁴ <https://www.gov.br/fnde/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro>. Acesso em: 27 abr. 2025.

¹⁵ Programa Nacional do Livro Didático

¹⁶ Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

2024).

Entre as obras selecionadas, estão 13 coleções de Matemática, das quais foi tomado como amostra o volume referente ao 9º ano das três coleções mais escolhidas entre as escolas da rede pública do município de Belém do Pará, conforme dados do Relatório de escolha do PNLD 2024 – Objeto 1, relacionadas no Quadro 6, para analisar como foi tratado o objeto matemático Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

Quadro 6 – Coleções de Matemática – PNLD 2024 – Belém/PA

Ordem	Coleção	Editores	Ano de publicação	Autor(es)
C1	A Conquista Matemática	FTD	2022	José Ruy Giovanni Júnior
C2	Matemática Bianchini	Moderna	2022	Edwaldo Bianchini
C3	Matemática e Realidade	Saraiva	2022	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Um dos pontos que direcionamos o nosso olhar foi com relação ao capítulo do livro em que o autor apresentou o nosso objeto matemático. Este é um ponto importante, pois conforme lembra Silva (2024),

[...] quando o professor da educação básica se utiliza do livro didático para o processo de ensino dos alunos, normalmente os professores buscam seguir a ordem em que os assuntos aparecem no livro didático e isso pode implicar ou não na aprendizagem do referido conteúdo. Se um conteúdo aparece nos capítulos finais, pode ocorrer de os docentes não conseguirem abordar esse conteúdo com os alunos (Silva, 2024, p.56-57).

Na coleção C2, observamos que o autor adotou a denominação Capítulo para estruturar a divisão do conteúdo, utilizando para tal um total de 12 capítulos. O *Capítulo 8 – Triângulo Retângulo* foi utilizado na apresentação do nosso objeto matemático. Já os autores das coleções C1 e C3, adotaram uma forma mesclada para distribuir o conteúdo, utilizando a nomenclatura Capítulo para subdividir os assuntos nas Unidades, sendo que em C1 a numeração dos capítulos é reiniciada a cada nova unidade, enquanto que em C3 a numeração dos Capítulos é sequenciada, mesmo com o início de uma nova Unidade.

Deste modo, a coleção C3 ficou dividida em 19 Capítulos distribuídos em 9 Unidades, sendo o *Capítulo 11: Relações métricas no triângulo retângulo* da Unidade 5 utilizado para abordar o nosso objeto de pesquisa. Por outro lado, os

conteúdos em C1 ficaram distribuídos em 9 Unidades, sendo os Capítulos 1 e 2 da *Unidade 7 – Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência*, utilizados para apresentar o nosso objeto matemático.

Para colaborar com o planejamento do professor, os autores apresentam sugestões para a distribuição dos conteúdos. Em todas as coleções analisadas, os cronogramas bimestrais apresentados sugerem que o objeto pesquisado seja abordado no 3º bimestre letivo, sendo que em C3 a apresentação é feita após 53% do conteúdo, contra 58% de C2 e 66% de C1. A depender do andamento do ano letivo, a adoção de qualquer sugestão de distribuição bimestral apresentada pelos autores poderá ocasionar do assunto relações métricas no triângulo retângulo “não chegar a ser trabalhado pelos professores de Matemática”, conforme ponderou Silva (2024, p.57).

Os descritores considerados no Quadro 7 foram adaptados a partir dos trabalhos de Fonseca (2013), Masetti (2016) e Silva (2024) visando atender aos PCN (1998) e permitir sua utilização na análise de livros didáticos, independentemente do objeto matemático estudado.

Quadro 7 – Descritores considerados na análise dos livros didáticos

Categoria	Subcategoria		O que observar no livro didático?
Situações	Introdução/Motivação		O autor apresentou alguma situação-problema dentro de um contexto real para estimular o interesse dos alunos pelo [insira o seu objeto matemático] e motivar a sua aprendizagem?
	Exemplos (tarefas resolvidas)		O autor apresentou exercícios resolvidos como exemplo para os alunos, realizou uma demonstração ou resolveu o exercício passo a passo, justificando cada passagem, apontando a definição ou a propriedade que foi utilizada, que lhe permitisse seguir uma determinada lógica indutiva?
	Tarefas propostas aos alunos	Conhecimentos prévios	Há exercícios que permitam o aluno relembrar assuntos que sejam pré-requisitos para o estudo do [insira o seu objeto matemático]?
		Conhecimentos novos	Há atividades de representação, aplicação, exploração, manipulação, argumentação, demonstração, investigação ou modelação, que permita aos alunos desenvolver novas habilidades e conhecimentos?
Linguagem	Formal		O autor utilizou a linguagem formal (linguagem natural, numérica, simbólica, algébrica, gráfica ou tabular) para apresentar o [insira o seu objeto matemático]?

	Informal	O autor aproximou a linguagem formal da linguagem dos alunos para permitir uma melhor compreensão do [insira o seu objeto matemático]?
Conceito	Explícito	Os conceitos foram descritos de forma clara?
	Implícito	Os conceitos foram descritos de forma a levar o aluno a deduzir o conhecimento?
Proposições	Forma como o objeto pesquisado foi apresentado no livro didático.	Os conhecimentos prévios necessários foram recordados?
		O [insira o seu objeto matemático] foram provadas, demonstradas ou justificadas?
		O autor mostrou sua utilização/aplicação em exercícios resolvidos ou só realizou a sua exposição?
Procedimentos	Formas sugeridas pelos autores para resolver um exercício.	O autor utilizou técnicas diferentes para resolver os exercícios propostos ou apenas uma em cada caso?
		Os procedimentos adotados pelo autor na resolução dos exercícios foram justificados? Ou os exercícios foram resolvidos de forma automatizada?
		O autor fez uso de novas tecnologias, como por exemplo: Geogebra, Google Forms, Quiz, etc.?
Argumentação	Tipos de argumentos utilizados nos desenvolvimentos apresentados.	O autor utilizou uma prática discursiva baseada na linguagem verbal ou gráfica para convencer o aluno/leitor sobre a validade do [insira o seu objeto matemático]?
		Qual o tipo de prova foi utilizado pelo autor (direta, por contraposição ou por absurdo)?

Fonte: Adaptado de Fonseca (2013), Masetti (2016) e Silva (2024).

No Quadro 8, consideramos os critérios propostos no Quadro 7 durante a análise das coleções C1, C2 e C3 relacionado ao objeto matemático pesquisado, isto é: Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

Quadro 8 – Descritores considerados na análise das coleções C1, C2 e C3

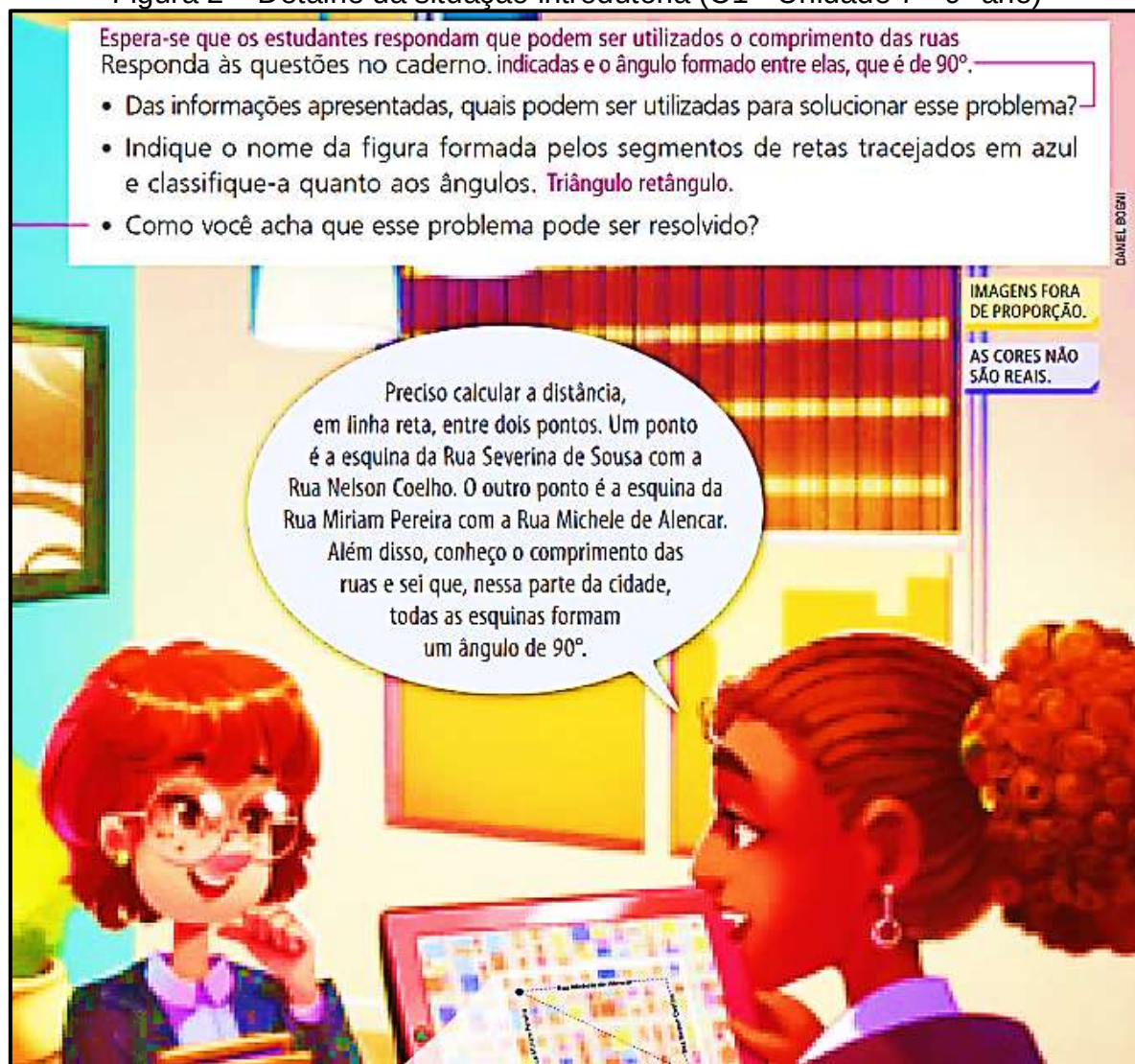
Categoria	Subcategoria	O que observar no livro didático?
Situações	Introdução/Motivação	O autor apresentou alguma situação-problema dentro de um contexto real para estimular o interesse dos alunos pelas relações métricas no triângulo retângulo e motivar a sua aprendizagem?

	Exemplos (tarefas resolvidas)		O autor apresentou exercícios resolvidos como exemplo para os alunos, realizou uma demonstração ou resolveu o exercício passo a passo, justificando cada passagem, apontando a definição ou a propriedade que foi utilizada, que lhe permitisse seguir uma determinada lógica indutiva?
	Tarefas propostas aos alunos	Conhecimentos prévios	Há exercícios que permitam o aluno relembrar assuntos que sejam pré-requisitos para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo?
		Conhecimentos novos	Há atividades de representação, aplicação, exploração, manipulação, argumentação, demonstração, investigação ou modelação, que permita aos alunos desenvolver novas habilidades e conhecimentos?
Linguagem	Formal		O autor utilizou a linguagem formal (linguagem natural, numérica, simbólica, algébrica, gráfica ou tabular) para apresentar as relações métricas no triângulo retângulo?
	Informal		O autor aproximou a linguagem formal da linguagem dos alunos para permitir uma melhor compreensão das relações métricas no triângulo retângulo?
Conceito	Explícito		Os conceitos foram descritos de forma clara?
	Implícito		Os conceitos foram descritos de forma a levar o aluno a deduzir o conhecimento?
Proposições	Forma como o objeto pesquisado foi apresentado no livro didático.		Os conhecimentos prévios necessários foram recordados?
			As relações métricas no triângulo retângulo foram provadas, demonstradas ou justificadas?
			O autor mostrou sua utilização/aplicação em exercícios resolvidos ou só realizou a sua exposição?
Procedimentos	Formas sugeridas pelos autores para resolver um exercício.		O autor utilizou técnicas diferentes para resolver os exercícios propostos ou apenas uma em cada caso?
			Os procedimentos adotados pelo autor na resolução dos exercícios foram justificados? Ou os exercícios foram resolvidos de forma automatizada?
			O autor fez uso de novas tecnologias, como por exemplo: Geogebra, Google Forms, Quiz, etc.?
Argumentação	Tipos de argumentos utilizados nos desenvolvimentos apresentados.		O autor utilizou uma prática discursiva baseada na linguagem verbal ou gráfica para convencer o aluno/leitor sobre a validade das relações métricas no triângulo retângulo?
			Qual o tipo de prova foi utilizado pelo autor (direta, por contraposição ou por absurdo)?

Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir do Quadro 7 (2025).

Conforme observado na Figura 2, o autor da coleção C1 inicia o assunto através de uma situação problema onde uma suposta Engenheira Civil precisa construir um segmento de reta unindo duas esquinas de uma cidade cujas ruas formam ângulo de 90° . Depois disso ele propõe 3 questões para que os alunos respondam no caderno. De acordo com o manual do professor, o autor espera que os alunos percebam que os segmentos de reta tracejados formam um triângulo retângulo, e que caso exista uma relação entre os lados desse triângulo, através do comprimento das ruas é possível encontrar a medida do segmento desejado.

Figura 2 – Detalhe da situação introdutória (C1 - Unidade 7 - 9º ano)

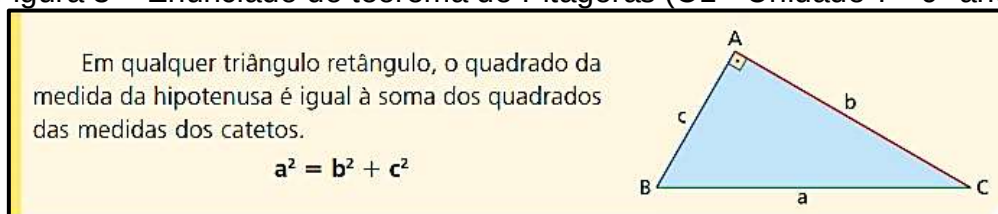


Fonte: Giovanni Júnior (2022, p. 205).

A seguir o autor recorda algumas características do triângulo retângulo, apresenta na seção PENSE E RESPONDA um triângulo retângulo de lados

conhecidos e com quadrados representados sobre cada um dos lados, seguido de 5 perguntas. Depois apresenta uma malha triangular contendo triângulos retângulos verdes e quadrados nas cores rosa e amarelo, seguida de uma tabela contendo a área dessas figuras, obtidas contando as partes de cada uma delas, considerando para isso a unidade de área indicada. Conclui que a área do quadrado com lado comum à hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados com um dos lado comum a cada um dos catetos, enunciando na sequência o teorema de Pitágoras, conforme observamos na Figura 3.

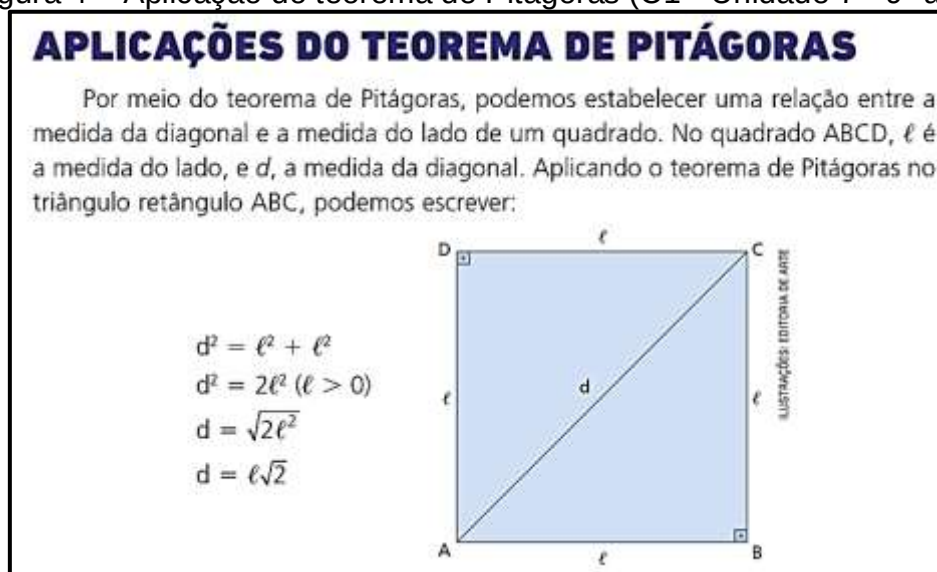
Figura 3 – Enunciado do teorema de Pitágoras (C1 - Unidade 7 - 9º ano)



Fonte: Giovanni Júnior (2022, p. 209).

Uma vez trabalhado o teorema de Pitágoras, o autor resolve 4 exercícios de aplicação e verificação do teorema, e apresenta uma demonstração algébrica do mesmo a partir da ideia de semelhança de triângulos. Na sequência, o autor traz na seção ATIVIDADES uma lista com 14 questões, algumas pra mostrar ou calcular, e outras na forma de problemas. Uma das atividades propostas está representada na Figura 4, a seguir.

Figura 4 – Aplicação do teorema de Pitágoras (C1 - Unidade 7 - 9º ano)



Fonte: Giovanni Júnior (2022, p. 214).

O Capítulo 1 se encerra com uma nova seção de ATIVIDADES contendo 12 aplicações do teorema de Pitágoras no cálculo da diagonal do quadrado, como na Figura 4, ou da altura do triângulo equilátero, seguidas de um desafio para representar a área de um triângulo equilátero em função da medida do seu lado.

O autor inicia o Capítulo 2 explicando o conceito de projeção ortogonal e, na sequência, mostra as demais relações métricas no triângulo retângulo a partir da ideia de semelhança de triângulos, se baseando na propriedade de que, qualquer que seja o triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa sempre divide o triângulo original em outros dois triângulos retângulos semelhantes entre si e ao triângulo inicialmente tomado.

Depois de apresentar um único exemplo resolvido, o autor propõe uma lista de exercícios contendo 7 questões e encerra o Capítulo com a seção POR TODA PARTE, destacada na Figura 5, apresentando um texto sobre a arquitetura enxaimel, um padrão de arquitetura de influência alemã muito comum na Região Sul do Brasil, onde a estrutura da torre (sem o telhado), lembra a forma de um prisma hexagonal.

Figura 5 – Seção do Capítulo 2 (C1 - Unidade 7 - 9º ano)

POR TODA PARTE

ARQUITETURA ENXAIMEL

A arquitetura enxaimel, presente em diversas construções na Região Sul brasileira, representa a influência da cultura alemã no Brasil. Leia, a seguir, o trecho de um texto sobre essa arquitetura.

A técnica enxaimel, ou *Fachwerk*, é um padrão arquitetônico atribuído historicamente às regiões germânicas da Europa central. Segundo Weimer (2005) o *Fachwerkbau* designa um padrão construtivo centenário, originário da sociedade feudal, em que as paredes são estruturadas por um tramado de madeira onde as peças horizontais, verticais e inclinadas são encaixadas entre si em que os tramos são posteriormente preenchidos com taipa, adobe, pedra, tijolos [...] etc.

FRANZEN, Douglas Orestes; EIDT, Simone; TESSING, Daniele. A arquitetura enxaimel: identidade, memória e dimensão patrimonial em Itapiranga/SC. *Revista de Arquitetura IMED*, Passo Fundo, v. 7, n. 1, p. 5-27, jan./jun. 2018. Disponível em: <https://seer.imed.edu.br/index.php/arqimed/article/view/2558/1867>. Acesso em: 28 mar. 2022.



► Castelinho Caracol, construído entre 1913 e 1915 no município de Canela (RS), 2019, é um exemplo de arquitetura enxaimel.

Fonte: Giovanni Júnior (2022, p. 221).

O Quadro 9 apresentado a seguir tras uma síntese do que foi observado durante a análise dos Capítulos 1 e 2 da *Unidade 7 – Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência*, presentes no volume referente ao 9º ano da coleção C1 – A Conquista Matemática, do autor José Ruy Giovanni Júnior, publicada no ano de 2022.

Quadro 9 – Resultado da análise da coleção C1 – A Conquista Matemática

Categoria	Subcategoria	O que observar no livro didático?	Informações capturadas durante a análise
Situações	Introdução/Motivação	O autor apresentou alguma situação-problema dentro de um contexto real para estimular o interesse dos alunos pelas relações métricas no triângulo retângulo e motivar a sua aprendizagem?	Sim, o autor iniciou o assunto através de uma situação problema onde uma Eng ^a Civil precisa construir um segmento de reta unindo duas esquinas de uma cidade onde as ruas formam 90°. Não observamos a resolução da situação proposta. Na seção <i>UM NOVO OLHAR</i> (p. 229) no final da Unidade, o autor retoma o problema inicial, informa a medida das ruas e pergunta qual a distância que a Eng ^a precisa calcular.
	Exemplos (tarefas resolvidas)	O autor apresentou exercícios resolvidos como exemplo para os alunos, realizou uma demonstração ou resolveu o exercício passo a passo, justificando cada passagem, apontando a definição ou a propriedade que foi utilizada, que lhe permitisse seguir uma determinada lógica indutiva?	Sim, na seção <i>ATIVIDADES</i> (p. 221-213) o autor apresentou 4 exercícios resolvidos e uma lista de atividades com 14 questões.

	Tarefas propostas aos alunos	Conhecimentos prévios	Há exercícios que permitam o aluno lembrar assuntos que sejam pré-requisitos para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo?	Não foi observada a apresentação de exercício, ou alguma outra referência, que indicasse ao aluno a necessidade do mesmo em dominar semelhança de triângulos como pré-requisito para compreender as relações métricas no triângulo retângulo.
		Conhecimentos novos	Há atividades de representação, aplicação, exploração, manipulação, argumentação, demonstração, investigação ou modelação, que permita aos alunos desenvolver novas habilidades e conhecimentos?	Sim, na seção <i>POR TODA PARTE</i> (p. 211) o autor apresentou uma releitura do problema chinês do bambu quebrado pelo vento publicado por Bhaskara. No manual do professor, o autor sugeriu como atividade complementar que o professor estimulasse a criatividade dos alunos propondo que os mesmos elaborassem um problema, com linguagem similar a de Bhaskara, que pudesse ser resolvido pelo teorema de Pitágoras.
Linguagem	Formal		O autor utilizou a linguagem formal (linguagem natural, numérica, simbólica, algébrica, gráfica ou tabular) para apresentar as relações métricas no triângulo retângulo?	Sim, em vários momentos ao longo da Unidade analisada.
	Informal		O autor aproximou a linguagem formal da linguagem dos alunos para permitir uma melhor compreensão das relações métricas no triângulo retângulo?	Sim, o autor algumas vezes chama de <i>lados menores</i> e <i>lado maior</i> para se referir aos catetos e a hipotenusa, respectivamente, indicando sua preocupação em ajudar o aluno a relacionar os lados do triângulo retângulo com mais facilidade e segurança.

Conceito	Explícito	Os conceitos foram descritos de forma clara?	Sim.
	Implícito	Os conceitos foram descritos de forma a levar o aluno a deduzir o conhecimento?	Não.
Proposições	Forma como o objeto pesquisado foi apresentado no livro didático.	Os conhecimentos prévios necessários foram recordados?	O autor não revisou os casos de semelhança de triângulos, mas os utiliza nas demonstrações das relações métricas.
		As relações métricas no triângulo retângulo foram provadas, demonstradas ou justificadas?	Sim, as relações métricas, entre elas o teorema de Pitágoras, foram demonstradas pelo autor de forma algébrica com auxílio dos casos de semelhança de triângulos (p. 218-219).
		O autor mostrou sua utilização/aplicação em exercícios resolvidos ou só realizou a sua exposição?	Sim, o teorema de Pitágoras foi aplicado no cálculo da diagonal do quadrado (p. 214) e na obtenção da altura de um triângulo equilátero (p. 215), com dois exemplos resolvidos em cada caso, seguido de exercícios.
Procedimentos	Formas sugeridas pelos autores para resolver um exercício.	O autor utilizou técnicas diferentes para resolver os exercícios propostos ou apenas uma em cada caso?	Sim, o autor apresentou uma única resposta para os exercícios propostos.
		Os procedimentos adotados pelo autor na resolução dos exercícios foram justificados? Ou os exercícios foram resolvidos de forma automatizada?	Sim, o autor utilizou uma escrita que conversa com o leitor, permitindo com que o mesmo compreenda cada passo dado na resolução dos exercícios resolvidos.
		O autor fez uso de novas tecnologias, como por exemplo: Geogebra, Google Forms, Quiz, etc.?	O autor não fez uso de tecnologia. Inclusive o manual do professor orienta que as demonstrações das relações métricas sejam feitas na lousa.

Argumentação	Tipos de argumentos utilizados nos desenvolvimentos apresentados.	O autor utilizou uma prática discursiva baseada na linguagem verbal ou gráfica para convencer o aluno/leitor sobre a validade das relações métricas no triângulo retângulo?	Sim, o autor fez uso de imagens de figuras que ajudaram a compreender a linguagem verbal adotada na apresentação do assunto.
		Qual o tipo de prova foi utilizado pelo autor (direta, por contraposição ou por absurdo)?	O autor adotou como técnica a demonstração direta e os argumentos utilizados como prova foram, em sua maioria, algébricos com o auxílio de imagens geométricas.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Na coleção C2, o autor optou por introduzir o assunto através da imagem de um monumento construído em homenagem a Pitágoras na ilha de Samos, na Grécia, acompanhado de um breve texto de caráter bibliográfico sobre Pitágoras e a escola Pitagórica, seguida de uma revisão sobre classificação de triângulos quanto aos ângulos, ângulos complementares e semelhança de triângulos, conforme observado no destaque da Figura 6.

Figura 6 – Conhecimentos prévios revisados (C2 - Capítulo 8 - 9º ano)

Em relação aos ângulos, sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, nos triângulos retângulos, a soma das medidas dos dois ângulos agudos de cada triângulo é 90°, ou seja, eles são complementares.

$m(\hat{A}_1) + m(\hat{B}) = 90^\circ$
 $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90^\circ$

$m(\hat{A}_1) + m(\hat{B}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$, então $m(\hat{A}_1) = m(\hat{C})$ ou $\hat{A}_1 \cong \hat{C}$

$m(\hat{A}_2) + m(\hat{C}) = 90^\circ$
 $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90^\circ$

$m(\hat{A}_2) + m(\hat{C}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$, então $m(\hat{A}_2) = m(\hat{B})$ ou $\hat{A}_2 \cong \hat{B}$

Observação

► Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então eles são triângulos semelhantes. Chamamos esse fato de caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança.

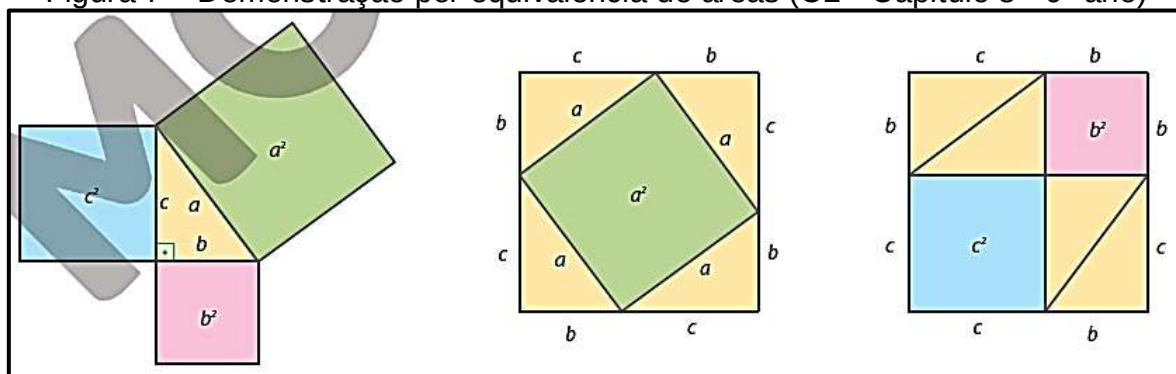
Fonte: Bianchini (2022, p. 175).

O autor mostra a validade da relação conhecida como teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo com lados medindo 3, 4 e 5, a partir da observação de

que a área do quadrado, construído sobre maior lado, é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados menores. Depois enuncia o teorema, estendendo sua validade para todos os triângulos retângulos.

Na sequência, o autor apresenta uma demonstração do teorema de Pitágoras, Figura 7, fazendo uso da equivalência de medidas de áreas. Essa demonstração é bastante interessante, visto que também pode ser trabalhada com materiais manipuláveis, contribuindo para seu entendimento a partir da visualização da mesma.

Figura 7 – Demonstração por equivalência de áreas (C2 - Capítulo 8 - 9º ano)



Fonte: Bianchini (2022, p. 176).

Após resolver um exemplo, o autor trás na seção EXERCÍCIOS PROPOSTOS, uma lista com 13 questões para serem resolvidas no caderno, sendo a última uma oportunidade de o aluno criar um novo problema com base no assunto trabalhado. Já na seção PARA SABER MAIS o autor fala sobre triângulos pitagóricos, tema que trataremos com detalhes mais adiante.

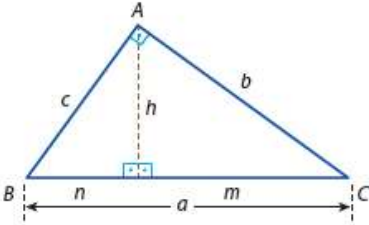
Na sequência, o autor apresentou aplicações do teorema de Pitágoras no cálculo da diagonal do quadrado e da altura de um triângulo equilátero, seguido das demonstrações algébricas das relações métricas no triângulo retângulo, inclusive do teorema de Pitágoras, conforme observamos na Figura 8, sempre acompanhada de listas de exercícios propostos.

O capítulo se encerra com o autor utilizando o teorema de Pitágoras para calcular a distância entre dois pontos quaisquer no plano cartesiano, ideia trabalhada no Ensino Médio durante o estudo do ponto em Geometria Analítica.

Figura 8 – Demonstração algébrica (C2 - Capítulo 8 - 9º ano)

Outra demonstração do teorema de Pitágoras

Dado um triângulo retângulo ABC , vamos provar que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



Hipótese: $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em A .
Tese: $b^2 + c^2 = a^2$

• **Demonstração**

Como o quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela, temos:

$$b^2 = am \quad \text{e} \quad c^2 = an$$

Adicionando membro a membro essas duas igualdades, temos:

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n) \quad \leftarrow \text{Colocamos } a \text{ em evidência.}$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \quad \leftarrow \text{Substituímos } (m + n) \text{ por } a.$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Desse modo, também provamos o teorema de Pitágoras.

Fonte: Bianchini (2022, p. 186).

No Quadro 10 apresentamos uma síntese do que foi observado durante a análise do *Capítulo 8 – Triângulo Retângulo*, presente no volume referente ao 9º ano da coleção C2 – Matemática Bianchini, do autor Edwaldo Bianchini, publicada no ano de 2022.

Quadro 10 – Resultado da análise da coleção C2 – Matemática Bianchini

Categoria	Subcategoria	O que observar no livro didático?	Informações capturadas durante a análise
Situações	Introdução/Motivação	O autor apresentou alguma situação-problema dentro de um contexto real para estimular o interesse dos alunos pelas relações métricas no triângulo retângulo e motivar a sua aprendizagem?	Sim, o assunto foi introduzido por meio da imagem de um monumento construído em homenagem a Pitágoras na ilha de Samos, na Grécia, seguido de um breve texto sobre Pitágoras e a escola por ele fundada.

	Exemplos (tarefas resolvidas)		O autor apresentou exercícios resolvidos como exemplo para os alunos, realizou uma demonstração ou resolveu o exercício passo a passo, justificando cada passagem, apontando a definição ou a propriedade que foi utilizada, que lhe permitisse seguir uma determinada lógica indutiva?	Sim, porém, consideramos que 13 exercícios resolvidos em todo o Capítulo 8 representa uma quantidade muito baixa diante da importância do objeto matemático estudado.
	Tarefas propostas aos alunos	Conhecimentos prévios	Há exercícios que permitam o aluno lembrar assuntos que sejam pré-requisitos para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo?	Sim, na seção <i>EXERCÍCIOS PROPOSTOS</i> (p. 175) o autor apresentou 2 questões com esse propósito para que o aluno resolvesse no caderno.
		Conhecimentos novos	Há atividades de representação, aplicação, exploração, manipulação, argumentação, demonstração ou modelação, que permita aos alunos desenvolver novas habilidades e conhecimentos?	Sim, na seção <i>EXERCÍCIOS PROPOSTOS</i> (p. 177-178) o autor apresentou 5 questões com esse propósito para que o aluno resolvesse no caderno, e na seção <i>PARA SABER MAIS</i> (p. 179), o autor abordou os ternos pitagóricos e apresentou uma forma dos alunos encontrarem essas trincas de números.
Linguagem	Formal		O autor utilizou a linguagem formal (linguagem natural, numérica, simbólica, algébrica, gráfica ou tabular) para apresentar as relações métricas no triângulo retângulo?	Sim, em vários momentos do Capítulo analisado.
	Informal		O autor aproximou a linguagem formal da linguagem dos alunos para permitir uma melhor compreensão das relações métricas no triângulo retângulo?	Não, o autor optou por utilizar sempre a linguagem formal durante a apresentação do assunto.

Conceito	Explícito	Os conceitos foram descritos de forma clara?	Sim.
	Implícito	Os conceitos foram descritos de forma a levar o aluno a deduzir o conhecimento?	Sim, na seção <i>PENSE MAIS UM POUCO</i> (p. 179, 182 e 183) o autor traz atividades desafiadoras que possibilitam o aprofundamento do conteúdo.
Proposições	Forma como o objeto pesquisado foi apresentado no livro didático.	Os conhecimentos prévios necessários foram recordados?	Sim, o autor recordou: classificação de triângulos quanto aos ângulos, ângulos complementares e semelhança de triângulos.
		As relações métricas no triângulo retângulo foram provadas, demonstradas ou justificadas?	Sim, o autor demonstrou algebricamente as relações métricas com base na ideia de semelhança de triângulos e justificou geometricamente o teorema de Pitágoras.
		O autor mostrou sua utilização/aplicação em exercícios resolvidos ou só realizou a sua exposição?	Sim, o autor apresentou aplicações do teorema de Pitágoras no cálculo da diagonal do quadrado (p. 180) e da altura de um triângulo equilátero (p. 182), com exemplos resolvidos e exercícios propostos em cada caso.
Procedimentos	Formas sugeridas pelos autores para resolver um exercício.	O autor utilizou técnicas diferentes para resolver os exercícios propostos ou apenas uma em cada caso?	Sim, o autor apresentou uma resposta única para os exercícios propostos.
		Os procedimentos adotados pelo autor na resolução dos exercícios foram justificados? Ou os exercícios foram resolvidos de forma automatizada?	Sim, o autor justifica os procedimentos utilizados na resolução dos exercícios resolvidos, permitindo com que o leitor acompanhe o raciocínio desenvolvido e compreenda os passos dados durante a resolução.

		O autor fez uso de novas tecnologias, como por exemplo: Geogebra, Google Forms, Quiz, etc.?	Sim, no manual do professor o autor orienta o uso da calculadora durante a realização de algumas atividades propostas.
Argumentação	Tipos de argumentos utilizados nos desenvolvimentos apresentados.	O autor utilizou uma prática discursiva baseada na linguagem verbal ou gráfica para convencer o aluno/leitor sobre a validade das relações métricas no triângulo retângulo?	Sim, o autor utilizou imagens de figuras como forma de ajudar na compreensão da linguagem verbal adotada na apresentação do assunto.
		Qual o tipo de prova foi utilizado pelo autor (direta, por contraposição ou por absurdo)?	No Capítulo analisado, observamos a prevalência do método de prova direta, sendo os argumentos algébricos e geométricos os mais utilizados.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Para despertar o interesse do aluno pelo assunto, os autores de C3 iniciam o Capítulo 11 perguntando se dois personagens fictícios conseguiriam montar um quebra-cabeça retangular de dimensões 54cm e 72cm sobre uma mesa circular de 90cm de diâmetro. A resposta a esta pergunta é fornecida apenas na questão 9 da primeira seção de ATIVIDADES propostas, após a apresentação do assunto, mas o manual do professor recomenda que o mesmo estimule os alunos a encontrar a resposta apenas com os conhecimentos prévios que possuem.

Figura 9 – Relações métricas (C3 - Capítulo 11 - 9º ano)

Vamos explorar a semelhança dos triângulos ABC , DBA e DAC com as medidas indicadas nesses triângulos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \quad \textcircled{1}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \quad \textcircled{2}$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad \textcircled{3}$$

①, ② e ③ são relações métricas no triângulo retângulo.

Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (2022, p. 149).

Na sequência, os autores explicam a ideia de projeção ortogonal de ponto e segmento, apresentam os elementos de um triângulo retângulo e mostram

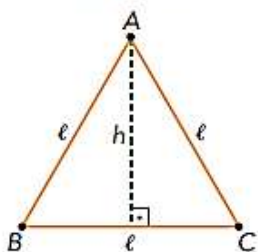
algebricamente as relações métricas a partir do conceito de semelhança de triângulos, conforme observamos na Figura 9.

Apresentadas as relações métricas no triângulo retângulo, os autores trazem uma seção de ATIVIDADES com quatro páginas de exercícios dos mais variados níveis de cobrança, alguns relacionando conhecimentos geométricos de anos anteriores e outros buscando contextualizar com situações do cotidiano. Destacamos, porém, que todos esses exercícios não foram precedidos de exemplos resolvidos, nem mesmo aqueles de aplicação imediata das relações, fato que poderá levar os alunos a apresentar certo grau de dificuldade para resolvê-los, exigindo maior atenção e intervenções mais frequentes por parte do professor.

Depois dessa seção de exercícios, os autores mostram aplicações do teorema de Pitágoras no cálculo da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero, como observado na Figura 10, com um único exemplo resolvido em cada caso, seguido de nova seção de ATIVIDADES.

Figura 10 – Aplicação do teorema de Pitágoras (C3 - Capítulo 11 - 9º ano)

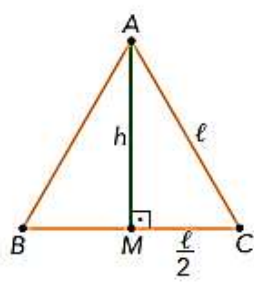
Na figura, ABC é um triângulo equilátero de lado medindo ℓ .



Vamos calcular a medida h da altura do triângulo em função da medida ℓ .
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMC , temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

Daí:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \quad (\sqrt{3} \approx 1,73)$$


Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (2022, p. 154).

O capítulo é finalizado com a seção NA HISTÓRIA, em destaque na Figura 11, onde os autores apresentam um relato histórico com informações gerais sobre Pitágoras e a escola pitagórica que, embora sejam importantes, sua utilização pouco contribui para a aprendizagem do assunto estudado.

Figura 11 – Seção NA HISTÓRIA (C3 - Capítulo 11 - 9º ano)

Na

História

Teorema de Pitágoras

Em uma plaqueta de argila babilônica – provavelmente do período entre 1900 a.C. e 1600 a.C. – encontrada em Susa, no Irã atual, pode estar registrado o mais antigo exemplo conhecido do uso do **teorema de Pitágoras**. Como isso pode ser explicado se Pitágoras viveu cerca de um milênio depois dessa época?

Pitágoras. Ilustração da enciclopédia *Os ensinamentos secretos de todos os tempos*, edição inglesa de 1928. Museu Condé, França.



Reprodução/Museu Condé, Chantilly, França.

Pitágoras refugiou-se na cidade de Metaponto, outra colônia grega no sul da Itália, onde ficou até sua morte, em 497 a.C. A escola, porém, sobreviveu por cerca de dois séculos, com seus membros dispersos pelo mundo grego.

Para a escola pitagórica, o saber por excelência era o saber matemático. Seus membros acreditavam que "o conhecimento é a maior das purificações". Assim, não é de estranhar que nessa escola tenha começado o cultivo da Matemática pela própria Matemática, ou seja, seu estudo sem visar a aplicações práticas. Além disso, os pitagóricos iniciaram a organização da Matemática – em particular da Geometria – por meio de teoremas e suas justificativas. A julgar por alguns rela-

Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (2022, p. 156).

No Quadro 11 apresentamos uma síntese do que foi observado durante a análise do *Capítulo 11: Relações métricas no triângulo retângulo* da Unidade 5, presente no volume referente ao 9º ano da coleção C3 – Matemática e Realidade, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, publicada no ano de 2022.

Quadro 11 – Resultado da análise da coleção C3 – Matemática e Realidade

Categoria	Subcategoria	O que observar no livro didático?	Informações capturadas durante a análise
Situações	Introdução/Motivação	O autor apresentou alguma situação-problema dentro de um contexto real para estimular o interesse dos alunos pelas relações métricas no triângulo retângulo e motivar a sua aprendizagem?	Sim, o assunto foi introduzido por meio de uma situação problema, onde os alunos dever verificar se dois personagens fictícios conseguirão montar um quebra-cabeça retangular de dimensões 54cm e 72cm sobre uma mesa circular de 90cm de diâmetro.

	Exemplos (tarefas resolvidas)		O autor apresentou exercícios resolvidos como exemplo para os alunos, realizou uma demonstração ou resolveu o exercício passo a passo, justificando cada passagem, apontando a definição ou a propriedade que foi utilizada, que lhe permitisse seguir uma determinada lógica indutiva?	Apenas 2 exercícios resolvidos foram observados em todo o Capítulo 11.
	Tarefas propostas aos alunos	Conhecimentos prévios	Há exercícios que permitam o aluno lembrar assuntos que sejam pré-requisitos para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo?	Na seção <i>ATIVIDADES</i> (p. 150-153) observa-se a presença de questões que exigem o domínio de assuntos já trabalhados, sem que o foco dos autores nessas questões tenha sido o de promover uma revisão desses assuntos.
		Conhecimentos novos	Há atividades de representação, aplicação, exploração, manipulação, argumentação, demonstração, investigação ou modelação, que permita aos alunos desenvolver novas habilidades e conhecimentos?	Sim, na seção <i>PARTICIPE</i> (p. 146 e 148) os autores buscam incentivar os alunos a levantar hipóteses e resolver problemas utilizando estratégias pessoais e trabalhando individualmente ou em dupla.
Linguagem	Formal		O autor utilizou a linguagem formal (linguagem natural, numérica, simbólica, algébrica, gráfica ou tabular) para apresentar as relações métricas no triângulo retângulo?	Sim, durante todo o Capítulo analisado.
	Informal		O autor aproximou a linguagem formal da linguagem dos alunos para permitir uma melhor compreensão das relações métricas no triângulo retângulo?	Não, os autores optaram por utilizar sempre a linguagem formal durante a apresentação do assunto.

Conceito	Explícito	Os conceitos foram descritos de forma clara?	Sim.
	Implícito	Os conceitos foram descritos de forma a levar o aluno a deduzir o conhecimento?	Sim, a seção <i>NA OLIMPÍADA</i> traz questões de provas oficiais da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), que fará o aluno analisar, pensar e relacionar diferentes conteúdos.
Proposições	Forma como o objeto pesquisado foi apresentado no livro didático.	Os conhecimentos prévios necessários foram recordados?	Sim, os autores retomaram a ideia de semelhança de triângulos abordada no Capítulo 10.
		As relações métricas no triângulo retângulo foram provadas, demonstradas ou justificadas?	Sim, os autores demonstraram algebricamente as relações métricas a partir do conceito de semelhança de triângulos. O teorema de Pitágoras foi provado geometricamente na seção <i>NA HISTÓRIA</i> .
		O autor mostrou sua utilização/aplicação em exercícios resolvidos ou só realizou a sua exposição?	Os autores mostraram aplicações do teorema de Pitágoras apenas no cálculo da diagonal do quadrado e da altura de um triângulo equilátero.
Procedimentos	Formas sugeridas pelos autores para resolver um exercício.	O autor utilizou técnicas diferentes para resolver os exercícios propostos ou apenas uma em cada caso?	Os autores apresentaram uma única resposta para os exercícios propostos.
		Os procedimentos adotados pelo autor na resolução dos exercícios foram justificados? Ou os exercícios foram resolvidos de forma automatizada?	Nos raros exercícios resolvidos no Capítulo analisado os autores fizeram o desenvolvimento de forma automatizada.

		O autor fez uso de novas tecnologias, como por exemplo: Geogebra, Google Forms, Quiz, etc.?	No Capítulo analisado não foi observado o uso ou a recomendação para a utilização de ferramentas tecnológicas.
Argumentação	Tipos de argumentos utilizados nos desenvolvimentos apresentados.	O autor utilizou uma prática discursiva baseada na linguagem verbal ou gráfica para convencer o aluno/leitor sobre a validade das relações métricas no triângulo retângulo?	Sim, os autores utilizaram imagens de figuras como forma de ajudar na compreensão da linguagem verbal adotada na apresentação do assunto.
		Qual o tipo de prova foi utilizado pelo autor (direta, por contraposição ou por absurdo)?	Prevaleceu o método de prova direta, sendo os argumentos algébricos e geométricos os mais utilizados pelos autores.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Percebemos um esforço dos autores das coleções analisadas em atender as exigências dos documentos oficiais da legislação educacional brasileira, em especial a BNCC, seja na forma da apresentação dos conteúdos, da inserção de seções específicas ou através da proposição de atividades que ajudem os alunos a desenvolverem as competências gerais e específicas da matemática. Contudo, tomamos como nossa a percepção de Silva (2024) quando afirmou que

[...] existem nos livros didáticos analisados traços do ensino tradicional, uma vez que há o desenvolvimento do conceito, seguido de exercícios para que os leitores possam praticar os problemas que foram desenvolvidos. Poucos autores fogem dessa abordagem tradicional (Silva, 2024, p.91).

Reconhecemos e valorizamos a importância do ensino tradicional diante das condições, muitas vezes desfavoráveis, das escolas públicas brasileiras, mas acreditamos que o livro didático possa ser melhor utilizado pelos professores.

Observamos também que em duas das coleções analisadas os autores introduziram o assunto através de uma situação problema real com propósito exploratório diferente do proposto por Cabral (2017).

Em que pese vários pesquisadores afirmarem que este esforço vem se consolidando nas sucessivas análises dos livros didáticos aprovados no PNLD,

ainda sentimos falta de metodologias de ensino alternativas, capazes de fazer com que o livro didático seja mais do que um suporte a aprendizagem dos alunos, e se configure em um instrumento, acessível e atualizado, de formação continuada aos professores do Ensino Básico.

2.1.3. Estudos experimentais

A realização de pesquisas experimentais no ensino de Matemática tem sido bastante utilizada e os resultados apresentados em Congressos, ou publicados em periódicos reconhecidos na área da Educação Matemática. Contudo, especificamente em relação ao objeto matemático pesquisado, o mapeamento realizado apontou, dentro do período de tempo levantado, apenas seis trabalhos publicados com esse tipo de proposta, todos já devidamente apresentados no capítulo sobre a revisão da literatura.

2.2. PERCEPÇÃO DOS ALUNOS

Apresentaremos a seguir novos dados da supracitada pesquisa de campo, realizada com uma amostra dos alunos do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola pública da rede federal no Estado do Pará, especificamente aqueles que apontam para a percepção que os componentes dessa amostra observada têm a respeito do ensino do teorema de Pitágoras.

2.2.1. Descrição dos dados

Além dos dados já citados, a pesquisa de campo sobre o ensino do teorema de Pitágoras também revelou que para 89% dos participantes, o professor do ano anterior demonstrava domínio do conteúdo. E mais, na opinião de 55,6% da amostra, as explicações dadas pelo professor foram consideradas excelentes, sendo que destes, 92,5% afirmaram que sempre, ou quase sempre, entenderam as explicações.

Contudo, menos de 10% da amostra afirmaram que os professores utilizaram uma situação problema como recurso metodológico para introduzir o ensino do teorema de Pitágoras, em clara desarmonia com o recomendado pelos os PCNEF¹⁷.

Os dados do campo apontaram também que quando as aulas de Matemática não despertavam a atenção dos alunos, as chances dele conseguir fazer relações entre o que foi ensinado e o seu dia a dia eram afetadas. As respostas mostraram ainda que quase 60% dos participantes sentia medo ou preocupação diante de uma avaliação em Matemática.

Com relação ao estudo do teorema de Pitágoras, 83,3% afirmaram já ter estudado o assunto, sendo que em quase 80% da amostra, as formas mais frequentes de exercitar esse componente curricular foram as tradicionais listas de exercícios, somadas as atividades presentes no livro didático. Importante destacar que, de acordo com o Censo Escolar 2023, apenas 63,4% das escolas públicas da Região Norte do país tinha acesso à Internet, fato que pode ajudar a compreender a relevância que muitos professores atribuem ao livro didático que, em alguns casos, é o único recurso didático disponível.

No entanto, Dante (1996) pondera que:

[...] o livro didático deve ser um meio e não o fim em si mesmo. Com base no conhecimento do aluno e no contexto social em que está inserida a escola, o professor modifica, complementa, insere novos problemas, atividades e exercícios àqueles do livro didático. E como se ele fosse reescrevendo o livro didático com seus alunos (Dante, 1996, p. 89).

Desta forma, em relação a utilização de listas de exercícios como forma de praticar o conteúdo e de complementar os exercícios presentes no livro didático, acreditamos que essa conduta adotada pelos professores tem potencial de proporcionar aos alunos um reforço no processo de aquisição do conhecimento.

¹⁷ Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental

3. AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

No presente capítulo mostraremos algebricamente as relações métricas no triângulo retângulo a partir dos casos de semelhança triangular, com destaque para o teorema de Pitágoras. Acrescentaremos algumas demonstrações geométricas desse teorema que normalmente não aparecem nos livros didáticos, as quais acreditamos terem potencial para contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático, bem como à formação inicial ou continuada dos professores de Matemática.

O capítulo trás ainda aplicações do teorema de Pitágoras, como no cálculo da diagonal do quadrado, da altura de um triângulo equilátero, do lado e do apótema de polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio R , da medida do triângulo áureo e da pirâmide áurea, além da relação fundamental da trigonometria e da distância entre dois pontos no plano.

Provaremos também a propriedade da desigualdade triangular e do teorema do triângulo inscrito em uma semicircunferência, resultados importantes no estudo dos triângulos. Antes, porém, apresentaremos as primeiras evidências históricas sobre o teorema de Pitágoras.

3.1. OS PRIMEIROS REGISTROS HISTÓRICOS

Boyer (1974, p.29) destaca que o teorema de Pitágoras “não aparece em forma nenhuma nos documentos egípcios encontrados, mas tabletas até do período babilônio antigo mostram que na Mesopotâmia o teorema era largamente usado”. Estima-se que essas tabletas babilônicas sejam datadas, aproximadamente, de 1900-1600 a.C., sendo o registro mais antigo que se tem notícia. Também existem evidências de que o teorema de Pitágoras era conhecido pelos chineses e indianos, porém não é possível precisar o período exato.

Ainda segundo Boyer (1974),

Um texto cuneiforme da coleção de Yale, por exemplo, contém um diagrama de um quadrado e suas diagonais em que o número 30 está escrito ao longo de um lado e os números 42; 25, 35 e 1; 24, 51, 10 ao longo da diagonal. O último número é evidentemente a razão entre os comprimentos da diagonal e do lado, e está expressa tão precisamente que concorda com

$\sqrt{}$ a cerca de 1 milionésimo. A precisão do resultado foi possível graças ao conhecimento do teorema de Pitágoras (Boyer, 1974, p.29).

Antes de esmiuçarmos um pouco mais esta afirmação, convém destacar que o sistema de numeração desenvolvido pelos babilônios era um sistema misto de base sexagesimal, isto é, utilizava o princípio posicional para representar números maiores que 60 e um sistema de agrupamento simples de base 10 para representar números menores que 60 por meio dos símbolos ∇ e $\triangleleft$, conforme observamos na Figura 12.

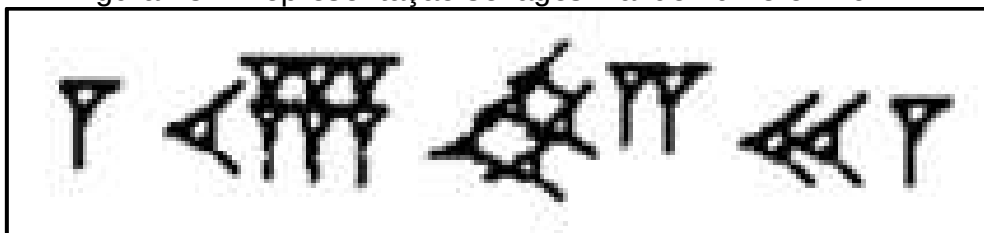
Figura 12 – Representação cuneiforme – números babilônicos menores que 60

1 ∇	11 $\triangleleft \nabla$	21 $\triangleleft \triangleleft \nabla$	31 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla$	41 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla$	51 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla$
2 $\nabla \nabla$	12 $\triangleleft \nabla \nabla$	22 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla$	32 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla$	42 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla$	52 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla$
3 $\nabla \nabla \nabla$	13 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla$	23 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$	33 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$	43 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$	53 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$
4 $\nabla \nabla \nabla \nabla$	14 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$	24 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$	34 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$	44 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$	54 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$
5 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	15 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	25 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	35 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	45 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	55 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
6 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	16 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	26 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	36 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	46 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	56 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
7 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	17 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	27 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	37 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	47 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	57 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
8 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	18 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	28 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	38 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	48 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	58 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
9 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	19 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	29 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	39 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	49 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	59 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
10 $\triangleleft$	20 $\triangleleft \triangleleft$	30 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft$	40 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft$	50 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft$	

Fonte: Ortiz (2020, p. 4)

A notação babilônica presente na Figura 13 representa o número 276.741, uma vez que:

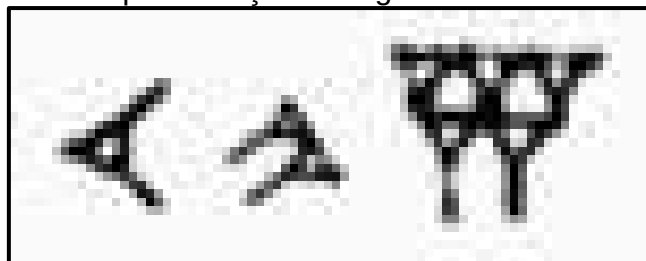
Figura 13 – Representação sexagesimal do número 276.741



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024)

Não existia no sistema de numeração babilônico um símbolo para indicar o zero o que, por vezes, causava alguma ambiguidade. Somente na época de Alexandre, o Grande, um símbolo especial formado por duas cunhas pequenas escritas obliquamente () passou a ser utilizado para indicar a posição intermediária onde estivesse faltando algum numeral. Por exemplo, a notação babilônica presente na Figura 14 representa o número 36.005, uma vez que:

Figura 14 – Representação sexagesimal do número 36.005



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024)

Boyer (1974, p. 21) também destaca que “uma boa parte das tabletas cuneiformes encontradas são ‘textos tabelas’, inclusive [...] de recíprocos”, conforme vemos na tabela presente na Figura 15.

Com base nessa tabela, a parte inteira era separada da parte fracionária por um ponto e vírgula, e caso não houvesse a presença do ponto e vírgula, o número deveria ser interpretado como tendo apenas a parte fracionária. Observa-se ainda que o produto dos elementos de cada linha dessa tabela é igual a 60, base do sistema de numeração babilônico.

Figura 15 – Tabela dos recíprocos

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5

Fonte: Boyer (1974, p. 21)

Os babilônicos recorriam à tabela dos recíprocos para realizar a divisão de dois números. No Quadro 12 vemos que, para encontrar o resultado da divisão de 160 por 8, por exemplo, eles multiplicavam o 160 pelo recíproco do 8, que na base sexagesimal era dado como 7,30. Essa representação sexagesimal é equivalente a 0,125 na base decimal, uma vez que não aparece o ponto e vírgula, isto é:

Assim:

Quadro 12 – Cálculo babilônico para a divisão de 160 por 8

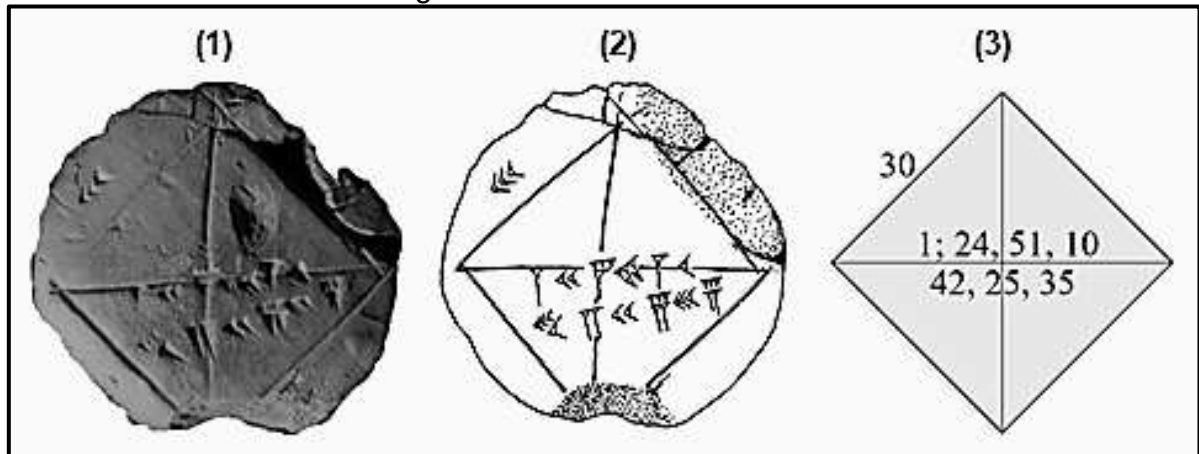
Recíprocos na base sexagesimal		Operação na base sexagesimal	Operação na base decimal	Resultado
8				

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Feito o destaque a respeito do sistema de numeração babilônico, voltaremos a falar do texto cuneiforme da coleção de Yale citado por Boyer (1974). Trata-se da

tableta YBC 7289, como a que aparece na Figura 16, adaptada de Ortiz (2020, p. 9), e que contém, além da imagem da tableta feita de argila **(1)**, uma imagem mais nítida dessa mesma tableta **(2)** e da sua tradução feita no Geogebra **(3)**.

Figura 16 – Tableta YBC 7289



Fonte: Adaptado de Ortiz (2020, p. 9).

Fowler e Robson (1998) explicam que a paleografia sugere que essa tableta foi escrita por um escriba em treinamento em algum lugar no sul da Mesopotâmia (atual Iraque), e que a medida 1; 24, 51, 10 que aparece gravada da diagonal do quadrado indica uma boa aproximação para $\sqrt{2}$. De fato, se escrevermos essa medida na base sexagesimal, obtemos um valor que diverge de $\sqrt{2}$ somente a partir da sexta casa decimal.

De modo semelhante, escrevendo a medida 42, 25, 35 na base sexagesimal, obtemos:

Boyer (1974, p.29) afirmou que “o último número é evidentemente a razão entre os comprimentos da diagonal e do lado”, ou seja, se dividirmos 1; 24, 51, 10 por 30, obteremos 42, 25, 35. De fato, na tabela da Figura 15 vimos que os números 2 e 30 são recíprocos entre si na base sexagesimal, ou seja, para dividir um número por 30 basta multiplicarmos pelo 2. No Quadro 13 temos um resumo da operacionalização desse cálculo.

Quadro 13 – Cálculo da razão entre a diagonal e o lado na Tableta YBC 7289

Recíprocos na base sexagesimal		Operação na base sexagesimal	Operação na base decimal	Resultado
2		_____	_____	$\sqrt{\quad}$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Os primeiros anos da matemática grega foram ofuscados pelo brilho dos Elementos de Euclides, escritos por volta de 300 a.C., de modo que a principal fonte de informações para estudar a produção grega nesse período é o chamado Sumário Eudemiano de Proclo, que mesmo vivendo mais de mil anos depois, ainda teve acesso a muitos trabalhos daquela época. Segundo Eves (2004, p.97), “esse sumário consiste nas páginas de abertura do Comentário sobre Euclides, Livro I”, e traz uma síntese do desenvolvimento da geometria grega desde seus primórdios até os dias de Euclides.

Entre os matemáticos citados no Sumário Eudemiano está Pitágoras, um personagem místico do qual pouco se sabe com algum grau de certeza. Acredita-se que tenha nascido por volta de 572 a.C. na ilha de Samos, próxima de Mileto, que tenha sido discípulo de Tales e que tenha residido por algum tempo no Egito. Ao retornar para Samos e encontrá-la sob o domínio persa, decidiu emigrar para Crotona, uma colônia grega no sul da Itália onde fundou a escola pitagórica, uma confraria unida por ritos secretos e dedicada ao estudo da matemática, da filosofia e das ciências naturais.

Ademais, além da perda de documentos históricos, outro motivo para a obscuridade de Pitágoras se deve ao fato de que a escola era comunitária, isto é, o conhecimento e a propriedade eram comuns. Por esta razão, “a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola” (Boyer, 1993, p. 36).

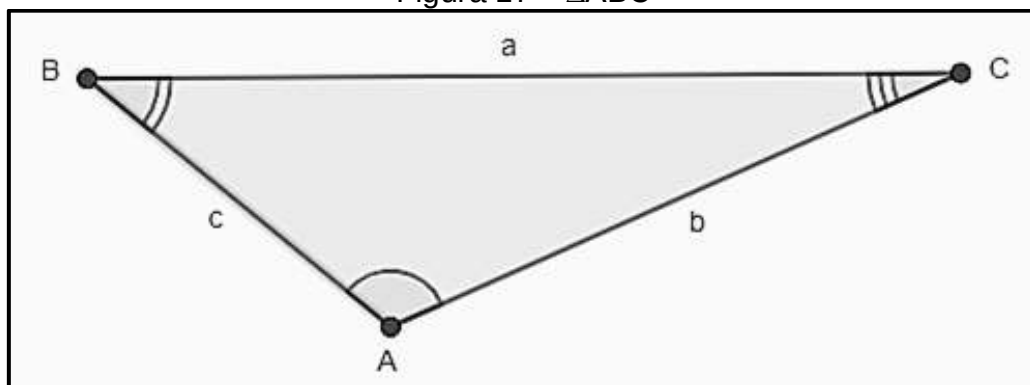
Contudo, embora a escola pitagórica possuísse essa característica, convencionou-se atribuir a Pitágoras a descoberta do fato de que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Nesse ponto, convém observar que “Euclides jamais emprega essa nomenclatura, nem atribui o teorema a Pitágoras ou a quem quer que seja” (Roque, 2012).

Em que pese esse teorema já ser conhecido pelos babilônios desde os tempos de Hamurabi, conjectura-se que a primeira demonstração geral pode ter sido feita por Pitágoras utilizando equivalência de áreas como mostraremos a seguir. Roque (2012), porém, destaca que nenhuma prova conhecida desse teorema geométrico sobre o triângulo retângulo parece ter sido fornecida por um pitagórico, mas sim, um estudo denominado de ternos pitagóricos, ou triplas pitagóricas.

Fato é que com centenas de demonstrações, o teorema de Pitágoras é um dos mais importantes teoremas da Matemática em todos os tempos e suas aplicações são encontradas em diversas áreas, como: na arquitetura, na engenharia, na topografia, na cartografia, na navegação, bem como na própria Matemática, como na relação fundamental da Trigonometria, no cálculo da distância entre dois pontos, da altura de um triângulo equilátero, ou no cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo.

3.2. AS RELAÇÕES MÉTRICAS NAS SEMELHANÇAS DE TRIÂNGULOS

Dolce e Pompeo (1993, p. 36) definem triângulo da seguinte forma: “Dados três pontos A , B e C não colineares, a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ chama-se triângulo ABC ”. Para simplificar a escrita, doravante utilizaremos o símbolo $\triangle ABC$ para indicarmos um triângulo, isto é, para representarmos, por exemplo, o “triângulo ABC ” usaremos apenas “ $\triangle ABC$ ”.

Figura 17 – $\triangle ABC$ 

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024)

Na Figura 17, destacamos os seguintes elementos:

- Os pontos A , B e C são chamados vértices do triângulo.
- Os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ representam os lados do triângulo. Para representar simbolicamente os lados de um triângulo, normalmente utilizamos letras minúsculas no nosso alfabeto. Assim, as letras a , b e c representam as medidas dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.
- Os ângulos $\angle B$ (ou ângulo em B , ou apenas $\angle B$), $\angle C$ (ou ângulo em C , ou apenas $\angle C$) e $\angle A$ (ou ângulo em A , ou apenas $\angle A$) são chamados de ângulos internos do triângulo.

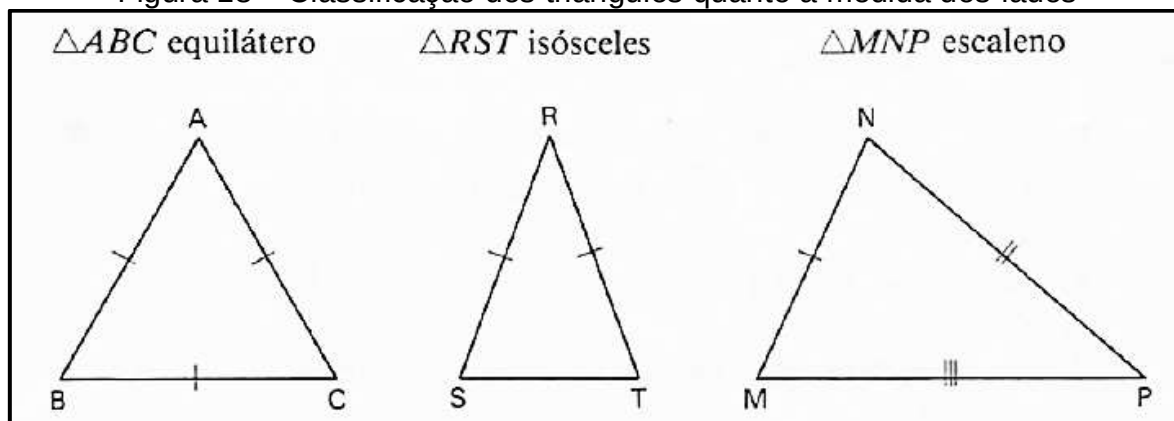
Ainda na Figura 17, dizemos que a é o lado oposto ao $\angle A$, que b é o lado oposto ao $\angle B$ e que c é o lado oposto ao $\angle C$.

A classificação dos triângulos se dá quanto aos lados e quanto aos ângulos. Em relação à medida dos lados, os triângulos podem ser:

- Equiláteros se, e somente se, o triângulo possuir os três lados congruentes, isto é, os três lados com a mesma medida.
- Isósceles se, e somente se, o triângulo possuir dois lados congruentes e um não congruente, isto é, dois lados com a mesma medida e o terceiro lado com medida diferente.
- Escalenos se, e somente se, o triângulo possuir os três lados não congruentes, isto é, os três lados com medidas diferentes.

A Figura 18 apresenta exemplos de triângulos classificados quanto à medida dos lados.

Figura 18 – Classificação dos triângulos quanto à medida dos lados



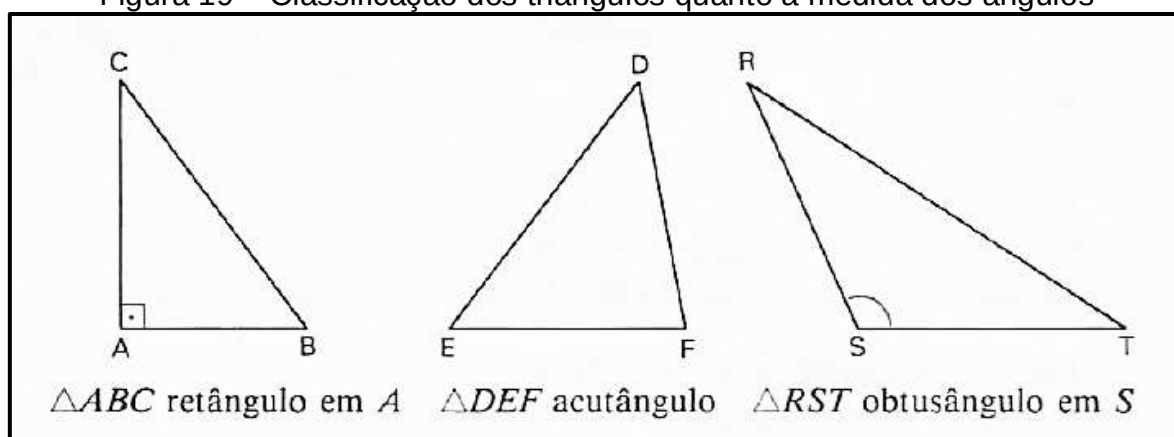
Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 38)

Em relação à medida dos ângulos, os triângulos podem ser:

- Retângulos se, e somente se, o triângulo possuir um ângulo reto, isto é, um ângulo com medida igual a 90° .
- Acutângulos se, e somente se, o triângulo possuir os três ângulos agudos, isto é, se as medidas dos três ângulos forem menores que 90° .
- Obtusângulo se, e somente se, o triângulo possuir um ângulo obtuso, isto é, se a medida de um dos ângulos for maior que 90° .

A Figura 19 apresenta exemplos de triângulos classificados quanto à medida dos ângulos.

Figura 19 – Classificação dos triângulos quanto à medida dos ângulos



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 38).

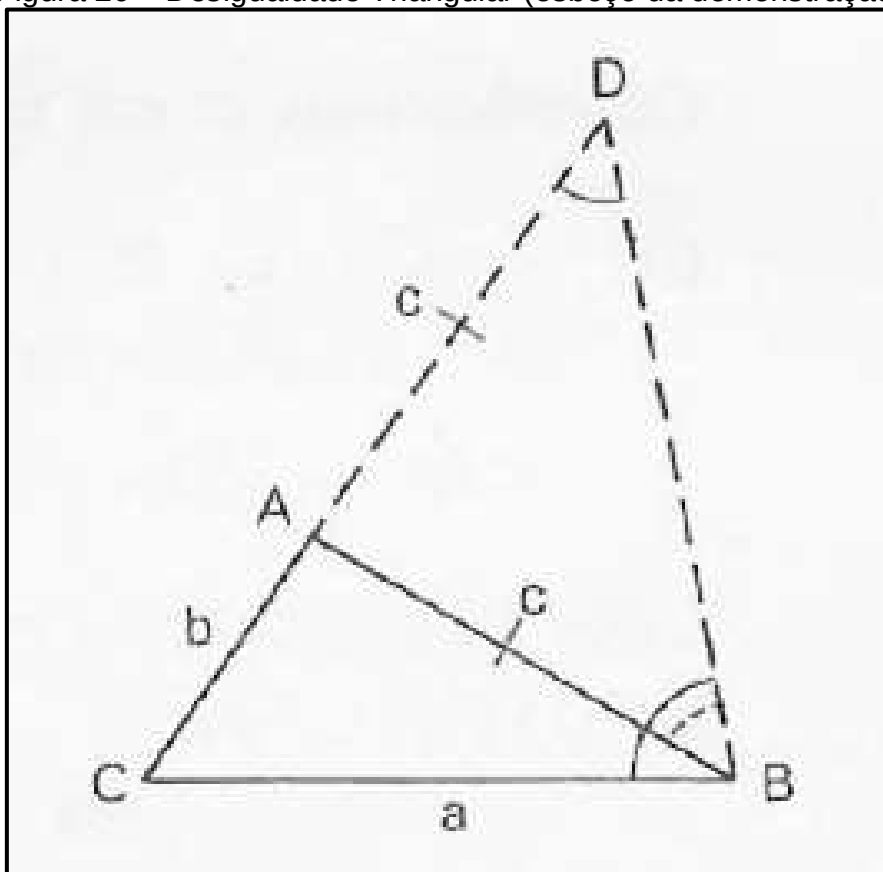
Os lados de um triângulo retângulo recebem denominações especiais, a saber:

- **Catetos:** quando estivermos nos referindo aos lados que formam o ângulo reto.
- **Hipotenusa:** quando estivermos nos referindo ao lado oposto ao ângulo reto.

Antes de avançarmos para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo, convém destacar que o estudo dos triângulos é formado por algumas propriedades, entre elas a propriedade da **Desigualdade Triangular** a qual garante que, em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença entre eles.

Para demonstrar esta propriedade tomamos na Figura 20 um ponto na semirreta oposta a semirreta $\overrightarrow{BA}$ de tal forma que as medidas dos segmentos AD e AB sejam iguais, isto é, $AD = AB$.

Figura 20 – Desigualdade Triangular (esboço da demonstração)



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 56).

Assim, $BC < BA + AD$. E mais, como o $\triangle ABD$ é isósceles, temos que $\angle ABD < \angle ADB$. Como ao menor ângulo está oposto o menor lado, então $AD < BD$, isto é, $BC < BA + BD$, o que conclui a demonstração.

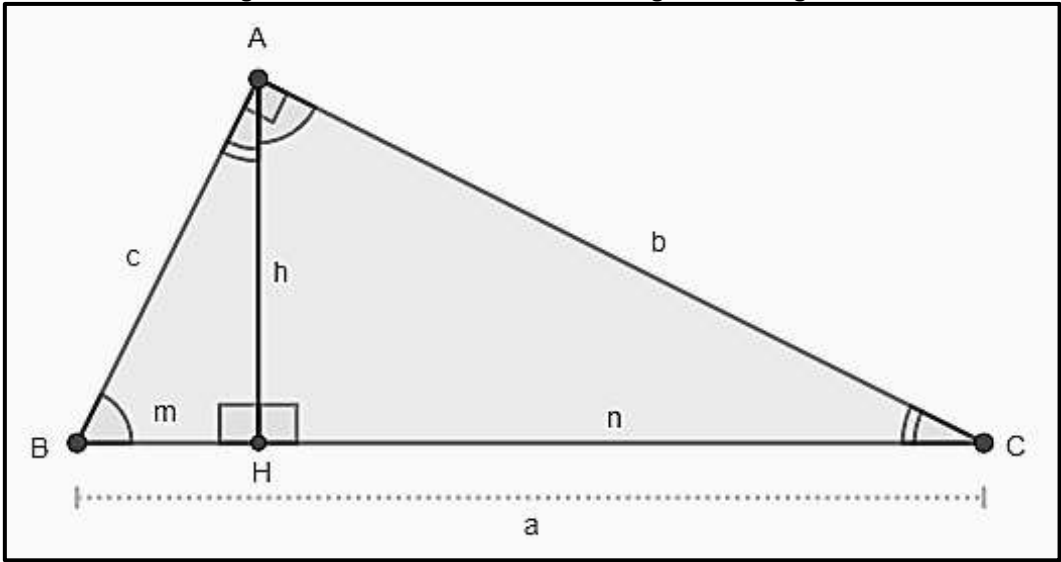
De modo análogo, podemos afirmar que $AC < AB + BC$ e que $AB < AC + BC$. Com isso, Dolce e Pompeo (1993, p. 57) nos mostram que a desigualdade triangular pode ser resumida da seguinte forma:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$, ou ainda:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$$

Passaremos a falar agora mais especificamente sobre o triângulo retângulo e das relações entre os seus elementos. Para isso, vamos considerar o triângulo retângulo no ponto A , representado a seguir pela Figura 21.

Figura 21 – Elementos do triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024)

Nesse triângulo temos que:

- a hipotenusa
- c cateto
- b cateto
- h altura relativa a hipotenusa
- m projeção do cateto c sobre a hipotenusa
- n projeção do cateto b sobre a hipotenusa

A projeção do ponto A sobre a hipotenusa representado pelo segmento h é responsável por dividir o triângulo ABC em dois triângulos retângulos menores, a saber: ABH e AHC , ambos retângulo no ponto H .

É fácil observar que os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ e $\angle A$ e $\angle H$. Logo, o ABH e o AHC são semelhantes. E mais, esses dois triângulos também são semelhantes ao ABC .

triângulo original, isto é, ao $\triangle ABC$. Denotamos este fato da seguinte forma:



O fato dos três triângulos serem semelhantes nos permite afirmar que os lados homólogos deles são proporcionais. Assim, tomando esses triângulos dois a dois, chegamos às relações métricas dos triângulos retângulos, as quais serão apresentadas a seguir.

No $\triangle ABC$ da Figura 21 percebemos que o segmento AD BD CD , ou seja:



(3-1)

Este fato nos permite afirmar a nossa primeira relação, isto é, que a medida da hipotenusa do triângulo retângulo é igual a soma das medidas das projeções de cada cateto sobre esta hipotenusa.

Vamos observar agora os dois triângulos que surgiram quando projetamos o ponto D sobre a hipotenusa. Já vimos que o $\triangle ABC$, logo os seus lados são proporcionais. Assim:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{CD} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

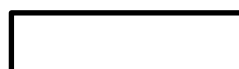


(3-2)

Este resultado representa a segunda relação e significa que, em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções de cada cateto sobre esta hipotenusa. Ou ainda, nas palavras de Wagner (2015, p. 7), “a altura é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa”.

Para demonstrarmos a terceira relação vamos observar o triângulo original com cada um dos dois triângulos que surgiram quando projetamos o ponto D sobre a hipotenusa. Há, portanto, dois casos a considerar: no primeiro caso, temos que o $\triangle ABC$, logo os seus lados são proporcionais. Assim:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{CD} \quad \text{---} \quad \text{---}$$



(3-3)

Já no segundo caso, temos que o $\triangle ABC$ e, portanto, os seus lados são proporcionais. Assim:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{a} \quad \text{---} \quad \text{---}$$
(3-4)

Estes dois últimos resultados garantem que em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto.

Para demonstrar a quarta relação, devemos observar o triângulo original com um dos dois triângulos que surgiram quando projetamos o ponto sobre a hipotenusa. Já vimos que o , logo os seus lados são proporcionais. Assim:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{a} \quad \text{---} \quad \text{---}$$
(3-5)

Wagner (2015, p. 7) nos lembra que podemos interpretar esta quarta relação métrica “com o conceito de área”, isto é, com as formas que podemos utilizar para calcular a área do triângulo original, uma vez que é possível afirmar que em todo triângulo retângulo, o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura é igual ao produto das medidas dos catetos.

3.3. O TEOREMA DE PITÁGORAS

A última relação métrica é popularmente conhecida como teorema de Pitágoras e vale em todo triângulo retângulo. De acordo com Alsina (2010), a versão mais genuína tem o seguinte enunciado: “Dado um triângulo de vértices ABC, o ângulo A é reto (triângulo retângulo), se e somente se, a área do quadrado sobre o lado a, oposto a A, é a soma das áreas dos quadrados sobre os outros lados b e c” (Alsina, 2010, p. 42, tradução nossa).

Podemos demonstrar esta relação trabalhando algebricamente com os resultados (3-3) e (3-4) obtidos na terceira relação, ou seja:

e

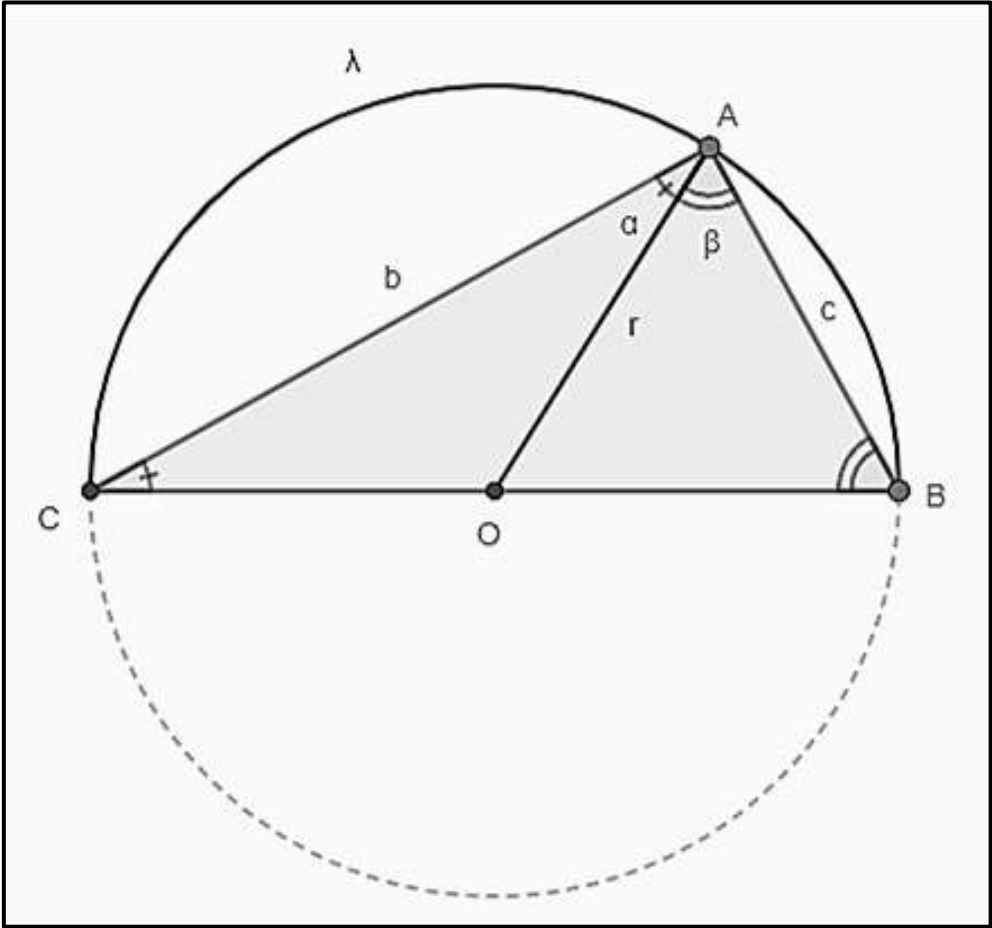
Somando essas duas relações membro a membro, obtemos:

Da primeira relação temos que , logo:

ou ainda,

(3-6)

Figura 22 – Triângulo inscrito em uma semicircunferência



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024)

Além da demonstração algébrica que acabamos de descrever, existem ainda outras maneiras interessantes de provar este teorema algebricamente. Em 3.3.1 apresentaremos algumas delas. Antes, porém, provaremos um importante teorema, ou seja, que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo. Para isso, vamos considerar o esquema representado na Figura 22, onde um é

inscrito em uma semicircunferência λ , de centro em O e raio r , de tal forma que $\angle AOB$ é igual ao diâmetro de λ , isto é, $\angle AOB = 180^\circ$. A prova deste teorema se resume em mostrar que o $\triangle AOB$ é retângulo em O, ou seja, que $\alpha + \beta = 90^\circ$.

De fato, como O é o centro de λ , então $OA = OB = r$. Com isso, podemos afirmar que o $\triangle OAB$ e o $\triangle OAC$ são isósceles. Assim, no $\triangle OAB$ temos que $\angle OAB = \angle OBA$ e no $\triangle OAC$ temos que $\angle OAC = \angle OCA$.

Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, podemos escrever que $\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ$, ou ainda, que $\angle AOB + 2\angle OAB = 180^\circ$, de onde se conclui que $\angle OAB = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$, provando assim o teorema.

Apresentaremos a seguir alguns tesouros encontrados no site <https://www.cut-the-knot.org/> mantido por Alexander Bogomolny até a sua morte em 07/07/2018. Alguns ajustes foram realizados visando facilitar a compreensão do raciocínio e para adequar ao padrão da escrita adotada no presente texto.

3.3.1. Demonstrações do teorema

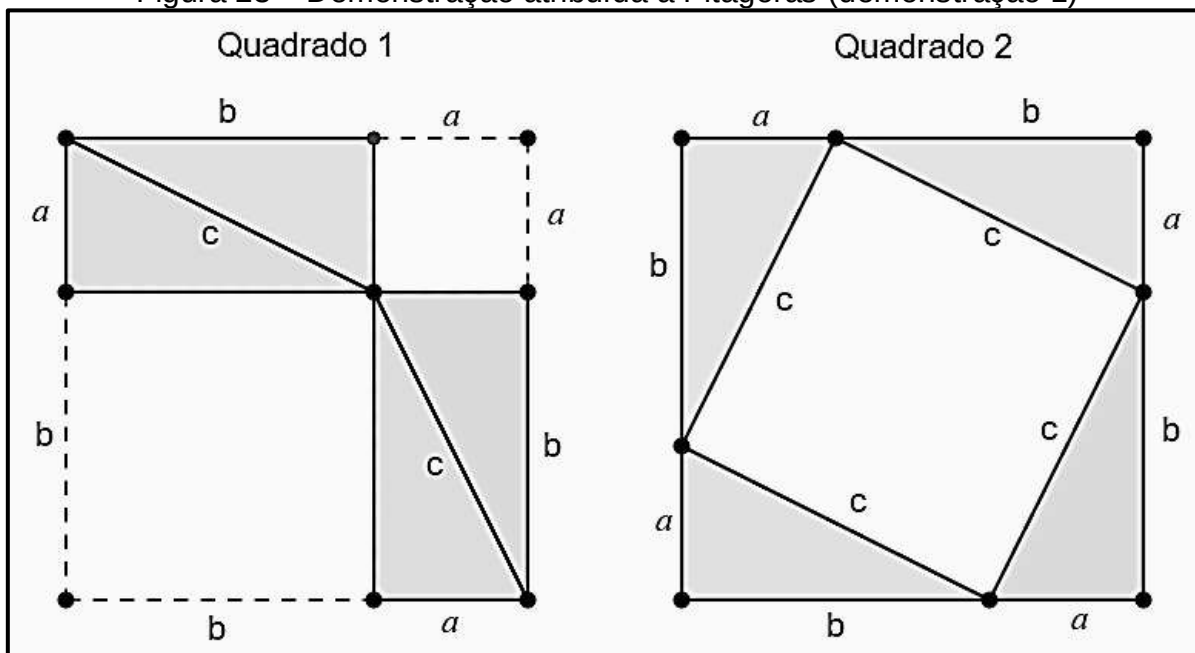
Como dissemos anteriormente, a BNCC do 9º ano do Ensino Fundamental requer que os alunos adquiram a habilidade de demonstrar as relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras. Em que pese existirem dezenas de formas de demonstrar esse teorema, grande parte delas é desconhecida da maioria dos professores.

Assim sendo, visando contribuir com o trabalho dos professores, bem como à formação inicial ou continuada desses profissionais, reunimos neste texto uma amostra do total de demonstrações existentes. Além das que costumam aparecer nos livros didáticos, também juntamos outras que acreditamos poder ajudar com os processos de ensino e de aprendizagem, totalizando doze demonstrações desse teorema. Uma parte dessas demonstrações foi publicada na Revista Paranaense de Educação Matemática e pode ser consultada através deste [link](#).

Iniciamos com a *demonstração (1)* atribuída ao próprio **Pitágoras**, cujo raciocínio está baseado na decomposição de figuras e comparação de áreas. Para isso, vamos considerar quatro triângulos retângulos genéricos iguais com catetos medindo a e b e hipotenusa medindo c , e arrumá-los de duas maneiras diferentes de

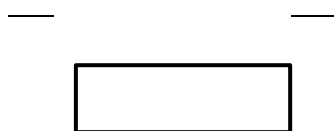
modo a obter dois quadrados com lados medindo $a^2 + b^2$, conforme representado na Figura 23.

Figura 23 – Demonstração atribuída a Pitágoras (demonstração 1)



Fonte: Adaptado de Eves (2004, p. 103).

O Quadrado 1 (Q1) pode ser decomposto em seis partes, sendo: os quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo retângulo genérico considerado, um quadrado de lado a e um quadrado de lado b . Já o Quadrado 2 (Q2) pode ser decomposto em cinco partes, sendo: os quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo retângulo genérico considerado e um quadrado de lado c . Como Q1 e Q2 tem lados medindo $a + b$ suas áreas são iguais. Do mesmo modo, a soma das partes de Q1 deve ser igual a soma das partes de Q2. Assim:



Para demonstrar que a parte central de Q2 é um quadrado de lado c , basta usar o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e, portanto, cada ângulo da parte central de Q2 é igual a 90° .

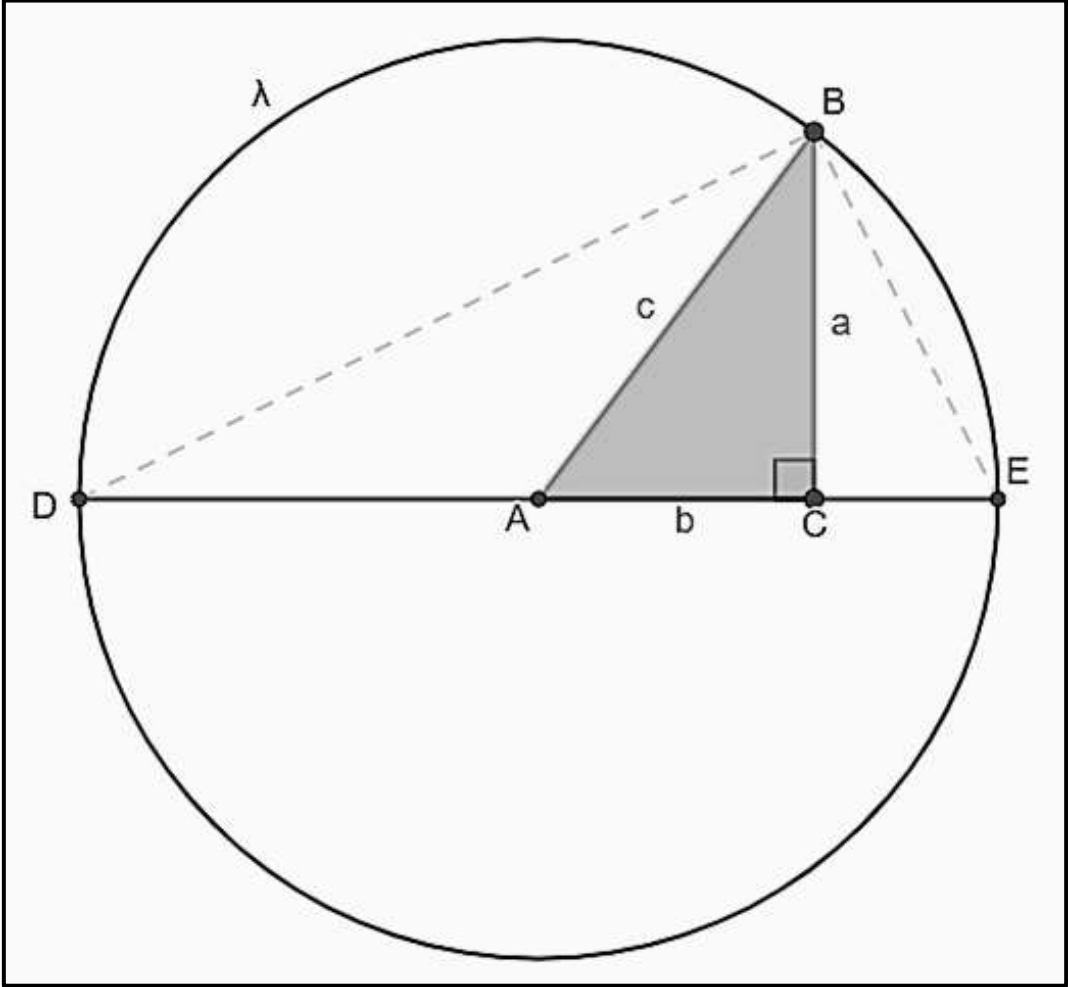
A ideia da construção para a *demonstração (2)* que faremos a seguir é atribuída a **Leibniz**¹⁸, conforme aponta Loomis (1940, *apud* Silva, 2014, p. 45). Na

¹⁸ Gottfried Wilhelm Leibniz (01/07/1646 a 14/11/1716)

coleção de Bogomolny, esta demonstração aparece na Prova #11.

Tome um círculo de centro em O e raio r . Considere um retângulo $ABCD$, com um dos catetos construído sobre o diâmetro DE de $\odot O$, conforme a Figura 24 abaixo.

Figura 24 – Construção de Leibniz (demonstração 2)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

Nessas condições, temos que: $\angle BDE = \angle BDC$ e $\angle BDC = \angle BAC$.

E mais: $\angle BDE = \angle BDC$ e $\angle BDC = \angle BAC$.

Por construção, o $\triangle ABC$ é retângulo em C e B está sobre o diâmetro DE . Então, o $\triangle BDE$ é retângulo em B , pois $\angle DBE = 90^\circ$, e BC é a altura do $\triangle BDE$.

Assim, aplicando a relação vista em (3-2), temos:

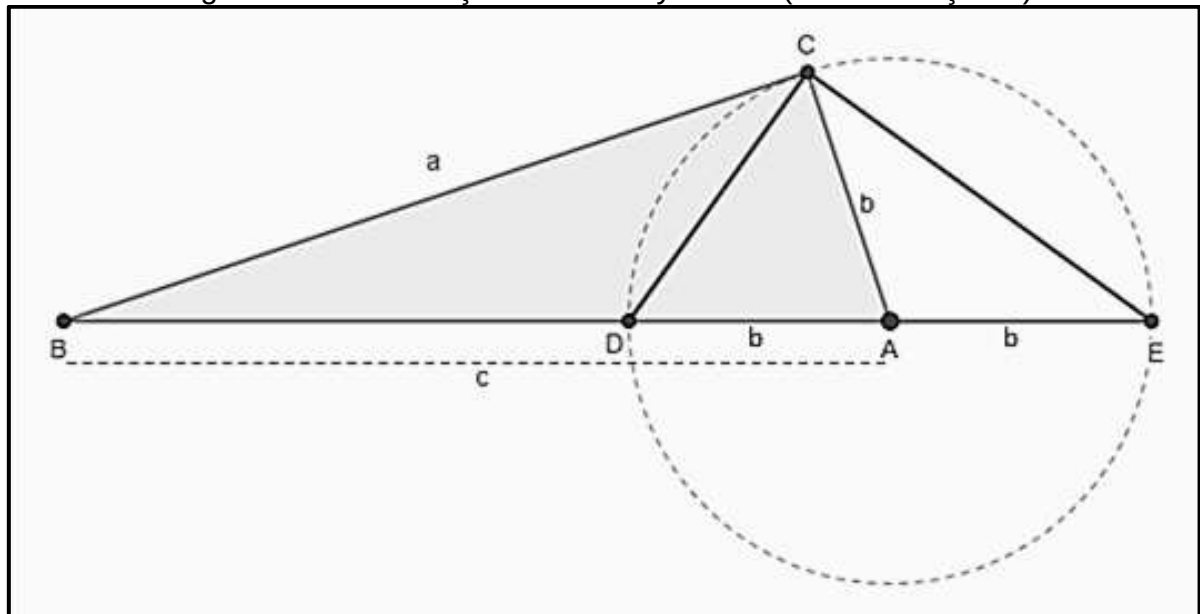
$$BC^2 = AC \cdot CE$$

De onde se conclui que

A *demonstração (3)* que apresentaremos a seguir, atribuída a **J. Barry Sutton**, é a Prova #39 da coleção de Bogomolny. Nela encontramos, nas palavras do autor, mais uma prova do teorema de Pitágoras, cuja publicação original pode ser consultada a partir desse [link](#).

Considere um $\triangle ABC$, retângulo em C . Utilizando a notação usual, temos que $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Considere ainda os pontos D no interior de AB e E no prolongamento de AB , construídos de acordo com a Figura 25, de tal forma que $AD = b$ e $AE = b$.

Figura 25 – Construção de J. Barry Sutton (demonstração 3)



Fonte: Adaptado da publicação original (2024).

De acordo com a construção de J. Barry Sutton é fácil perceber que:

(I) o ponto C pertence ao círculo de centro em D e raio b , sendo possível afirmar que $\angle CDE$ é um ângulo inscrito em um semicírculo, uma vez que AE é o diâmetro, e portanto $\angle CDE = 90^\circ$ como mostrado anteriormente.

(II) $\triangle ABC \sim \triangle CDE$, pois o $\angle C$ é retângulo em

Do mesmo modo, $\angle B = \angle CED$ de onde se conclui, por transitividade, que $\angle A = \angle CDE$. E mais, como $\triangle ABC$ é isósceles, temos que $BC = AC$.

Comparando o $\triangle ABC$ com o $\triangle CDE$ temos que $\angle A$ é um ângulo comum e $\angle B = \angle CED$. Logo, $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ de onde se pode afirmar que $BC/CE = AC/DE$ e, portanto, os seus lados são proporcionais. Assim:

????

????

????

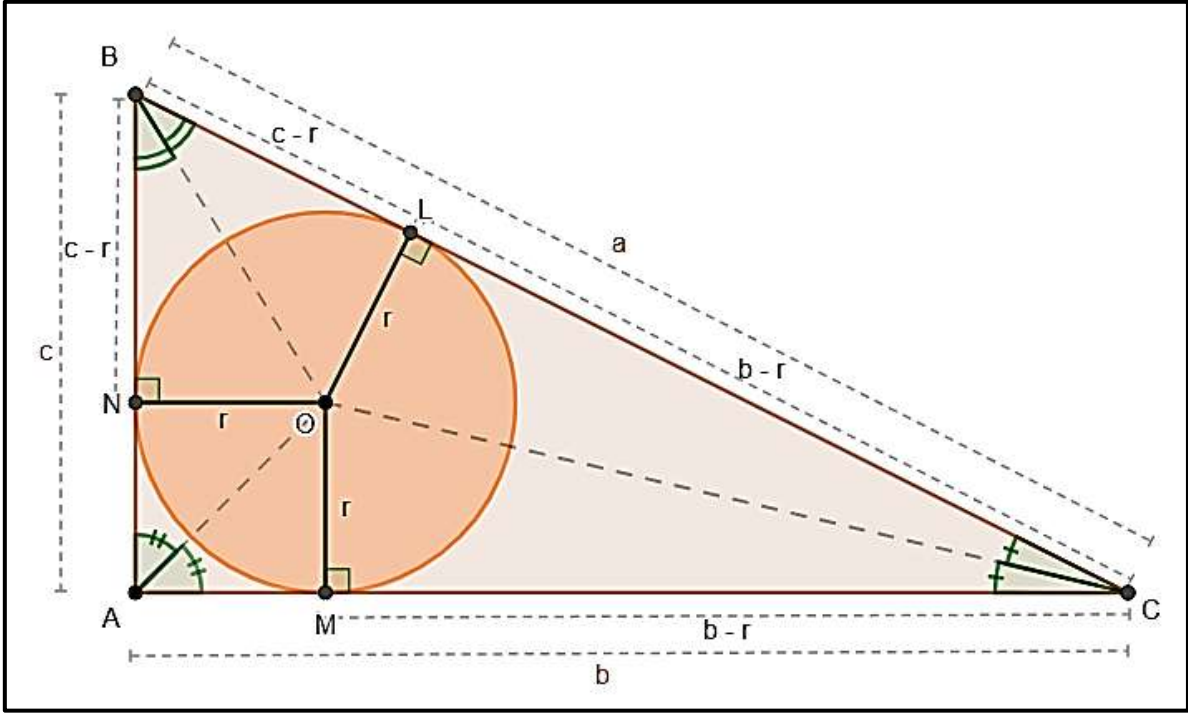
????

o que conclui a demonstração.

Em seus estudos, Silva (2014, p. 49) trouxe a Prova #42 da coleção de Bogomolny. Essa *demonstração* (4) que faremos a seguir foi atribuída por Bogomolny a **Jack Oliver**, cuja publicação original pode ser consultada a partir desse [link](#).

Considere o , retângulo em , circunscrito em um círculo de raio conforme a Figura 26.

Figura 26 – Construção de Jack Oliver (demonstração 4)



Fonte: Adaptado da publicação original (2024).

Dolce e Pompeo (1993, p. 329) nos mostram que a área do da Figura 26 pode ser obtida através do somatório das áreas de três triângulos, a saber:

$$(\text{—————})$$

(3-7)

onde ——— é o semiperímetro do .

Por construção, o é circunscrito. Desta forma, AB e CD são tangentes ao círculo nos pontos E e F , respectivamente. E mais, AB e CD são perpendiculares, respectivamente, aos lados AC e BC do . E ainda, AD é a bissetriz do ângulo A o que garante que o e o são congruentes. Assim:

$$AB = CD$$

Do mesmo modo, AC e BC são tangentes ao círculo nos pontos E e F , respectivamente. E mais, AC e BC são perpendiculares, respectivamente, aos lados AB e CD do . E ainda, AD é a bissetriz do ângulo A o que garante que o e o são congruentes. Assim:

$$AC = BC$$

Temos então que:

$$AB + AC = CD + BC$$

Ajustando o 2º membro, temos:



$$(\text{—————}) -$$

(3-8)

Substituindo (3-8) em (3-7) encontramos:

(3-9)

Mas como o é retângulo em , sua área também pode ser obtida por:

$$\text{—————}$$

(3-10)

Substituindo (3-9) em (3-10) temos:

—

(———)

(———)

)

—

(———)

(———)

)

—

—————

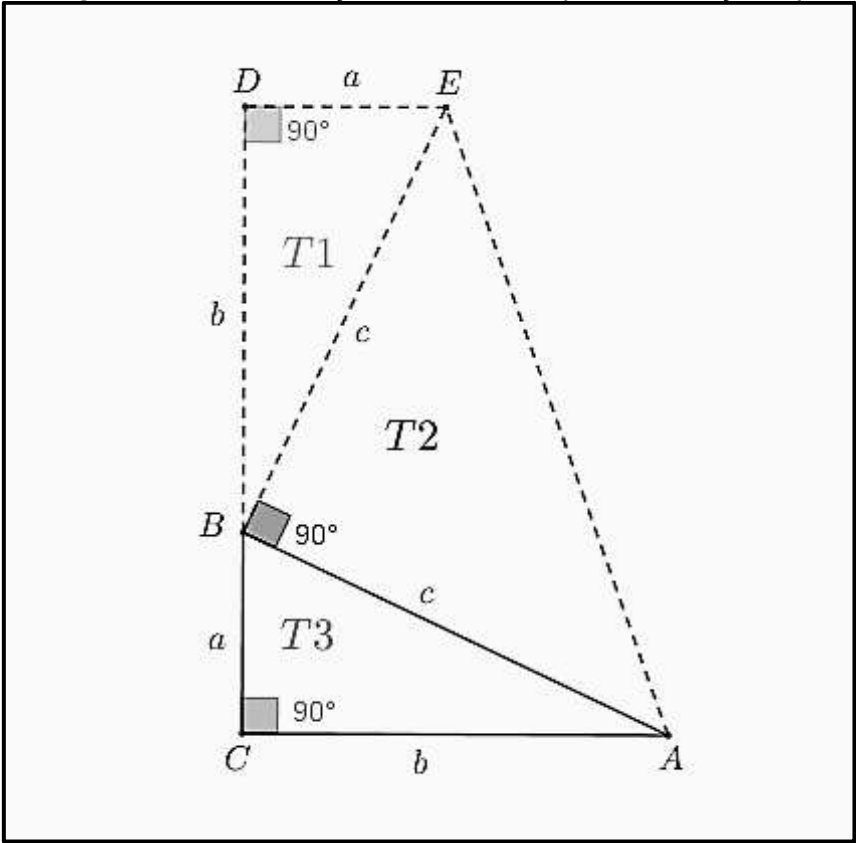
—

Multiplicando ambos os membros por 4, vem que:

[] []

concluindo assim a demonstração.

Figura 27 – Construção de Garfield (demonstração 5)



Fonte: Clube OBMEP¹⁹, acessado em 25 mai. 2024.

O rascunho da *demonstração (5)*, conhecida como demonstração do Presidente, é atribuído a **Garfield**²⁰ antes de ser eleito como 20º presidente dos

¹⁹ Disponível em <http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-uma-demonstracao-do-teorema-de-pitagoras/>

²⁰ James Abrahan Garfield (19/11/1831 a 19/09/1881)

Estados Unidos. Quando ainda era membro da Câmara de Representantes, ele fez o rascunho dessa demonstração que posteriormente veio a ser publicada. Na coleção de Bogomolny aparece como a Prova #5. A Figura 27 traz a ideia básica de Garfield para a construção da prova.

Sejam os triângulos retângulos congruentes e identificados, respectivamente, por e , com $\angle A$ e $\angle B$, dispostos no plano de tal forma que os pontos , e sejam colineares. Desta forma, $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$.

E mais, como os ângulos $\angle A$ e $\angle B$ são complementares e, por construção, $\angle C$ e $\angle D$, então $\angle A$ e $\angle B$ também são complementares. Com isso, o , identificado por , formado a partir do traçado do segmento AC , é retângulo isósceles e $\angle C$. Assim, a área do trapézio de bases AB e CD com altura BC é dada por:

$$\frac{(AB + CD) \cdot BC}{2}$$

Entretanto, essa mesma área pode ser obtida através da soma das áreas dos triângulos:

$$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = \frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{AC \cdot CD}{2} + \frac{BC \cdot CD}{2}$$

Ou seja:

$$\frac{(AB + CD) \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{AC \cdot CD}{2} + \frac{BC \cdot CD}{2}$$

$$AB + CD = AC + CD$$



o que encerra a demonstração.

A Prova #53 da coleção de Bogomolny foi publicada no periódico *The Mathematics Teacher* em fevereiro de 1995 e pode ser consultada a partir desse [link](#). De autoria atribuída a **Larry Hoehn**²¹, ela corresponde a nossa demonstração (6) cuja apresentação vem a seguir.

Sejam , e os vértices do triângulo , retângulo em , representado na

²¹ Professor norte americano.

Mas, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Logo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Assim:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (3-11)

Da primeira igualdade em (3-11) vem que

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (3-12)

Da segunda igualdade em (3-11) vem que

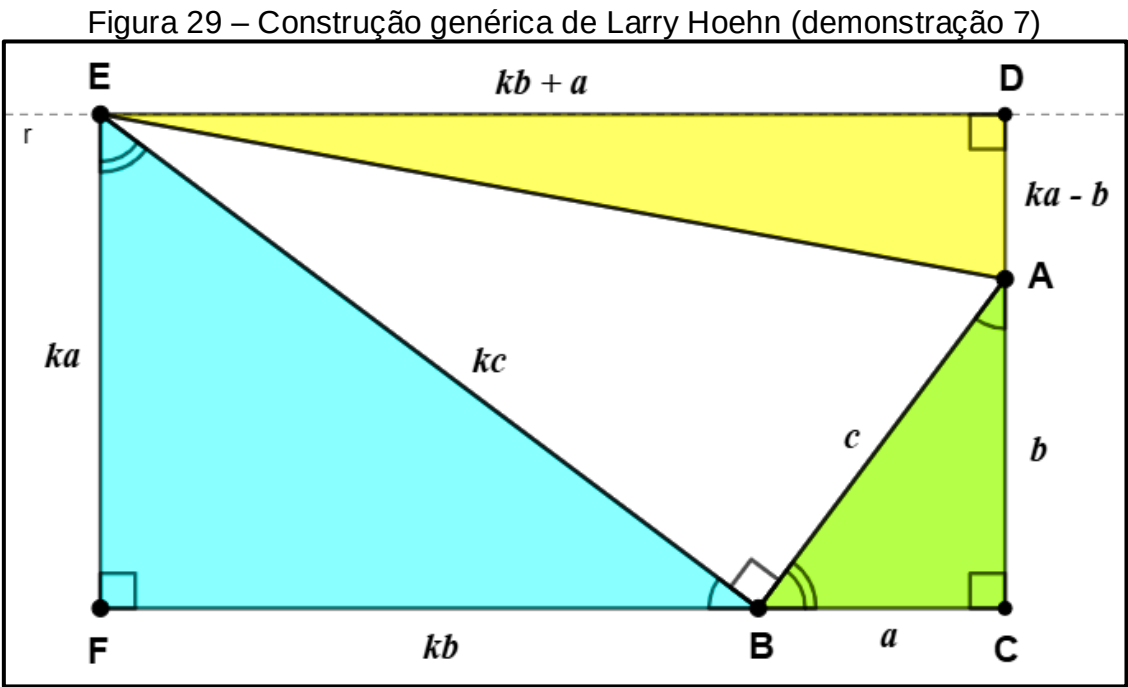
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (3-13)

Igualando (3-12) e (3-13) temos

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

concluindo assim a demonstração.

Após alguns anos, Larry Hoehn reviu suas anotações e apresentou uma [prova genérica](#) para a sua demonstração com base em um parâmetro k . Assim, para iniciar a *demonstração (7)* vamos considerar o retângulo $EDCF$, representado na Figura 29. Depois, trace o segmento EA no prolongamento do cateto ED , erga em A uma perpendicular ao lado ED e marque sobre essa perpendicular o segmento AB , com B no prolongamento do cateto ED .



Fonte: Adaptado da publicação original (2025).

Por construção, o $\triangle ABC$ é retângulo em C . Além disso, o $\triangle ACD$ e o $\triangle BCD$ são semelhantes na razão k . Para garantir que k não fique abaixo de $\frac{1}{2}$, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $k \geq \frac{1}{2}$.

A área do retângulo $ABCD$ também pode ser obtida através da soma das áreas dos triângulos ACD , BCD , e ABC . Assim:

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ab \quad (3-14)$$

(3-14)

Simplificando (3-14) por $\frac{1}{2}ab$, temos



encerrando a demonstração.

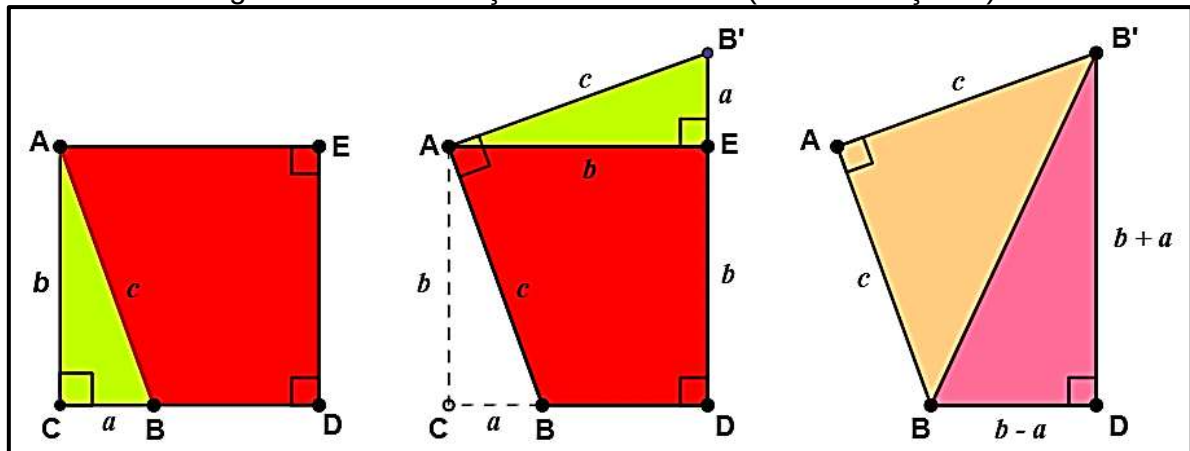
Mostramos assim que a demonstração é válida para todo $k \geq \frac{1}{2}$. Em particular, $k = \frac{1}{2}$ nos remete a Figura 28 da *demonstração (6)*, e resulta na *demonstração (5)* do Presidente Garfield (Figura 27).

A [versão original](#) da *demonstração (8)* apresentada a seguir é atribuída a **WJ Dobbs**²² e foi publicada no periódico *The Mathematical Gazette* em outubro de 1913. Ela corresponde a Prova #51 da coleção de Bogomolny. A construção proposta pelo autor inicia com um quadrado $ABCD$ sendo erguido sobre o maior cateto de um $\triangle ABC$, retângulo em C , de modo que todo o $\triangle ABC$ faça parte da região interior do quadrado. Em seguida, o $\triangle ABC$ é rotacionado em torno do vértice C , resultando no quadrilátero $ABCD$ com a mesma área do quadrado $ABCD$. Por fim, o quadrilátero $ABCD$ é dividido em dois triângulos retângulos através da diagonal AC .

²² William John Dobbs (04/02/1862 – 02/05/1942).

A Figura 30 representa os três momentos da construção proposta.

Figura 30 – Construção de WJ Dobbs (demonstração 8)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Por construção, a $\triangle ABC$ é semelhante a $\triangle AB'C'$. Contudo, a $\triangle AB'C'$ também pode ser obtida através da soma das áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle B'CD$. Assim:



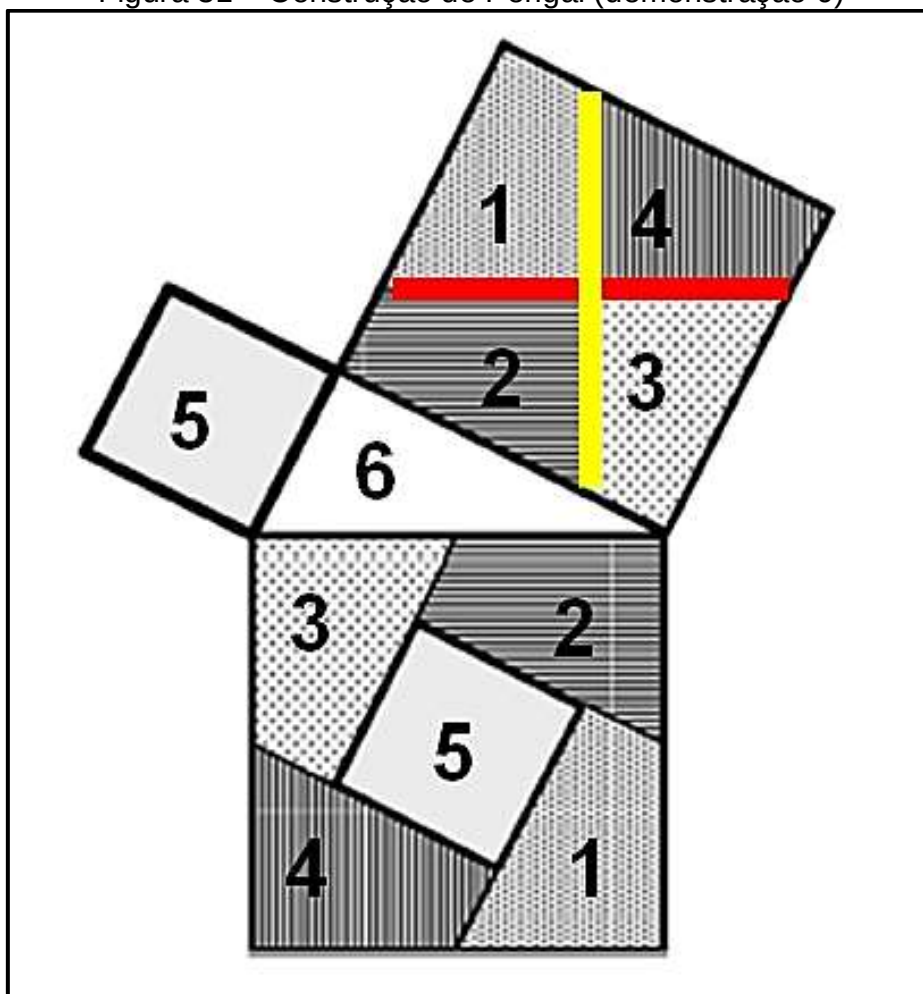
concluindo assim a demonstração.

A partir de agora vamos apresentar algumas demonstrações geométricas do Teorema de Pitágoras. A *demonstração (9)*, publicada em 1872, é atribuída ao britânico **Perigal**²³ e pode ser apreciada na Figura 31, onde o autor relacionou o Teorema de Pitágoras ao estudo de áreas. Sua ideia era mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchiam o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Para atingir o seu objetivo, Perigal traçou duas retas para dividir o quadrado construído sobre o cateto maior, uma paralela à hipotenusa do triângulo destacada na cor vermelha, e outra perpendicular a ela destacada na cor amarela. Ambas, porém, passavam pelo centro do quadrado que ele desejava dividir.

²³ Henry Perigal (01/04/1801 a 06/06/1898) – corretor de bolsa de valores.

Figura 31 – Construção de Perigal (demonstração 9)



Fonte: Adaptado de Wagner (2015, p. 8)

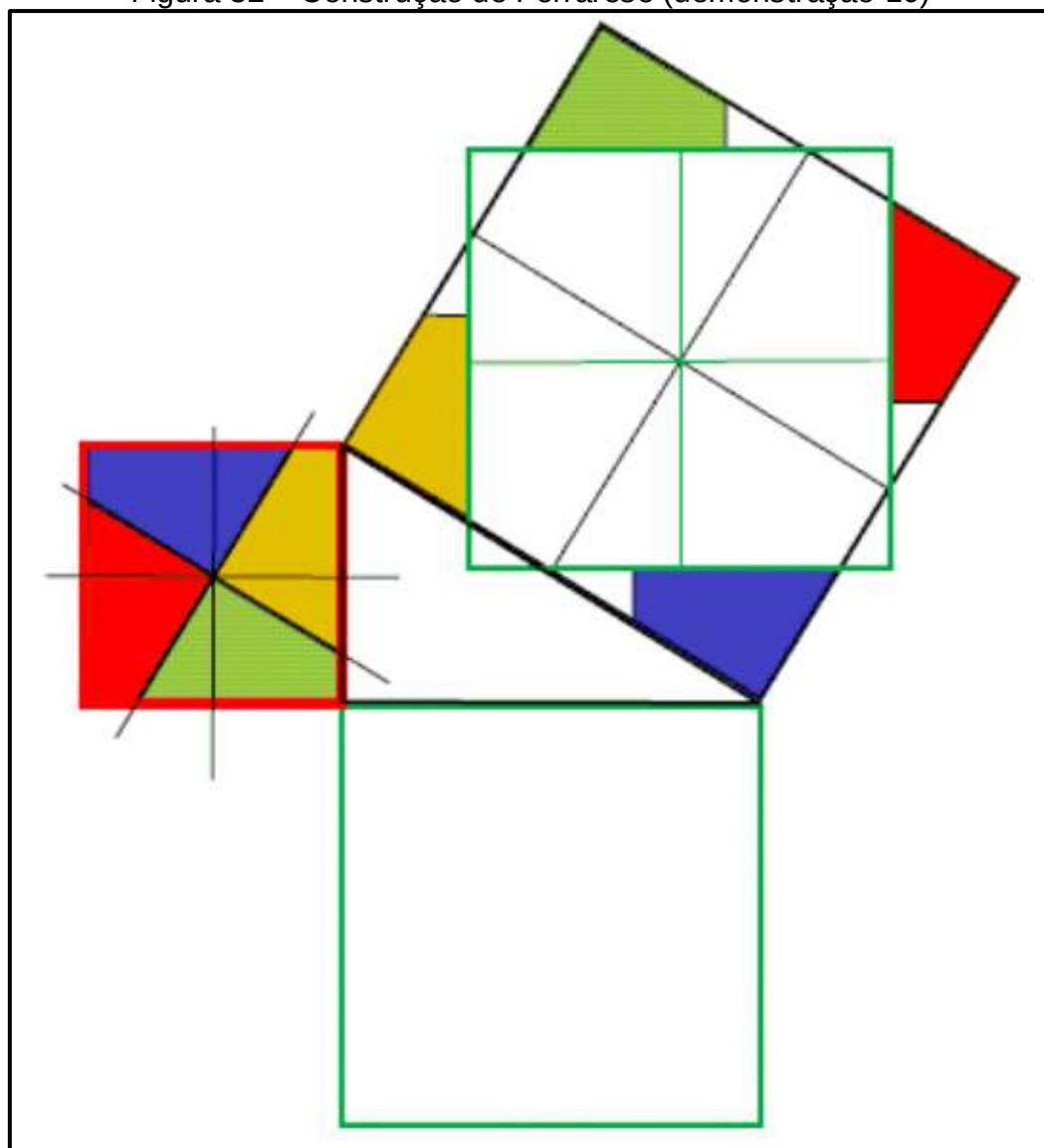
Essa dissecação feita por Perigal dividiu o quadrado construído sobre o cateto maior do triângulo em quatro partes congruentes, e, portanto, de mesma área, identificadas na Figura 31 por 1, 2, 3 e 4. A área dessas quatro partes e mais a área do quadrado construído sobre o cateto menor, preenchem completamente a área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Na Prova #93 da sua coleção, Bogomolny destaca que **Giorgio Ferrarese** da Universidade de Torino na Itália, observou que a construção realizada por Perigal sobre o cateto maior, admite tratamento simétrico em relação ao cateto menor, ou seja, é possível dividir o quadrado construído sobre o cateto menor da mesma maneira que o quadrado construído sobre o cateto maior foi dividido.

Com isso, temos na *demonstração (10)* a mesma dissecação de antes, mas agora aplicada ao quadrado menor, com o quadrado do meio deslizando para o centro do quadrado grande. A Figura 32 a seguir representa a divisão proposta por

Ferrarese.

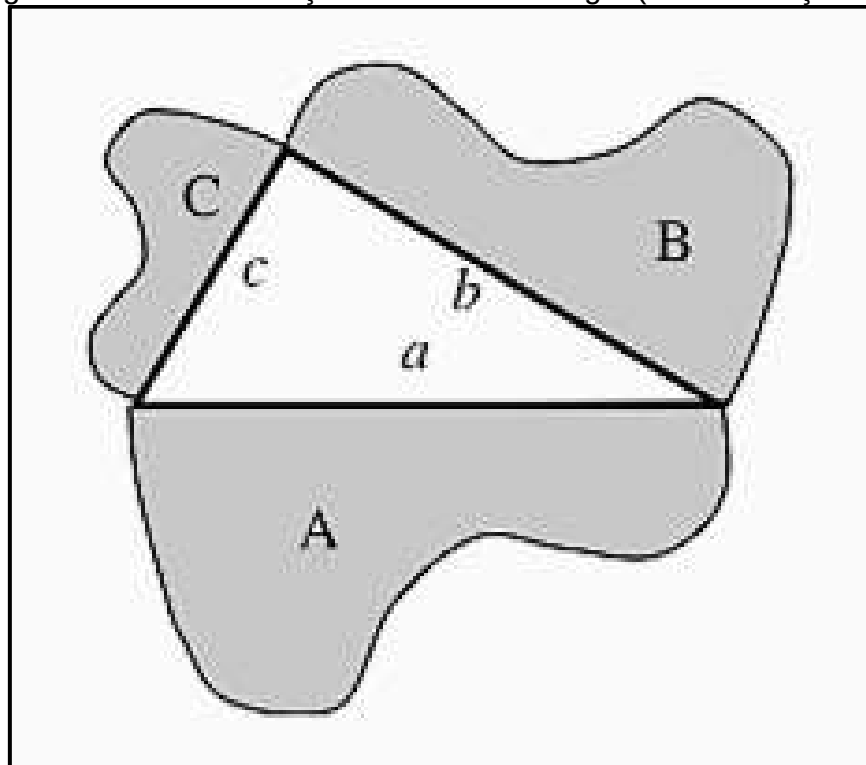
Figura 32 – Construção de Ferrarese (demonstração 10)



Fonte: <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PerigallI.shtml>

Wagner (2015, p. 12) nos mostra ainda que a ideia de Perigal para provar o teorema de Pitágoras pode ser generalizada para qualquer figura semelhante construída sobre os lados do triângulo retângulo. Assim, para iniciar a *demonstração (11)* vamos considerar três figuras semelhantes de áreas A , B e C , construídas sobre a hipotenusa e sobre os catetos a e b de um triângulo retângulo, como indicado a seguir na Figura 33.

Figura 33 – Generalização da ideia de Perigal (demonstração 11)



Fonte: Wagner (2015, p. 12)

Sabe-se que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim:

$$\frac{\text{Área } C}{\text{Área do triângulo}} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \frac{\text{Área } B}{\text{Área do triângulo}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Do mesmo modo:

$$\frac{\text{Área } A}{\text{Área do triângulo}} = \left(\frac{a}{a}\right)^2$$

Chegamos, portanto a seguinte proporção:

$$\frac{\text{Área } C}{\text{Área do triângulo}} + \frac{\text{Área } B}{\text{Área do triângulo}} = \frac{\text{Área } A}{\text{Área do triângulo}}$$

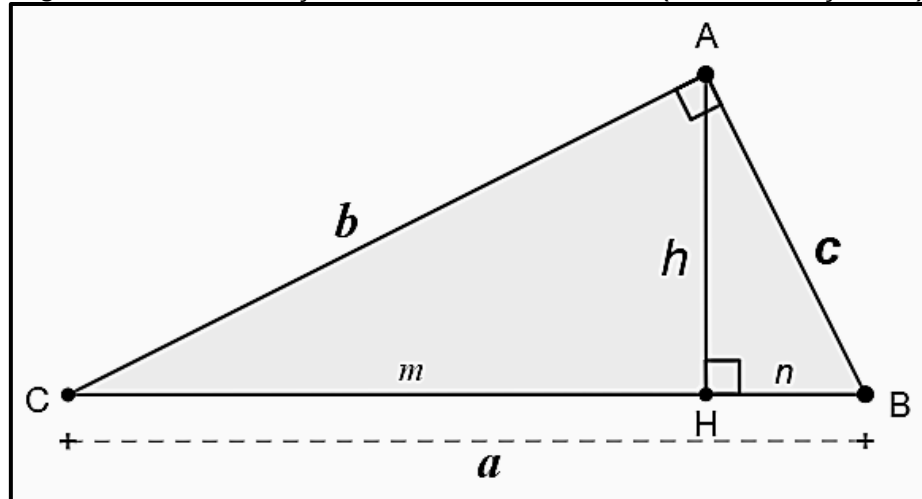
Como sabemos, em uma proporção é válida a seguinte propriedade: a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente. Assim, podemos reescrever a última igualdade como:

$$\text{Área } C + \text{Área } B = \text{Área } A$$

Como o triângulo da Figura 33 é retângulo, então $\text{Área do triângulo} = \frac{a \cdot b}{2}$, de onde concluímos que $\text{Área } C + \text{Área } B = \text{Área } A$ finalizando a demonstração.

Por fim, apresentamos na *demonstração (12)* uma prova do teorema de Pitágoras por contradição, atribuída ao indiano **KB Subramaniam**, sendo esta a Prova #122 da coleção de Bogomolny. Para isso, vamos tomar como de costume um triângulo retângulo em A , de hipotenusa CB e catetos AC e AB , como indicado a seguir na Figura 34.

Figura 34 – Construção de KB Subramaniam (demonstração 12)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Já vimos que a altura h relativa ao ângulo reto, divide o triângulo ABC em dois novos triângulos (AHC e AHB) semelhantes ao ABC . Desse fato, temos que $h^2 = mn$. E mais, por construção, $h^2 = b \cdot m$.

Vamos supor, por hipótese, que $a^2 \neq b^2 + c^2$. Neste caso, $a^2 < b^2 + c^2$ ou $a^2 > b^2 + c^2$.

1º caso: Vamos admitir que $a^2 < b^2 + c^2$ seja verdadeiro. Então, por semelhança, também é correto admitir que $a^2 > b^2 + c^2$ e que $a^2 = b^2 + c^2$. Assim,

o que é uma contradição, pois no 1º caso admitimos que $a^2 < b^2 + c^2$.

2º caso: Vamos admitir agora que $a^2 > b^2 + c^2$ seja verdadeiro. Então, por semelhança, também é correto admitir que $a^2 < b^2 + c^2$ e que $a^2 = b^2 + c^2$. Assim,

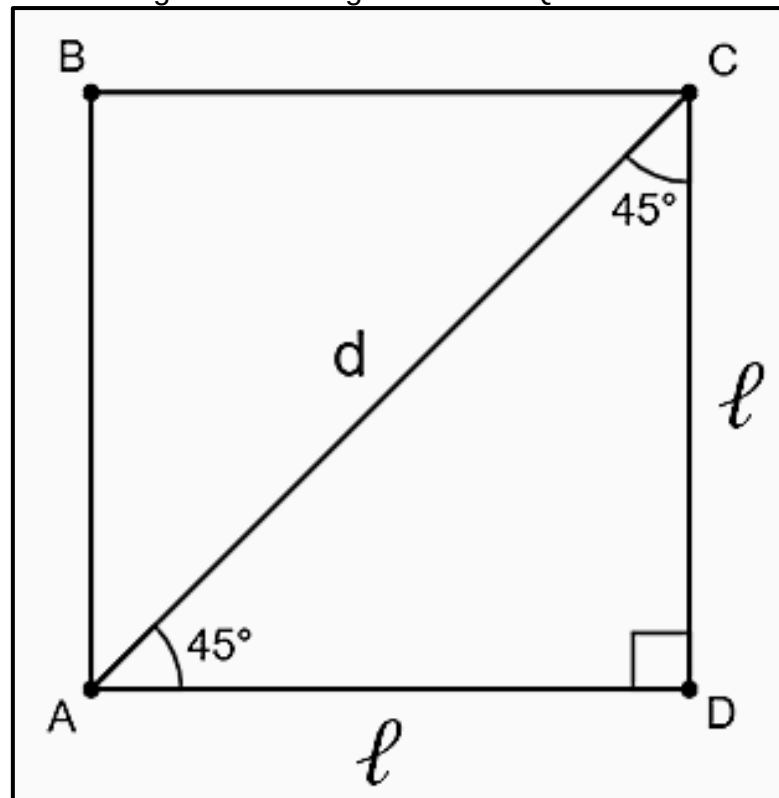
o que gera outra contradição, pois no 2º caso admitimos que $a^2 > b^2 + c^2$.

Portanto, para evitar as contradições que surgem ao supor que devemos, obrigatoriamente, considerar que , provando assim o teorema.

3.3.2. Aplicações do teorema

A primeira aplicação envolve o cálculo da diagonal de um quadrado de lado , representado na Figura 35. A diagonal d determina dois triângulos retângulos e idênticos, de catetos iguais ao lado do quadrado e hipotenusa igual a .

Figura 35 – Diagonal de um Quadrado



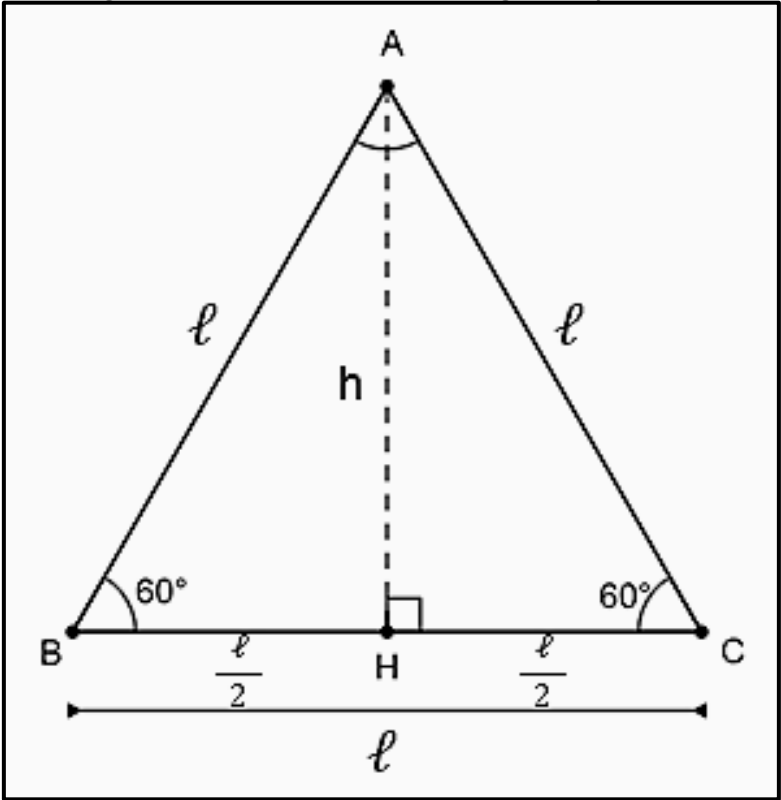
Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

Aplicando o teorema de Pitágoras no , temos:

$$\sqrt{\quad}$$

A segunda aplicação refere-se ao cálculo da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ , representado pela Figura 36. A projeção do vértice A sobre o lado BC determina dois triângulos retângulos idênticos $\triangle ABH$ e $\triangle ACH$ de catetos medindo $\frac{\ell}{2}$ e h (uma vez que H é o ponto médio do lado BC) e hipotenusa igual a ℓ .

Figura 36 – Altura de um triângulo equilátero



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABH$, temos:

(—)

—

—

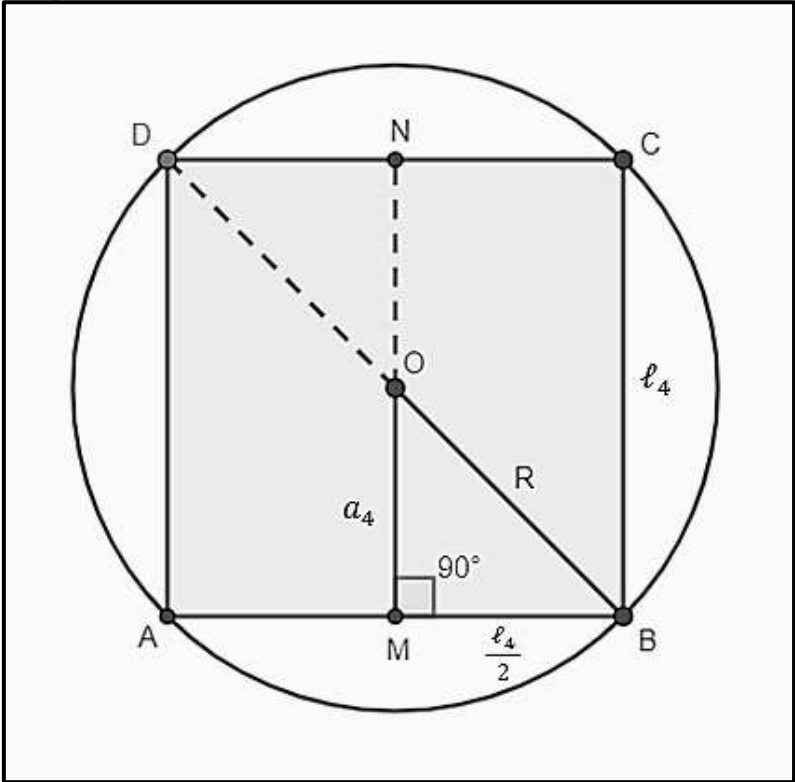
$\sqrt{\text{—}}$

$\sqrt{\text{—}}$

O cálculo da medida do lado e do apótema do quadrado inscrito em uma circunferência de raio r é a terceira aplicação do teorema. Assim sendo, considere o quadrado $ABCD$ de lado ℓ_4 inscrito em uma circunferência de centro no ponto O e raio r , representado na Figura 37.

Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e DC , respectivamente. Logo OM — e o segmento OM — é chamado de apótema do quadrado.

Figura 37 – Quadrado inscrito em uma circunferência



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

É fácil perceber que a_4 é a metade de ℓ_4 , ou seja, que $a_4 = \frac{\ell_4}{2}$. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OMB$, temos:

$$\left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = R^2$$
$$\frac{\ell_4^2}{2} = R^2$$
$$\ell_4 = \sqrt{2} R$$

e portanto

$$\ell_4 = \sqrt{2} r$$

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no _____, temos:

$$\boxed{????} \quad (\text{---})$$

$$\boxed{????} \quad \text{---}$$

$$\text{---}$$

$$\text{---}$$

$$\sqrt{\text{---}}$$

$$\frac{\sqrt{\text{---}}}{\text{---}}$$

$$\frac{\sqrt{\text{---}}}{\text{---}}$$

E mais, aplicando o teorema de Pitágoras no _____, temos:

$$(\text{---})$$

$$\left(\frac{\sqrt{\text{---}}}{\text{---}} \right) \quad \text{---}$$

$$\text{---} \quad \text{---}$$

$$\text{---}$$

$$\text{---}$$

$$\sqrt{\text{---}} \quad \boxed{\sqrt{\text{---}}}$$

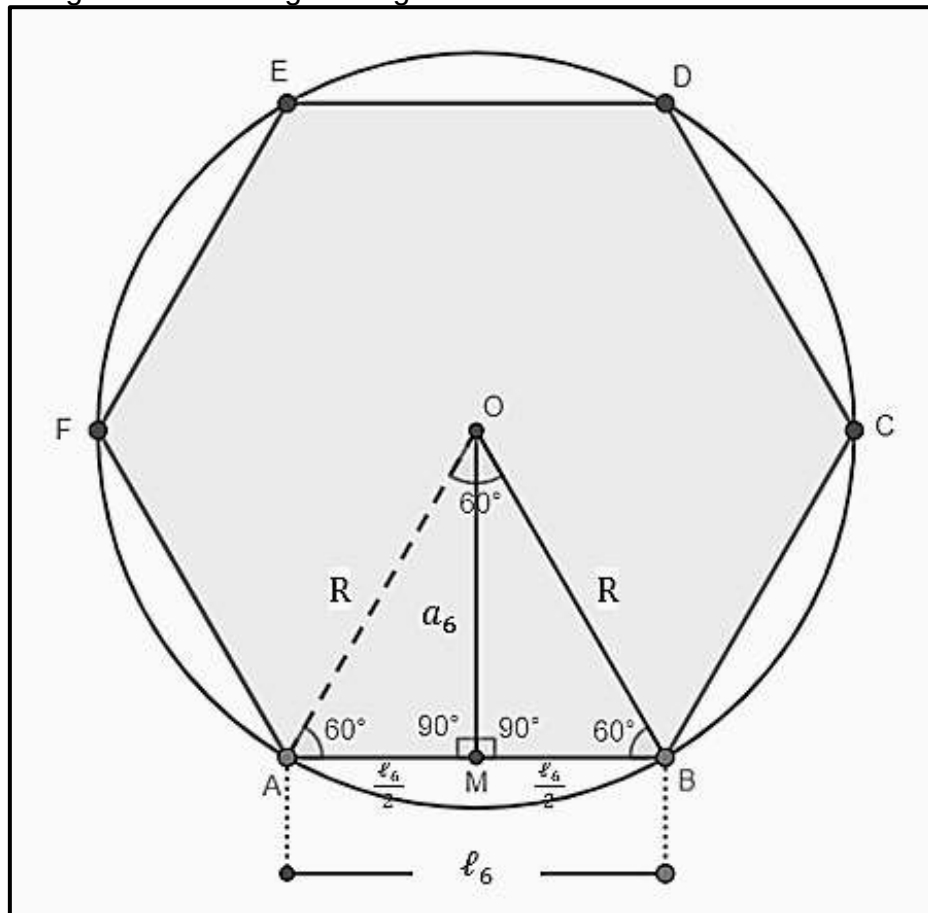
e portanto

$$\frac{(\sqrt{\text{---}}) \sqrt{\text{---}}}{\text{---}}$$

$$\text{---} \quad \boxed{\text{---}}$$

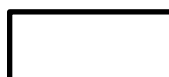
De modo análogo a aplicação anterior, é possível calcular a medida do lado e do apótema do hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio R . Para isso, vamos considerar um hexágono regular de lado ℓ_6 inscrito em uma circunferência de centro no ponto O e raio R , representado na Figura 39. Seja M o ponto médio do lado AB . Logo OM — e o segmento OM é chamado de apótema do hexágono.

Figura 39 – Hexágono regular inscrito em uma circunferência



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

É fácil perceber que OM determina dois triângulos retângulos OMA e OMB idênticos, sendo: um cateto OM comum aos dois triângulos, os catetos AM e MB — devido M ser ponto médio e hipotenusas OA e OB , de modo que $MA = MB$. E mais, pelo fato do hexágono ser regular, o ângulo central foi dividido em seis partes iguais a 60° , de onde se conclui que o $\triangle OMA$ é equilátero. Portanto:



Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no , temos:

(—)

(—)

—

—

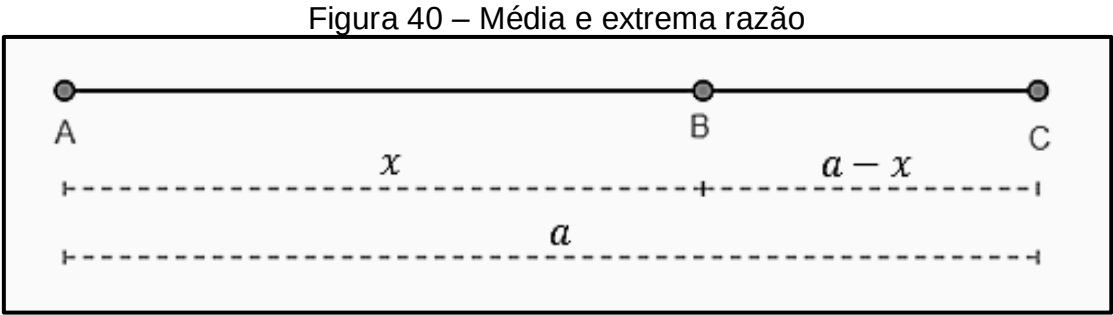
—

√ —

√

—

Antes da aplicação relacionada ao triângulo áureo é necessário apresentar a divisão de um segmento em média e extrema razão. Para isso, vamos considerar o segmento da Figura 40 e tomar um ponto



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

Saraiva (2002) ensina que um ponto divide o segmento em média e extrema razão quando

1112

1112

1112

1112

(3-15)

Assim, chamando e teremos . E mais:

— —

(3-16)

Resolvendo a equação do 2º grau (3-16) em vem que:

$$\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Ou ainda:

$$\frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})}{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})} = \frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})}$$

Como $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é um número compreendido entre 1 e 2, então apenas $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ serve como solução pelo fato de que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ representa a medida de um segmento. Portanto:

$$\frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})}$$

Substituindo este valor no 1º membro da proporção (3-15), obtemos:

$$\frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})} = \frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})}$$

Racionalizando o 1º membro, temos:

$$\frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})} \cdot \frac{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})} = \frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})}$$

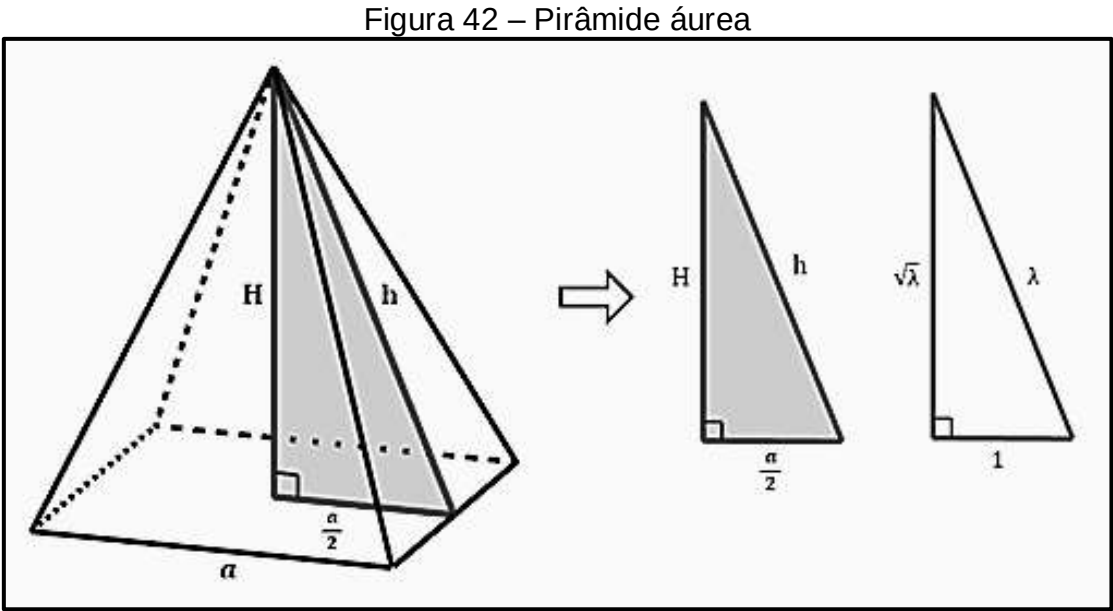
Chamando $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ temos que:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$



onde $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é chamado de número áureo.

Agora que apresentamos o triângulo áureo, vamos mostrar outra aplicação do teorema de Pitágoras, desta vez relacionada a pirâmide áurea. Para isso, vamos considerar a pirâmide quadrangular regular de altura H , aresta da base a e altura da face h representada na Figura 42.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Comparando o triângulo retângulo destacado na pirâmide da Figura 42 com o triângulo áureo, temos que:

$$\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{H}{1}$$

Tomando as razões duas a duas, obtemos:

$$\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{h}{\frac{a}{2}} \quad (3-20)$$

$$\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{h}{\frac{a}{2}} \quad (-) \quad \left(\frac{H}{\frac{a}{2}}\right) = \left(\frac{h}{\frac{a}{2}}\right) \quad (3-21)$$

Igualando os resultados de (3-20) e (3-21) vem que

$$\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{h}{\frac{a}{2}} \quad (3-22)$$

Temos ainda que:

$$\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{h}{\frac{a}{2}} \quad (3-23)$$

Esses resultados nos levam as seguintes propriedades:

- [P1] A área de cada face triangular da pirâmide é igual a área de um quadrado cujo lado é igual a altura da pirâmide. O resultado (3-22) representa simbolicamente essa propriedade.
- [P2] Uma pirâmide quadrangular regular satisfaz essa propriedade se, e somente se, ela for uma pirâmide áurea.

Através do resultado (3-23) e da propriedade [P2] é possível verificar se as pirâmides do Egito são ou não pirâmides áureas. Para isso, vamos considerar as seguintes informações do Quadro 14:

Quadro 14 – Dimensões das pirâmides do Egito

Pirâmide	Quéops	Quéfren	Miquerinos
Altura	146,59m	143,50m	65,00m
Dimensões da base	230,33m x 230,33m	215,20m x 215,20m	102,20m x 104,60m

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

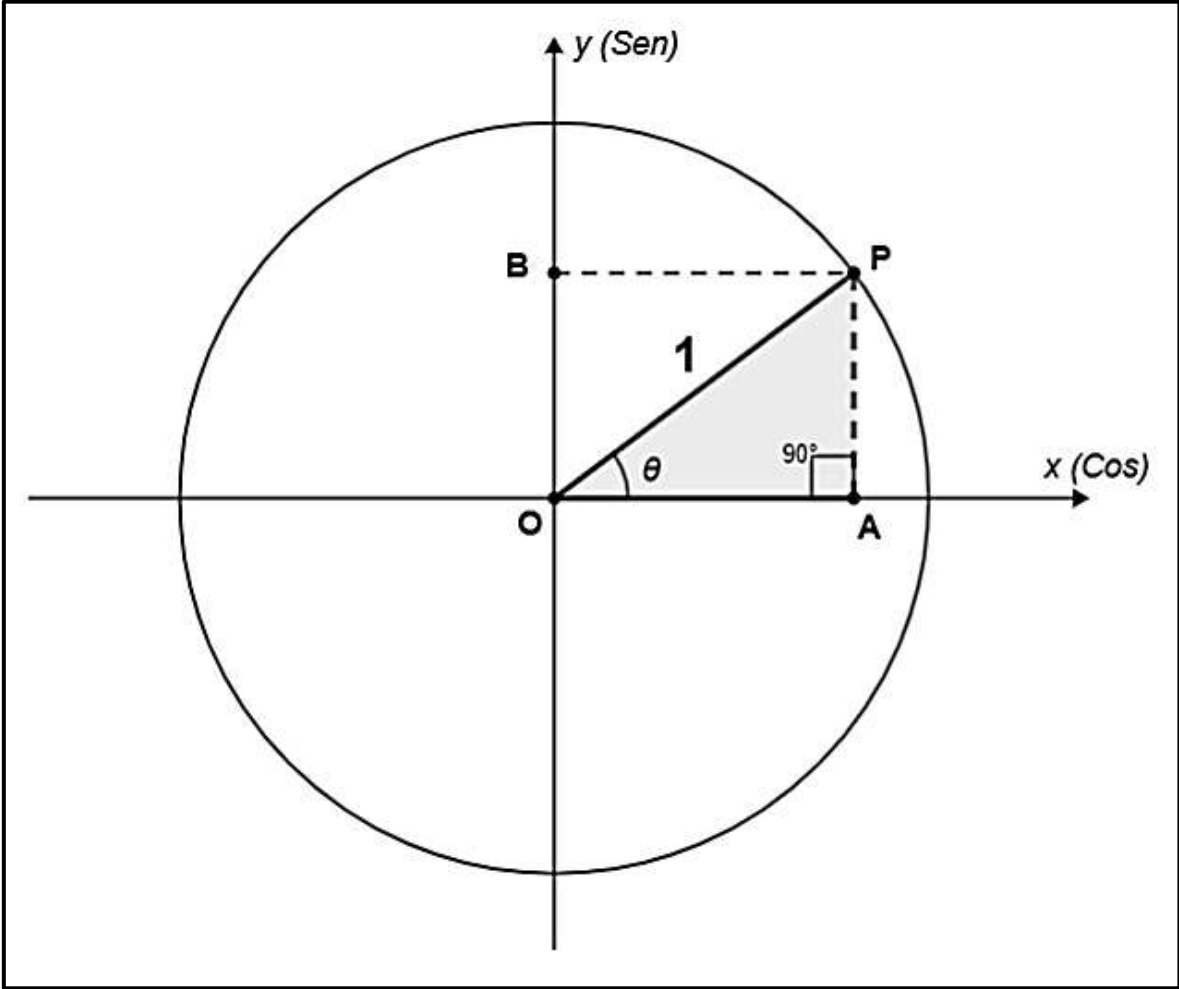
A pirâmide de Quéops é uma pirâmide áurea, pois

Por outro lado, a pirâmide de Quéfren não é uma pirâmide áurea, pois

Já a pirâmide de Miquerinos não é uma pirâmide áurea, pois sua base não é um quadrado.

No 9º ano, durante o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, são apresentadas algumas expressões envolvendo os lados e os ângulos agudos do triângulo. Vamos considerar o _____, retângulo em _____, no círculo trigonométrico de raio unitário (_____ da Figura 43, para relembrar duas dessas razões tomando como referência o ângulo _____, e o envolvimento delas em outra aplicação do teorema de Pitágoras, desta vez na Relação Fundamental da Trigonometria.

Figura 43 – Círculo trigonométrico de raio unitário



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

No , temos que:

????

????

????

????

????

????

????

????

Aplicando o teorema de Pitágoras no obtemos a Relação Fundamental da Trigonometria, isto é:

????

????

????

3.3.3. A recíproca do teorema de Pitágoras:

Como vimos anteriormente, em todo triângulo retângulo de hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b é válida a relação $a^2 + b^2 = c^2$, conhecida como teorema de Pitágoras. Seguindo o raciocínio de Wagner (2015, p. 8), mostraremos agora que a recíproca desse teorema também é verdadeira, isto é:

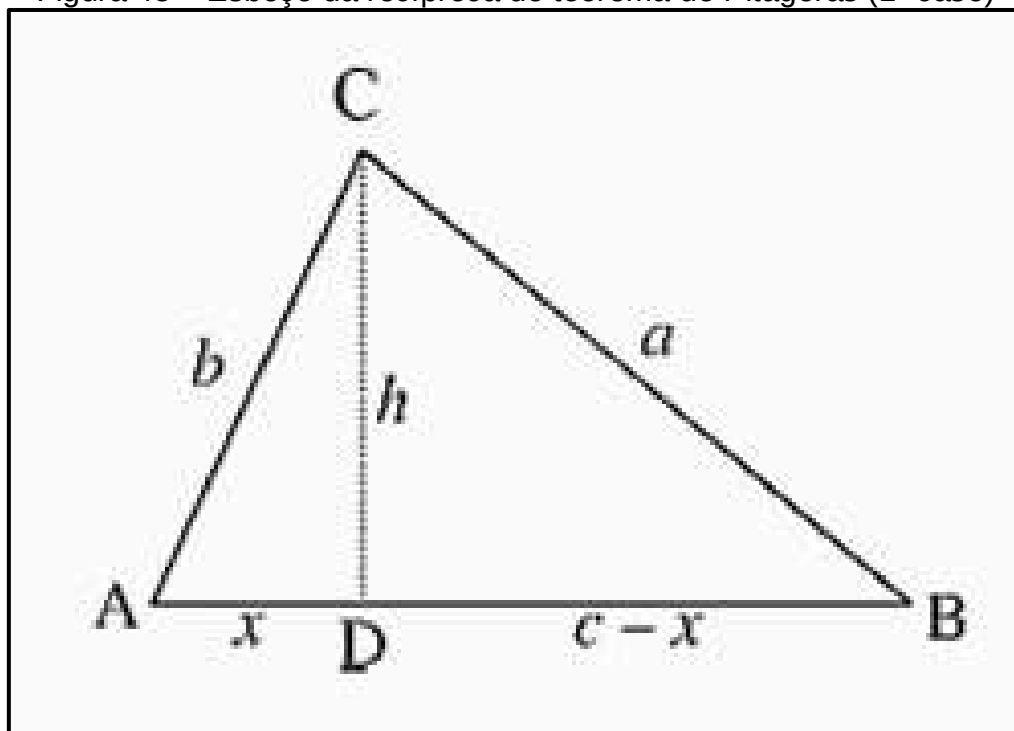
Se a , b e c são números reais positivos com $a^2 + b^2 = c^2$, então o triângulo de lados a , b e c é retângulo.

Dividiremos a demonstração da recíproca em dois casos, a saber: quando o ângulo $\hat{C}$ é reto e quando não é.

1º caso: $\hat{C}$ é reto

Considere o triângulo ABC disposto na Figura 45, com $\hat{C}$ reto, $AC = b$ e $BC = a$. Imaginemos ainda que CD é a altura relativa ao lado AB .

Figura 45 – Esboço da recíproca do teorema de Pitágoras (1º caso)



Fonte: Wagner (2015, p. 9)

Como $\hat{C}$ é reto, então o ponto D que representa a projeção do ponto C pertence ao interior do lado AB , isto é, D está sobre AB . Vamos adotar $AD = x$ e $DB = c - x$. Assim $AB = c$.

Como o $\triangle ABC$ é retângulo em C , temos que

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad (3-24)$$

E mais, como o $\triangle ACD$ também é retângulo em D , temos que

$$AD^2 + CD^2 = AC^2 \quad (3-25)$$

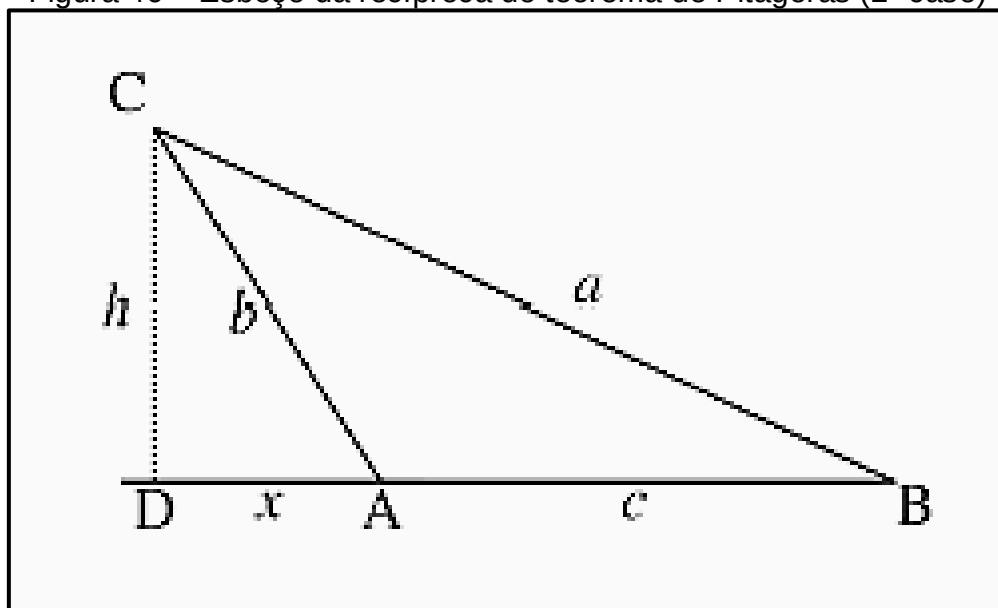
Assim, substituindo (3-24) em (3-25) encontramos:

fato que contraria a condição inicial.

2º caso: $\angle C > 90^\circ$

Considere agora o $\triangle ABC$ disposto na Figura 46, novamente com $\angle C > 90^\circ$, $\angle A < 90^\circ$ e $\angle B < 90^\circ$.

Figura 46 – Esboço da recíproca do teorema de Pitágoras (2º caso)



Fonte: Wagner (2015, p. 9)

Como $\angle C > 90^\circ$, então o ponto D que representa a projeção do ponto C pertence ao exterior do lado AB , isto é, D está sobre o prolongamento de AB . Adotando novamente $h = CD$ e $x = AD$ concluímos que $AB = c$.

Como o $\triangle ACD$ é retângulo em D , temos que

$$AD^2 + CD^2 = AC^2 \quad (3-26)$$

E mais, como o $\triangle ABC$ também é retângulo em C , temos que

$$(3-27)$$

Assim, substituindo (3-26) em (3-27) encontramos:

fato que mais uma vez contraria a condição inicial.

Mostramos assim que

$$a^2 + b^2 \neq c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Isso nos permite afirmar que a condição $a^2 + b^2 = c^2$ só é atendida quando $\triangle ABC$, isto é, que o $\triangle ABC$ de lados medindo a , b e c , necessariamente é retângulo.

3.3.4. A Equação Pitagórica

Mostraremos agora uma maneira simples para descobrir as medidas dos lados de um triângulo pitagórico através de parâmetros bem definidos. Para isso, vamos considerar a equação pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$. É fácil de perceber que esta equação possui apenas duas soluções, chamadas soluções triviais, onde uma das coordenadas é nula. São elas: $(0, c)$ e $(c, 0)$, com $c \in \mathbb{N}$.

Como nesta equação os expoentes das variáveis são pares, podemos procurar as suas soluções apenas no conjunto $\mathbb{N}$. Assim, um terno de números naturais (a, b, c) é chamado de terno pitagórico quando ele soluciona a equação pitagórica acima.

Wagner (2015, p. 11) ensina que um triângulo retângulo de catetos medindo a e b é chamado de triângulo pitagórico primitivo quando esses catetos são números naturais primos entre si, isto é, quando o $\text{MDC}(a, b) = 1$. Neste caso, o terno (a, b, c) que representa os lados do triângulo pitagórico primitivo é dito terno pitagórico primitivo.

De forma geral, qualquer terno da forma (ka, kb, kc) com $k \in \mathbb{N}$ e (a, b, c) também representa um triângulo pitagórico, mas não primitivo.

É correto afirmar então que existem infinitos triângulos pitagóricos originados

a partir de um mesmo terno pitagórico primitivo. Entretanto, não é possível construir um triângulo retângulo quando os três lados possuírem medidas ímpares. Vamos demonstrar esta restrição.

De fato, supondo por hipótese que a medida dos catetos a e b de um triângulo retângulo sejam números ímpares, podemos afirmar que c também seria um número ímpar. Em consequência, temos que $a^2 + b^2$ é um número par. Por outro lado, o teorema de Pitágoras garante que $c^2 = a^2 + b^2$, o que nos permite afirmar que c^2 é par e, por conseguinte, a medida da hipotenusa c também é par, concluindo assim a demonstração.

Podemos admitir ainda que se as medidas do cateto a e da hipotenusa c forem números ímpares, então a medida do cateto b será um número par. De fato, se a é ímpar, então a^2 também é ímpar. Isso nos permite afirmar que $c^2 - a^2$ é um número ímpar. Esta afirmação só será verdadeira se b ou b^2 for um número par. Como por hipótese o cateto a é ímpar, então c é ímpar. Por conseguinte obrigatoriamente b é par. Isso nos permite afirmar que a medida do cateto b é um número par, concluindo assim a demonstração.

Mostraremos agora um modo simples de encontrar os lados de um triângulo pitagórico através de uma fórmula atribuída a Platão (séc.4 a.C.). Para isso, nos apoiaremos nos registros de Araujo (2016, p. 19) durante a demonstração do seguinte teorema:

As soluções naturais da equação pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$ são expressas de modo único, a menos da ordem de a e b , como $a = k(m^2 - n^2)$, $b = k(2mn)$ e $c = k(m^2 + n^2)$, onde $m > n$, com m e n primos entre si e com paridades distintas.

Dividiremos a demonstração em duas partes:

1ª parte: Sejam a , b e c os valores que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Se esses três valores são primos entre si, isto é, se o máximo divisor comum de a , b e c é 1, então dois a dois eles também serão primos entre si.

Já mostramos que se as medidas do cateto a e da hipotenusa c forem números ímpares, então a medida do cateto b será um número par. A relação $a^2 + b^2 = c^2$ pode ser escrita como $a^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$. Dividindo os dois membros dessa igualdade por 4 e fatorando o 1º membro, obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) (-)} \quad (3-28)$$

Como $\frac{a}{b}$, então o 2º membro da igualdade destacada em (3-28) é um número natural quadrado perfeito. Logo podemos reescrever na forma de um produto de dois números naturais quadrados perfeitos e primos entre si. Tomando $\frac{a}{b}$, com $\frac{c}{d}$, e paridades distintas, temos que:

$$(-)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right)$$

$$\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d}$$

$$(I) \quad \frac{a}{b}$$

$$(II) \quad \frac{c}{d}$$

Resolvendo o sistema com (I) e (II) obtemos que

$$\boxed{\frac{a}{b}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{c}{d}}$$

E mais:

$$(-) \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{c}{d}} \quad \boxed{\frac{a}{b}}$$

2ª parte (recíproca do teorema): Dados $\frac{a}{b}$, com $\frac{c}{d}$, e paridades distintas, se considerarmos que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, teremos que $\frac{a}{b}$ será uma solução primitiva da equação pitagórica.

De fato, sabe-se que a solução primitiva da equação pitagórica é formada por números primos entre si. Assim, supondo que $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ com facilidade percebemos que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Portanto, a solução determina valores únicos para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ da seguinte forma:

- Se $\frac{a}{b}$ é um número par, então $\frac{c}{d}$ é a forma simplificada da fração $\frac{a}{b}$.
- Se $\frac{c}{d}$ é um número par, então $\frac{a}{b}$ é a forma simplificada da fração $\frac{c}{d}$.

E assim finalizamos a demonstração.

Apenas a título de exemplificação, para encontrarmos os valores de a e b que geram a solução (a, b, c) , bastaria calcular:

$$\frac{c^2 - a^2}{2} = b^2$$

Ou seja, teríamos $a^2 = c^2 - 2b^2$.

Do mesmo modo, para encontrarmos os valores de a e b que geram a solução (a, b, c) , bastaria calcular:

$$\frac{c^2 + a^2}{2} = b^2$$

Neste caso, teríamos $a^2 = 2b^2 - c^2$.

No Quadro 15 apresentamos alguns ternos pitagóricos obtidos mediante atribuição aleatória de valores para a e b , considerando $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, com $a < b < c$, e paridades distintas:

Quadro 15 – Exemplos de ternos pitagóricos

a	b	c	a	b	c
2	1	3	4	5	(3, 4, 5)
3	1	8	6	10	(8, 6, 10)
3	2	5	12	13	(5, 12, 13)
4	1	15	8	17	(15, 8, 17)
4	2	12	16	20	(12, 16, 20)
4	3	7	24	25	(7, 24, 25)
5	1	24	10	26	(24, 10, 26)
5	2	21	20	29	(21, 20, 29)
5	3	16	30	34	(16, 30, 34)
5	4	9	40	41	(9, 40, 41)
6	1	35	12	37	(35, 12, 37)
6	3	27	36	45	(27, 36, 45)
6	4	20	48	52	(20, 48, 52)
6	5	11	60	61	(11, 60, 61)

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2024).

Note que se atribuirmos a a e b valores ambos pares, ou ambos ímpares, todos os termos do terno serão pares, isto é, sempre encontraremos um terno pitagórico não primitivo. É o caso dos ternos: (8, 6, 10), (12, 16, 20), (24, 10, 26),

(16, 30, 34), (27, 36, 45) e (20, 48, 52).

Por outro lado, sempre que atribuirmos a a e b valores primos entre si, isto é, valores cujo máximo divisor comum é 1, encontraremos um terno pitagórico primitivo. É o caso dos ternos: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (15, 8, 17), (7, 24, 25), (21, 20, 29), (9, 40, 41), (35, 12, 37) e (11, 60, 61).

4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ENSINO DE RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Ao analisar os resultados do Censo 2022, Silva (2024) constatou que apenas 13% das escolas paraenses possuíam laboratório de informática e 40% dos alunos participantes tinham acesso a computadores. Para superar esta condição, o Governo Federal instituiu, através do Decreto nº 11.713/2023, a Estratégia Nacional de Escolas Conectadas (ENEC), uma política pública cuja implementação exigirá esforço conjunto de Estados e Municípios, sob a coordenação do Ministério da Educação, visando garantir conectividade significativa em todas as escolas públicas brasileiras até 2026. No Pará, a meta é garantir que 56% das escolas públicas de educação básica do Estado tenham acesso a internet de qualidade.

Diante desse cenário, optamos por propor na sequência didática, atividades que reunissem materiais de baixo custo, tanto para os professores quanto para os alunos, de modo a não constituir em um obstáculo a sua utilização. Com isso em mente, no presente capítulo apresentamos uma sequência didática composta por três atividades na forma de UARC's para o ensino do objeto matemático pesquisado.

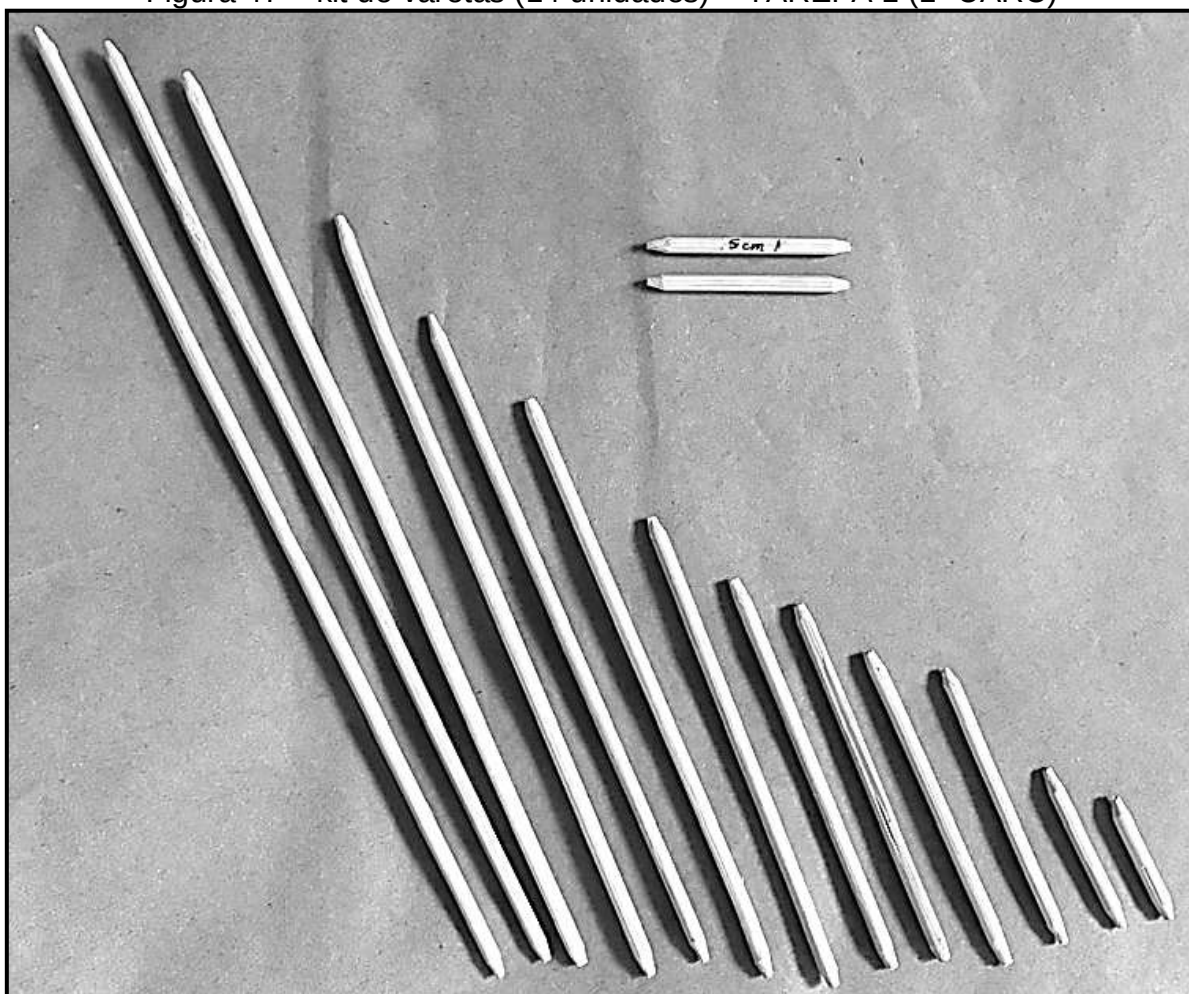
A validação mediante a aplicação da sequência didática proposta não será realizada neste momento, ficando como sugestão para estudos subsequentes. Deixaremos orientações de como fazer a aplicação, bem como a sugestão de leituras que darão o respaldo necessário para a análise dos resultados coletados.

4.1. ATIVIDADES PROPOSTAS

A primeira atividade tem por objetivo fazer com que o aluno reconheça a propriedade da desigualdade triangular, fundamental para que seja possível a formação de um triângulo. Para atingir este objetivo, cada grupo receberá um kit com quatorze varetas de tamanhos variados e será convidado a tentar formar um triângulo com cada conjunto de três varetas indicado na tabela que acompanha a ficha de instrução da atividade, respondendo as perguntas feitas, ou completando as lacunas de modo adequado.

As varetas terão as seguintes medidas: 3cm, 4cm, 5cm, 7cm, 8cm, 9cm, 10cm, 12cm, 15cm, 17cm, 20cm, 24cm, 25cm e 26cm, as quais poderão ou não vir registradas no corpo das varetas conforme observado na Figura 47 com a vareta medindo 5cm.

Figura 47 – kit de varetas (14 unidades) – TAREFA 1 (1ª UARC)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025)

Uma vez compreendida a importância do respeito à propriedade da desigualdade triangular para a formação de um triângulo, será apresentado uma segunda atividade com o objetivo de identificar um tipo específico de triângulo, no caso o triângulo retângulo, e reconhecer a relação métrica existente entre a medida dos seus lados.

Para isso, cada grupo deverá concentrar atenção nos conjuntos de três varetas da atividade anterior em que foi possível formar um triângulo, buscando identificar, com a ajuda de um transferidor, aqueles cujo ângulo oposto ao lado de

maior medida é igual a 90° . Depois, com o auxílio de uma calculadora, farão os cálculos necessários para preencher a tabela presente na ficha de instrução, respondendo as perguntas feitas, ou completando as lacunas de modo adequado até a conclusão da atividade com a formalização do teorema de Pitágoras.

Para ajudar a estabilizar as varetas durante a medição do ângulo oposto ao lado de maior medida, sugerimos que o professor distribua nos grupos alguns discos de massinha de modelar atóxica, conforme observamos na Figura 48, os quais também poderão ser utilizados por ocasião da primeira atividade.

Figura 48 – Triângulo de varetas fixadas com massa – TAREFA 2 (2ª UARC)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025)

Por fim, a terceira atividade proposta tem por objetivo mostrar, através de material manipulável, a validade do teorema de Pitágoras, como uma forma de favorecer a aquisição da habilidade EF09MA13 presente na BNCC. Para isso, os grupos de alunos deverão inicialmente manipular adequadamente as peças confeccionadas em EVA²⁴, sobrepondo-as a um painel de gabarito.

As peças desse quebra-cabeça geométrico deverão ser “cortadas” de acordo com o raciocínio seguido por Perigal (demonstração 5), sendo recomendado ao professor que promova, ao final da atividade, a apresentação desse raciocínio, o qual encontra-se devidamente apresentado no corpo dessa dissertação.

As respostas destacadas nas fichas de instrução ou de observação

²⁴ Etileno-Vinil-Acetato

correspondem às respostas esperadas dos alunos para cada pergunta ou cálculo requerido. Contudo, para facilitar o trabalho do professor na aplicação das atividades propostas, todas as fichas de instrução e/ou de observação citadas constam no ANEXO D deste trabalho, prontas para a impressão e sem as respostas esperadas dos alunos.

TAREFA 1 (1ª UARC)

TÍTULO: Reconhecendo triângulos

OBJETIVO: Reconhecer a propriedade da desigualdade triangular.

MATERIAL UTILIZADO: Varetas de tamanhos pré-definidos, régua milimetrada, caneta ou lápis e a ficha de instrução com a sequência didática.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Comparação de medidas.

PROCEDIMENTOS: Prezado aluno, nesta atividade você deve utilizar as varetas para formar/tentar formar um triângulo com cada conjunto de três varetas indicado no **Quadro 16** e responder as perguntas feitas completando as lacunas de modo adequado. Espera-se que ao fim da atividade você seja capaz de reconhecer a propriedade da desigualdade triangular que garante a existência de um triângulo.

SUGESTÃO AO PROFESSOR: Para esta atividade, sugerimos que o professor divida a turma em grupos de no máximo cinco alunos.

TEMPO ESTIMADO: 01 aula de 50 minutos de duração ou a critério do professor.

[I_i – EP] De posse das varetas entregues pelo professor forme dois triângulos diferentes escolhendo três dessas varetas. **(RESPOSTA LIVRE)**

[I_r] Pelo que você observou durante a atividade anterior é correto afirmar que sempre conseguimos formar um triângulo quaisquer que sejam as varetas escolhidas? **NÃO**.

[I_e] Com os tamanhos indicados na primeira coluna do **Quadro 16**, tente formar um triângulo e depois preencha as demais colunas conforme o modelo, considerando para a medida da maior vareta, para a medida intermediária e para a medida da menor vareta.

Quadro 16 – Ficha de observação (TAREFA 1)

Tamanho das varetas							?	?	?	Formou triângulo?
3, 4 e 5	5	4	3	9	8	7	9>3 (SIM)	8>4 (SIM)	7>5 (SIM)	SIM
3, 5 e 10	10	5	3	15	13	8	15>3 (SIM)	13>5 (SIM)	8>10 (NÃO)	NÃO
7, 24 e 25	25	24	7	49	32	31	49>7 (SIM)	32>24 (SIM)	31>25 (SIM)	SIM
8, 12 e 20	20	12	8	32	28	20	32>8 (SIM)	28>12 (SIM)	20>20 (NÃO)	NÃO
8, 15 e 17	17	15	8	32	25	23	32>8 (SIM)	25>15 (SIM)	23>17 (SIM)	SIM
9, 12 e 15	15	12	9	27	24	21	27>9 (SIM)	24>12 (SIM)	21>15 (SIM)	SIM
9, 12 e 17	17	12	9	29	26	21	29>9 (SIM)	26>12 (SIM)	21>17 (SIM)	SIM
10, 24 e 26	26	24	10	50	36	34	50>10 (SIM)	36>24 (SIM)	34>26 (SIM)	SIM
15, 20 e 25	25	20	15	45	40	35	45>15 (SIM)	40>20 (SIM)	35>25 (SIM)	SIM
15, 24 e 26	26	24	15	50	41	39	50>15 (SIM)	41>24 (SIM)	39>26 (SIM)	SIM

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025)

[I_r] Pelo que você observou ao preencher o **Quadro 16**, sempre foi possível formar um triângulo com o tamanho das varetas considerados? NÃO Em quais casos isso aconteceu? 3, 5, 10 e 8, 12 e 20.

[I_r] Nos casos em que não foi possível formar um triângulo, o que aconteceu quando você comparou a soma das medidas das varetas menores com a medida da vareta maior? a soma foi menor ou igual ao tamanho da vareta maior.

[I_r] E nos casos em que foi possível formar um triângulo, o que aconteceu quando você comparou a soma das medidas das varetas menores com a medida da vareta maior? a soma foi maior que o tamanho da vareta maior.

[I_r] De modo geral, nos casos em que foi possível formar um triângulo, o que aconteceu quando você comparou a soma das medidas de dois lados quaisquer com a medida do terceiro lado? a soma dos dois lados foi maior que o terceiro lado.

[I_f] Em todo triângulo com lados medindo , e , cada lado é menor que a soma dos outros dois. Essa propriedade, conhecida como desigualdade triangular, pode ser representada simbolicamente por:

$$a \quad \text{ou} \quad b \quad \text{ou} \quad c$$

[IA_a] O proprietário de uma casa deseja construir uma piscina triangular com lados medindo , e . Se você fosse o Engenheiro responsável pela obra, o que você diria ao proprietário?

(☒) que é possível realizar esta construção.

(☐) que não é possível realizar esta construção

TAREFA 2 (2ª UARC)

TÍTULO: O teorema de Pitágoras

OBJETIVOS: Identificar um triângulo retângulo e reconhecer a relação métrica existente entre os seus lados.

MATERIAL UTILIZADO: Caneta ou lápis, transferidor, calculadora e a ficha de instrução com a sequência didática.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Relação métrica entre os lados do triângulo retângulo.

PROCEDIMENTOS: Prezado aluno, agora que você já sabe reconhecer quando um triângulo existe, vamos observar uma relação métrica que ocorre entre os seus lados quando dois deles formam 90° entre si. Considere para esta atividade as medidas das varetas em que foi possível formar um triângulo, registradas na ficha de observação da **Tarefa 1**. Observe os triângulos atentamente e preencha o **Quadro 17** conforme o modelo apresentado. Ao fim da atividade você deverá ser capaz de: **(1)** identificar quais daqueles triângulos são retângulos, bem como **(2)** reconhecer e enunciar a relação métrica conhecida como teorema de Pitágoras, envolvendo os lados desses triângulos.

SUGESTÃO AO PROFESSOR: Para esta atividade, sugerimos que o professor divida a turma em grupos de no máximo cinco alunos.

TEMPO ESTIMADO: 01 aula de 50 minutos de duração ou a critério do professor.

[**I_e**] Utilize o transferidor para medir o ângulo oposto ao maior lado dos triângulos formados pelas varetas indicadas no **Quadro 17**. Depois, preencha cuidadosamente a ficha de observação conforme o modelo, efetuando os cálculos quando necessário.

Quadro 17 – Ficha de observação (TAREFA 2)

Tamanho das varetas									Ângulo entre os lados e
3, 4 e 5	5	4	3	25	16	9	25	SIM	(X) ()
7, 24 e 25	25	24	7	625	576	49	625	SIM	(X) ()
8, 15 e 17	17	15	8	289	225	64	289	SIM	(X) ()
9, 12 e 15	15	12	9	225	144	81	225	SIM	(X) ()
9, 12 e 17	17	12	9	289	144	81	225	NÃO	() (X)
10, 24 e 26	26	24	10	676	576	100	676	SIM	(X) ()
15, 20 e 25	25	20	15	625	400	225	625	SIM	(X) ()
15, 24 e 26	26	24	15	676	576	225	801	NÃO	() (X)

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025)

[I_r] Pelo que você observou durante o preenchimento do **Quadro 17**, ao comparar o quadrado da medida do maior lado com a soma dos quadrados das medidas dos lados menores, o resultado foi sempre o mesmo? NÃO.

[I_r] Nos casos em que o quadrado da medida do maior lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos lados menores, qual o ângulo formado pelos lados menores? .

[I_r] Nos casos em que o quadrado da medida do maior lado é diferente da soma dos quadrados das medidas dos lados menores, qual o ângulo formado pelos lados menores? .

[I_r] De modo geral, quando os lados menores formam um ângulo igual a 90°, o quadrado da medida do maior lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos lados menores. Por outro lado, quando os lados menores formam um ângulo diferente de 90°, o quadrado da medida do maior lado é diferente da soma dos quadrados das medidas dos lados menores.

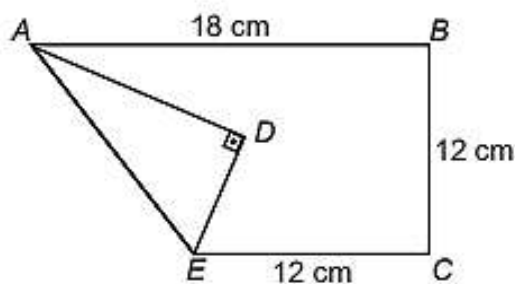
[I_f] Quando os lados menores de um triângulo formam 90° entre si, esse triângulo é classificado como triângulo retângulo. Nesse tipo de triângulo, os lados menores e são chamados de catetos e o lado maior é chamado de hipotenusa.

[I_f] E mais, em todo triângulo retângulo é válida a relação conhecida como teorema de Pitágoras, ou seja, o quadrado da medida do maior lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos lados menores. Em outras palavras, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos. Simbolicamente, podemos representar essa relação por:

$$a^2 = \quad + \quad$$

[I_{A_r}] (Problema 1) As extremidades de um cabo de aço totalmente esticado estão presas no topo de um prédio e no topo de um poste, respectivamente, com e de altura. Admitindo que o terreno nesse local seja perfeitamente horizontal, e que a distância entre o prédio e o poste é de , determine a medida do comprimento desse cabo de aço.

[I_{A_r}] (Problema 2 – ENEM, 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de por . Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento **AE** é:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt{\quad} \text{ cm}$ | d) $\sqrt{\quad} \text{ cm}$ |
| b) $\sqrt{\quad} \text{ cm}$ | e) $\sqrt{\quad} \text{ cm}$ |
| c) $\quad \text{ cm}$ | |

TAREFA 3 (3ª UARC)

TÍTULO: Comprovando o teorema de Pitágoras (construção de Perigal)

OBJETIVOS: Mostrar através de material manipulável a validade do teorema de Pitágoras.

MATERIAL UTILIZADO: Peças de EVA, painel de gabarito e a ficha de instrução com a sequência didática.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Relação métrica entre os lados do triângulo retângulo.

PROCEDIMENTOS: Prezado aluno, agora que você já conhece a relação métrica envolvendo os lados de um triângulo retângulo (teorema de Pitágoras), vamos comprovar a validade dessa relação mediante a manipulação de materiais concreto em EVA. Para isso, siga atentamente as orientações contidas nesta ficha de instrução. Ao fim da atividade você deverá ser capaz de mostrar a relação métrica conhecida como teorema de Pitágoras.

SUGESTÃO AO PROFESSOR: Sugerimos que após a atividade o professor apresente à turma a construção geométrica desenvolvida por Perigal para a dissecação das peças.

TEMPO ESTIMADO: 01 aula de 50 minutos de duração ou a critério do professor.

[I_e] Distribua o conjunto de peças recebidas, encaixando quando necessário, de modo a cobrir completamente os quadrados Q1 e Q2 do painel de gabarito disponível no ANEXO E.

[I_r] Com base no que você observou, qual a medida do lado do quadrado Q1? .
Como você representaria a área da peça de cor azul? .

[I_r] Com base no que você observou, qual a medida do lado do quadrado Q2? .
Como você representaria a área das peças de cor amarela? .

[I_e] Movimente o conjunto de peças recebidas para cima do quadrado Q3 no painel de gabarito e tente cobri-lo completamente.

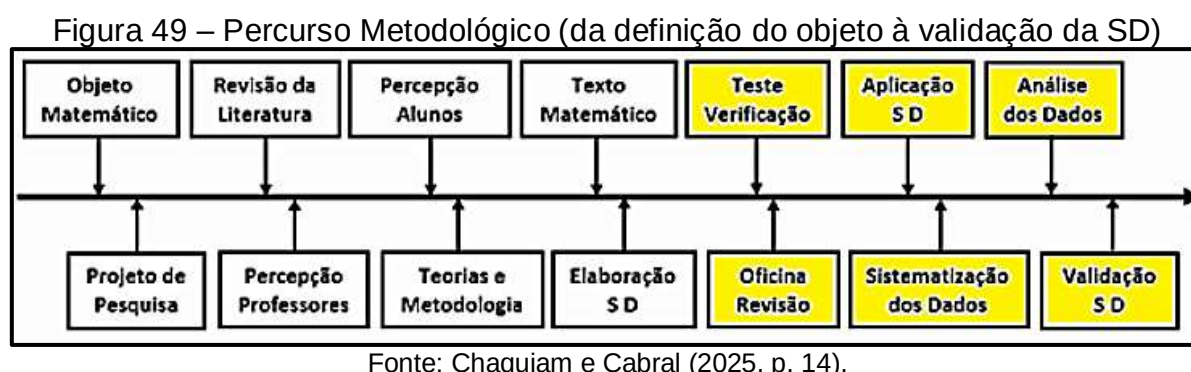
[I_r] Você conseguiu cobrir completamente o quadrado Q3? SIM. Quantas peças você utilizou? TODAS.

[I_r] Com base no que você observou, o que é possível afirmar a respeito da área do quadrado Q3 em comparação as áreas dos quadrados Q1 e Q2? que a área do quadrado Q3 é igual a soma das áreas dos quadrados Q1 e Q2.

[I_f] Simbolicamente, como você representaria este fato? .

5. APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

Como dissemos anteriormente, a sequência didática apresentada não será aplicada e validada neste momento, ficando as últimas 06 (seis) etapas do percurso metodológico proposto por Chaquiam e Cabral (2025), representado na Figura 49, como sugestão para estudos subsequentes.



Segundo os autores, o Teste de Verificação visa “identificar se os alunos detêm os conhecimentos mínimos para garantir a aplicação da sequência didática” (Chaquiam; Cabral, 2025, p. 22). Os resultados desse teste apontarão a necessidade do professor/pesquisador realizar, ou não, uma Oficina de Revisão sobre o objeto matemático estudado, que poderá ser oferecida por meio do ensino tradicional, ou outra metodologia a critério desse professor/pesquisador.

Vencida esta etapa, é hora de definir o que Chaquiam e Cabral (2025) chamam de Turma de Aplicação (TA) e Turma de Controle (TC). Para isso, é recomendável que a turma seja dividida em dois grupos. O primeiro grupo corresponde à parte da turma onde será aplicada a SD, isto é, será a nossa Turma de Aplicação (TA) que ficará sob a responsabilidade do professor/pesquisador. O segundo grupo permanecerá sob a responsabilidade do professor titular da turma e não terão contato com a SD proposta pelo professor/pesquisador.

Apos a aplicação da SD, os dois grupos serão submetidos a um novo teste, nos moldes da Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a) proposto por Cabral (2017), visando aferir não apenas o nível de aprendizagem dos alunos, como também comparar o aproveitamento deles (TA x TC).

Todo o processo de aplicação da SD deve ser registrado, preferencialmente em áudio ou vídeo, de modo que, após a realização das suas transcrições e

categorizações, seja possível analisar fragmentos de todo o processo interativo durante o desenvolvimento da SD em busca de indícios que comprovem a aprendizagem do objeto matemático ensinado.

De acordo com os autores, a etapa de validação está fundamentada “na Análise Microgenética em Góes (2000) e na Análise do Discurso em Mortimer e Scott (2002)” (Chaquiam; Cabral, 2025, p. 17). A primeira é um tipo de abordagem metodológica utilizada em contextos educacionais, cuja forma de produção de dados está focada no recorte de indícios de episódios específicos ocorridos durante a interação entre os sujeitos investigados.

De outro lado, na ferramenta de análise desenvolvida por Mortimer e Scott (2002), os autores apresentam uma linguagem para descrever o gênero de discurso nas salas de aula de ciências de acordo com as ideias de Bakhtin, para quem “cada esfera na qual a linguagem é usada desenvolve seus tipos relativamente estáveis de enunciados. A isso nós podemos chamar de gêneros de discurso” (Bakhtin, 1986, apud Mortimer; Scott, 2002, p. 284).

Para mais detalhes relacionados às etapas de aplicação e validação de uma SD, além de Chaquiam e Cabral (2025), recomendamos também o estudo dos trabalhos de Góes (2000), Mortimer e Scott (2002), Silva (2020), Cabral *et al.* (2020), Silva, Chaquiam e Cabral (2022) e Silva (2024).

CONCLUSÕES

A decisão por investigar o ensino do teorema de Pitágoras nasceu da percepção de que os alunos estavam chegando ao Ensino Médio sem ter estudado, ou com baixa aprendizagem sobre esse importante tema, haja vista as dificuldades observadas quando do estudo sobre a relação fundamental da trigonometria ou do cálculo da distância entre dois pontos. Essa percepção, inicialmente empírica, foi posteriormente confirmada nas análises de dados oficiais e estudo diagnóstico de campo com alunos egressos do Ensino Fundamental.

Diante disso, essa pesquisa procurou investigar especificamente o ensino das relações métricas no triângulo retângulo, com destaque para as verificações experimentais e a demonstração do teorema de Pitágoras, e responder a seguinte questão norteadora: Que potencialidades apresentam uma Sequência Didática (SD), estruturada segundo as Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC), em relação à aprendizagem do teorema de Pitágoras?

A fim de responder esta pergunta, definimos como objetivo geral investigar as potencialidades do uso de uma sequência didática para o ensino do teorema de Pitágoras, aplicada junto a um grupo de alunos do 9º ano da rede pública de Ensino Fundamental. Para atingirmos este objetivo, estabelecemos como objetivos específicos: (1) mapear os estudos realizados sobre o ensino e a aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo, com destaque para o teorema de Pitágoras, (2) realizar um diagnóstico da aprendizagem sobre o teorema de Pitágoras junto a uma amostra com alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir da aplicação e análise de questionários, (3) elaborar atividades na forma de uma SD, estruturada segundo as UARC, com base na revisão de literatura e do diagnóstico realizado.

De modo geral, o mapeamento dos estudos realizados apontou que poucos trabalhos sobre o ensino e a aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo foram publicados no período de busca definido, sendo que entre as publicações, a maioria ocorreu na forma de artigos científicos. Estudos mais amplos, como uma dissertação, dependendo da metodologia adotada, tiveram seus resultados comprometidos devido às restrições provocadas pela Covid-19, como vimos em D1.

Em relação ao diagnóstico da aprendizagem, a análise das questões do teste

de verificação aplicado mostrou que a faixa de acerto da amostra pesquisada ficou entre 14% a 51%, resultado em linha com o observado em testes de avaliação em massa, como Saeb e ENEM. Dados do Saeb (2021), por exemplo, apontaram um aumento no número de estudantes nos níveis 0, 1, 2 ou 3 da escala de proficiência quando comparados com o Saeb (2019), indicando uma piora na proficiência dos estudantes paraenses.

Uma vez que a escala de proficiência é composta por níveis progressivos e cumulativos, onde cada nível da escala assegura o acúmulo dos saberes e habilidades dos níveis anteriores, e considerando que o assunto teorema de Pitágoras só aparece nos níveis 6 e 7 da escala, podemos inferir com razoável grau de certeza, que os egressos do Ensino Fundamental estão concluindo esta etapa do ensino sem a aquisição das habilidades e competências desse objeto matemático.

Para melhorar esse quadro, apresentamos duas contribuições, sendo que a primeira, uma SD estruturada segundo as UARC com base na revisão de literatura e do diagnóstico realizado, não foi aplicada e, conseqüentemente, não teve aferida sua validação. Em razão desse fato, a questão norteadora permanece sem resposta, tornando a SD proposta um possível ponto de partida para estudos futuros.

A segunda contribuição, e que será o Produto Educacional (PE) associado a essa pesquisa, é um livro contendo doze formas variadas, e não triviais, de demonstrar o teorema de Pitágoras, cujo nível de dificuldade envolvido consideramos compatível com o esperado de um aluno que está concluindo o Ensino Fundamental. Saber demonstrar o teorema de Pitágoras está prevista na habilidade EF09MA13 da BNCC e sua aquisição capacita o aluno a fazer uso desse teorema em futuras aplicações.

Além disso, as demonstrações apresentadas tornam-se um material que pode contribuir não apenas com o processo de ensino do teorema de Pitágoras, como também à formação inicial ou continuada de professores de Matemática por serem um diferencial em relação ao que é apresentado nos livros didáticos de Matemática, sendo que uma parte das demonstrações que apresentamos já foram publicadas na Revista Paranaense de Educação Matemática, e podem ser acessadas pelo [link](#).

A jornada que hora se encerra, possibilitou preencher uma lacuna na formação desse pesquisador que vai muito além do aprofundamento sobre o objeto matemático estudado, mas me permitiu conhecer novas teorias, recursos e formas de ensino que certamente irão transformar a minha práxis pedagógica.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ALSINA, Claudi. **La secta de los números: el teorema de Pitágoras**. Espanha: RBA, 2010.

ARAUJO, Anesio Amancio de. **Teorema de Pitágoras: história, demonstrações e aplicações**. 2016. 33f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, 2016. Disponível em: <http://repositorio2.unb.br/jspui/handle/10482/21136>. Acesso em: 17 mai. 2024.

ARAÚJO, Denise Lino de. O que é (e como faz) sequência didática?. **Revista Entrepalavras**, Fortaleza, ano 3, v. 3, n. 1, p. 322-334, jan/jul. 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/23796>. Acesso em: 13 de out. 2025.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini: 9º ano** (manual do professor). 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022. Disponível em: <https://pnld.moderna.com.br/wp-content/uploads/2023/05/EDIT-Mat-Bianchini-Matematica-9-ano.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2024.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de Elza Furtado Gomide. 10ª reimpressão. São Paulo: Blucher, 1974.

BRASIL. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. Sistema de Avaliação da Educação Básica: Matemática. **Relatório de Resultados do Saeb 2021**. v. 01. Brasília, DF: INEP/MEC, 2023. Disponível em https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_1.pdf. Acesso em: 08 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 08 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia Digital PNLD**. Brasília: MEC/SEB/FNDE, 2024. Disponível em <https://www.gov.br/fnde/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/pnld-2024-2013-objeto-1/pnld-2024-2013-objeto-1>. Acesso em 27 abr. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 22 fev. 2025.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Pará: SBM, 2017.

CABRAL, Natanael Freitas; CHAQUIAM, Miguel; POCK, Marcone Augusto; DIAS, Gustavo Nogueira; PINTO, Gerson Pompeu. UARC: Um Organizador de Sequência Didática na Área de Matemática. **Revista Brasileira de Desenvolvimento**, [S. l.], v. 6, p. 34191-34208, 2020. DOI: <https://doi.org/10.34117/bjdv6n6-098>. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/11121>. Acesso em: 13 set. 2025.

CARDOSO, Mikaelle Barboza. **Sequências didáticas**: orientações para iniciantes na pesquisa em educação matemática. 1. ed. Iguatu, CE: Quipá Editora, 2024. 50p. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/742078>. Acesso em: 13 de out. 2025.

CHAQUIAM, Miguel; CABRAL, Natanael Freitas. Um percurso metodológico para elaboração e validação de sequências didática. *In*: Encontro Guamaense dos Estudantes de Matemática, 6., 2025, São Miguel do Guamá. **Anais [...]**. Confresa: Gnosis Carajás, 2025. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1xeJ0ZrnRnFsMWlwFA1qMtdY-hFBvI9z9/view>. Acesso em: 12 mar. 2026.

CORRÊA, Fernando Emmi; CHAQUIAM, Miguel. Teorema de Pitágoras: história e demonstrações para sala de aula. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 15, n. 36, p. 01–17, 2026. DOI: 10.33871/rpem.2026.15.36.10677. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/10677>. Acesso em: 25 mai. 2026.

CRESWELL, John Ward. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução de Luciana de Oliveira da Rocha. 2ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CRUZ, Romildo Pereira da; QUARTIERI, Marli Teresinha. Investigando conhecimentos prévios de trigonometria dos alunos do 9º ano do ensino fundamental. Universidade La Salle - **Revista de Educação, Ciência e Cultura (RECC)**. v. 26, n. 3, p. 1-18, 2021. Disponível em <https://revistas.unilasalle.edu.br/index.php/Educacao/article/view/6788/pdf>. Acesso em 20 jan. 2024.

CUT THE KNOT. **Pythagorean theorem**. Disponível em: <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml#>. Acesso em: 28 out. 2024.

DANTE, L. R. Livro didático de Matemática: uso ou abuso? **Em Aberto**, v. 16, n. 69, p. 83-97, Brasília, 1996. DOI <https://doi.org/10.24109/2176-6673.emaberto.16i69.%25p>. Disponível em: <https://emaberto.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/article/view/2375/2114>. Acesso em: 06 out. 2024.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v. 09, 7ª Ed., São Paulo: Atual, 1993.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higyno Hugueros Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FERREIRA, Anderson Portal. **O ensino de relações métricas no triângulo retângulo por meio de atividades**. 2018. 213f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018. Disponível em <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/571244>. Acesso em 25 jan. 2024.

FONSECA, Carla Isabel Teixeira Tavares Rebimbas da. **As Funções Exponenciais e Logarítmica nos livros didáticos escolares do 12º ano**. 2013. 153f. Dissertação (mestrado) – Universidade de Aveiro, Departamento de Educação, Portugal, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10773/11585>. Acesso em: 03 mai. 2025.

FONSECA, Natally Palaro da. **Laboratório de ensino de matemática no processo de ensino-aprendizagem**. 2018. 65f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2018. Disponível em <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/58990>. Acesso em 20 jan. 2024.

FOWLER, David; ROBSON, Eleanor. **Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context**. *Historia Mathematica*. v. 25, p. 366-378. 1998. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086098922091>. Acesso em: 28 mar. 2025

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da matemática: 9º ano** (manual do professor). 1. ed. São Paulo: FTD, 2022. Disponível em: https://issuu.com/editoraftd/docs/immmp0000090079p240100020020_cara-reduz. Acesso em: 03 mai. 2025.

GÓES, Maria Cecília Rafael de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cadernos CEDES**, v. 50. Universidade de Campinas, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0101-32622000000100002>. Acesso em: 26 de jun. 2024.

GONÇALVES, Bruna Maria Vieira; CARDOSO, Mikaelle Barboza; MORAES, Jane Bezerra de. Uma sequência didática para o ensino do teorema de pitágoras a partir de construções geométricas. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**. v. 08, n. 22, p. 102-116, 2021. Disponível em <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/3935/3915>. Acesso em 20 jan. 2024.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade: 9º ano** (manual do professor). 10. ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022. Disponível em: https://storage.googleapis.com/edocente-content-production/PNLD/PNLD_2024_OBJETO_1/Saraiva/Matematica/index_matematica_9_ano_MP.pdf. Acesso em: 03 mai. 2025.

MASETTI, Cristina. **Análise de livros didáticos de matemática: função exponencial**. 2016. 163f. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2016. Disponível em:

<https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/19027>. Acesso em: 02 mai. 2025.

MORTIMER, Eduardo Fleury; SCOTT, Philip Harland. Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. **Investigações em ensino de ciências**, v. 7, n. 3, p. 283–306, 2002. Disponível em: <https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/562/355>. Acesso em: 25 mar. 2024.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. 1. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013. 288p.

ORTIZ, Samara. **A Matemática da Babilônia**. 2020. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/351661897_A_Matematica_da_Babilonia/citation/download. Acesso em: 24 mar. 2025.

PONTES, Agnaldo Reis; PAIXÃO, Antônio Jorge Paraense da. Uma abordagem das relações métricas no triângulo retângulo para alunos do campo. **Revista Educere Et Educare**, v.16, n. 39, p. 340-346. mai./ago.2021. Disponível em <https://e-revista.unioeste.br/index.php/educereeteducare/article/view/27389/17617>. Acesso em 20 jan. 2024.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTANA, Joalisson Bahia. **Atenção seletiva e teoria dos campos conceituais: articulação para a aprendizagem da noção de relações métricas no triângulo retângulo**. 2023. 188f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023. Disponível em <https://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/18476>. Acesso em 20 jan. 2024.

SANTOS, Ana Paula Rodrigues Alves; ALVES, Francisco Régis Vieira. A Engenharia Didática para o ensino de olimpíadas de matemática: situações olímpicas com o amparo do software Geogebra. **GÓNDOLA, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**. v.13, n. 01, p. 141-154. jan./jul.2018, doi: <http://doi.org/10.14483/23464712.11732>. Acesso em 20 jan.2024.

SARAIVA, José Cloves Verde. **As pirâmides do Egito e a razão áurea**. *Revista do Professor de Matemática*, v. 48, [S.l.], [2002?]. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/48/1rpm.htm>. Acesso em: 15 jul. 2024.

SILVA, Danniel Emanuel Bruno. **O teorema de Pitágoras: abordagem no cotidiano da educação matemática e suas diversas demonstrações**. 2014. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/25068>. Acesso em: 01 nov. 2024.

SILVA, Delciana Góes da. **Ensino de semelhanças de triângulos com materiais**

manipuláveis. 2024. 200f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2024. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/748876>. Acesso em: 01 mai. 2025.

SILVA, Edna Machado da. **O conceito de função e suas linguagens**. 2020. 178f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/597753>. Acesso em: 27 mar. 2024.

SILVA, Edna Machado da; CHAQUIAM, Miguel; CABRAL, Natanael Freitas. Um percurso metodológico para constituição de sequências didáticas: o ensino do conceito de função. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 9, n. 1, p. 17–40, 2022. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/55855>. Acesso em: 13 set. 2025.

SILVA, Iolanda Possidônio dos Santos; BARBOSA, Edelweis José Tavares. A Teoria Antropológica do Didático como uma ferramenta metodológica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo. **AMAZÔNIA-Revista de Educação em Ciências e Matemática**, v.18, n. 41, p. 142-158, 2022. Disponível em <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/13370/9562>. Acesso em 20 jan.2024.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Cláudio Cesar Manso. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetike**, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2014. DOI: 10.20396/zet.v21i39.8646602. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602>. Acesso em: 11 abr. 2024.

VASCONCELOS, Danilo Monteiro de; CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. Idoneidade cognitivo-afetiva de uma sequência didática para a construção do conceito de razões trigonométricas por meio de uma história em quadrinhos. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. v. 10, n. 02, p. 1-24, 2019. Disponível em <https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/240718/pdf>. Acesso em 20 jan.2024.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2024.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224p.

ZBS - Data Analytics Intelligence. ZBS Educa: **Resultados ENEM**. Disponível em: <https://www.zbs.com.br/enem-anteriores>. Acesso em: 05 mai. 2024.

ANEXO A: QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno(a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Para o êxito deste trabalho precisamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo. Desde já agradecemos sua cooperação e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

- 1- **Idade:** _____ anos
- 2- **Gênero:** ☐ M. ☐ F. ☐ outro
- 3- **Série:** _____ Ano
- 4- **Tipo de escola que estuda?** ☐ Municipal ☐ Estadual ☐ Conveniada ☐ Federal
- 5- **Você já ficou em dependência?** ☐ Não ☐ Sim. Em quais disciplinas? _____
- 6- **Você gosta de Matemática?** ☐ Não gosto ☐ Suporto ☐ Gosto um pouco ☐ Adoro
- 7- **Qual a escolaridade do seu responsável masculino?**
☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou
- 8- **Qual a escolaridade da sua responsável feminina?**
☐ Superior ☐ Médio ☐ Fundamental ☐ Fundamental incompleto ☐ Não estudou
- 9- **As aulas de Matemática despertam sua atenção em aprender os conteúdos ensinados?**
☐ Sim ☐ Não ☐ às vezes
- 10- **Com que frequência você estuda matemática fora da escola?**
☐ Todo dia ☐ Somente nos finais de semana ☐ No período de prova
☐ Só na véspera da prova ☐ Não estudo fora da escola.
- 11- **Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?**
☐ Professor particular ☐ pai/mãe ☐ irmão/irmã ☐ tio/tia ☐ avô/avó ☐ Ninguém
☐ Outros. Quem? _____
- 12- **Você consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula com seu dia a dia?** ☐ Sim ☐ Não ☐ Às vezes
- 13- **Seu professor de matemática do ano passado demonstrava domínio do conteúdo?**
☐ Sim ☐ Não
- 14- **No ano passado você conseguia entender as explicações dadas nas aulas de matemática?**
☐ Sempre ☐ Quase sempre ☐ Às vezes ☐ Poucas vezes ☐ Nunca
- 15- **Como você avalia as explicações do seu professor de matemática do ano passado?**
☐ Ruim ☐ Regular ☐ Boa ☐ Excelente
- 16- **Como você se sente quando está diante de uma avaliação em matemática?**
☐ Contente ☐ Tranquilo ☐ com Medo ☐ Preocupado ☐ com Raiva ☐ com Calafrios
- 17- **No ano passado quais formas de atividades e/ou trabalho o seu Professor(a) de matemática mais utilizou para a avaliação da aprendizagem?**
☐ Provas/simulado ☐ Testes semanais ☐ Seminários ☐ Pesquisas ☐ Projetos
☐ Outros. Quais? _____
- 18- **Você já estudou o Teorema de Pitágoras?** ☐ Sim ☐ Não
- 19- **Se você na questão acima respondeu sim, diga em qual ano?** _____
- 20- **Quando você estudou o Teorema de Pitágoras, a maioria das aulas iniciaram:**
☐ Pela definição seguida de exemplos e exercícios;
☐ História do assunto para depois explorar os conceitos;
☐ com uma situação problema para depois introduzir o assunto;
☐ Com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo;
☐ com jogos para depois sistematizar os conceitos.

21- Para praticar o conteúdo do Teorema de Pitágoras seu professor de matemática do ano passado, mais utilizava:

- ☐ Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos;
- ☐ Apresentar jogos envolvendo o assunto;
- ☐ Solicitar que os alunos resolvessem os exercícios do livro didático;
- ☐ Não propunha questões de fixação;
- ☐ Solicitava que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver.

22- Com base na sua experiência de aluno quando você estudou o Teorema de Pitágoras preencha o quadro a seguir.

Objeto Matemático: RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO							
Mestrando: Fernando Emmi Correa							
Orientador: Miguel Chaquiam							
Nº	RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	Você lembra de ter estudado?		Qual grau de dificuldade que você teve para aprender?			
		Sim	Não	Muito Fácil	Fácil	Difícil	Muito Difícil
1	Conceito de ângulos agudo						
2	Conceito de ângulo reto						
3	Conceito de ângulo obtuso.						
4	Classificação de polígonos quanto aos lados						
5	Classificação de polígonos quanto aos ângulos						
6	Definição de triângulo acutângulo						
7	Definição de triângulo obtusângulo						
8	Definição de triângulo retângulo						
9	Identificação dos catetos em um Triângulo Retângulo						
10	Identificação da hipotenusa em um Triângulo Retângulo						
11	Identificação da altura em um Triângulo Retângulo						
12	Identificação das projeções dos catetos em um Triângulo Retângulo						
13	Definição de figuras semelhantes						
14	Definição de triângulos semelhantes						
15	Identificação do caso de semelhança de triângulos (lado-lado-lado)						
16	Identificação do caso de semelhança de triângulos (lado-ângulo-lado)						
17	Identificação do caso de semelhança de triângulos (ângulo-lado-ângulo)						
18	Identificação do caso de semelhança de triângulos (lado-ângulo-ângulo oposto)						
19	Identificação da 1ª Relação Métrica no Triângulo Retângulo: a hipotenusa é igual a soma das projeções						
20	Identificação da 2ª Relação Métrica no Triângulo Retângulo: o quadrado da altura é igual ao produto das projeções						
21	Identificação da 3ª Relação Métrica no Triângulo Retângulo: o quadrado de um cateto é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa						

22	Identificação da 4ª Relação Métrica no Triângulo Retângulo: o produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto dos catetos						
23	Identificação da 5ª Relação Métrica no Triângulo Retângulo: o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos						
24	História do Teorema de Pitágoras						
25	Demonstrações do Teorema de Pitágoras						
26	Problemas envolvendo o uso do Teorema de Pitágoras						
27	Aplicação do Teorema de Pitágoras no cálculo de medidas acessíveis						
28	Aplicação do Teorema de Pitágoras no cálculo de medidas inacessíveis						

ANEXO B: TCLE DOS ALUNOS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO- TCLE

Senhor(a) responsável

Você está sendo consultado sobre a possibilidade de seu/sua filho(a), participar da pesquisa que tem como objetivo realizar um diagnóstico sobre como vem ocorrendo o ensino de Matemática em sala de aula, sob a responsabilidade do mestrando Fernando Emmi Correa e das professoras Ana Kely Martins da Silva e Maria de Lourdes Silva Santos, vinculados ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, da Universidade do Estado do Pará.

Com esse trabalho de pesquisa estamos buscando investigar como vem ocorrendo o ensino e aprendizagem do Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental II. A participação do(a) estudante consistirá em responder um questionário e resolver um teste de verificação de conhecimentos sobre o assunto. **As informações produzidas para pesquisa terão o anonimato dos estudantes garantido.**

Os resultados da pesquisa poderão ser publicados e mesmo assim a identidade do aluno(a) será preservada. Você e o(a) estudante não terão gastos ou ganho financeiro por participar desta pesquisa. Os benefícios serão de natureza acadêmica, gerando um estudo científico dos resultados obtidos com a intenção de melhorias para o ensino de matemática nas escolas públicas. Você é livre para decidir se o estudante participará da pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com o pesquisador Fernando Emmi Correa, ou com a Coordenação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM) do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), Tv. Djalma Dutra s/n. Telégrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010.

Belém-Pa, 08 de agosto de 2024.

Fernando Emmi Correa
pesquisador

Eu, _____ autorizo
meu/minha filho(a) _____ a participar do projeto
citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

Assinatura do responsável

ANEXO C: TESTE DE VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TESTE DE VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM DO ENSINO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Durante a elaboração de um projeto, um arquiteto coletou algumas medidas de ângulos na planta. As medições foram 90° , 120° e 75° . Na geometria sabemos que os ângulos podem ser classificados de acordo com a sua medida. Nesse caso, os ângulos coletados pelo arquiteto são, respectivamente:

- A) agudo, reto, obtuso
- B) agudo, obtuso, reto
- C) reto, agudo, obtuso
- D) reto, obtuso, agudo
- E) obtuso, obtuso, agudo

Fonte: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-Angulos.htm>

2. Verifique se as afirmativas são verdadeiras (V) ou falsas (F) e marque a opção que classifica a sequência corretamente.

- I - Triângulo equilátero é aquele com as medidas de todos seus lados iguais.
- II - Escaleno é o nome de um triângulo que possui as medidas de dois lados iguais.
- III - Obtusângulo é o triângulo que possui ângulo reto.
- IV - Chama-se acutângulo o triângulo com seus três ângulos internos agudos.

- A) V, F, V, V
- B) F, F, F, V
- C) V, F, F, V
- D) V, F, F, F
- E) V, V, V, V

Fonte: <https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-poligonos/>

3. Um triângulo é considerado retângulo quando um dos seus ângulos for reto. Esse tipo de triângulo é estudado amplamente. Sobre ele, julgue as afirmativas a seguir:

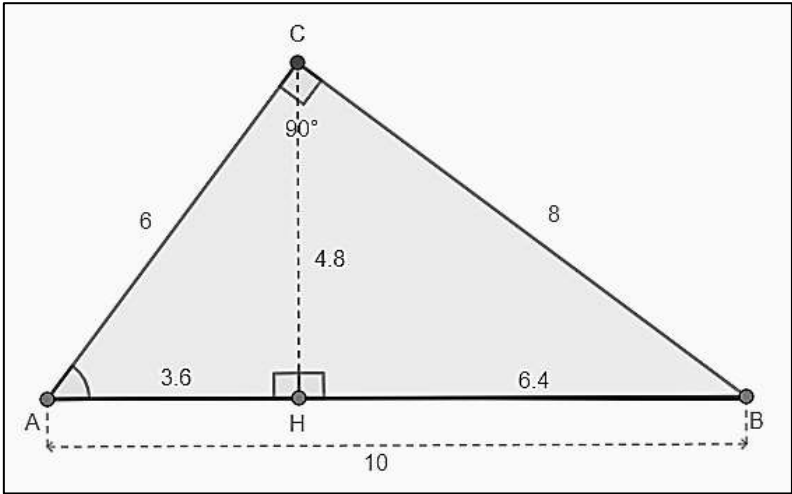
- I → Um triângulo retângulo pode ser escaleno.
- II → Um triângulo retângulo pode ser isósceles.
- III → Um triângulo retângulo pode ser equilátero.

Marque a alternativa correta:

- A) Somente a afirmativa I é falsa.
- B) Somente a afirmativa II é falsa.
- C) Somente a afirmativa III é falsa.
- D) Todas as afirmativas são verdadeiras.
- E) Todas as afirmativas são falsas.

Fonte: Adaptado de <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-triangulo-retangulo.htm>

4. Na figura a seguir temos a representação de um triângulo retângulo ABC cujas medidas estão assinaladas.



De acordo com a figura, em qual das alternativas abaixo aparecem, exatamente nessa ordem, as medidas: da altura – da hipotenusa – do cateto – da projeção?

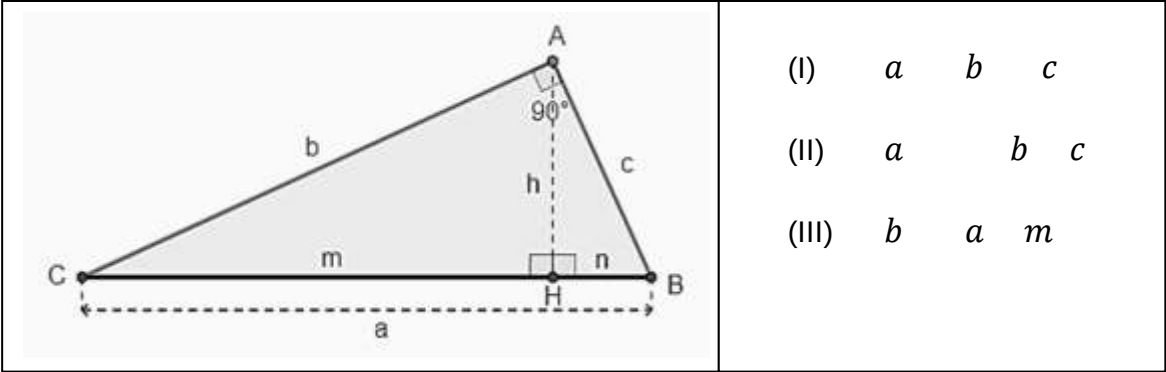
- A) 3.6 – 6 – 10 – 4.8

B) 3.6 – 10 – 6 – 6.4

C) 10 – 4.8 – 6 – 3.6
- D) 4.8 – 6 – 10 – 6.4

E) 4.8 – 10 – 6 – 6.4
- Fonte: o autor (2024)

5. Observe os triângulos retângulos BAC, AHC e AHB destacados na figura a esquerda e considere as afirmações listadas a direita da figura.



Sabendo que os três triângulos são semelhantes, então entre as igualdades listadas, aquelas que representam relações métricas no triângulo retângulo é (são):

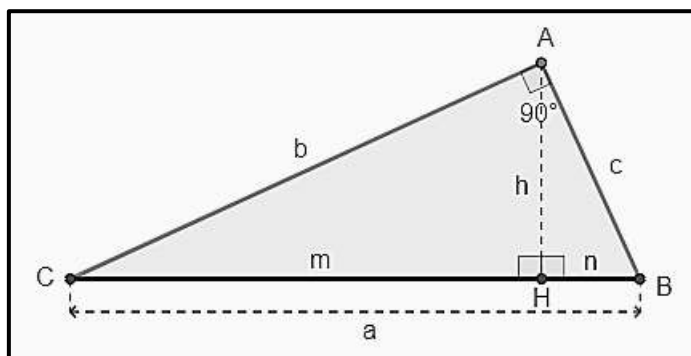
- A) apenas I

B) apenas II

C) apenas III
- D) todas

E) nenhuma
- Fonte: o autor (2024)

6. No triângulo retângulo ABC abaixo estão destacados os seguintes elementos: hipotenusa, catetos, altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

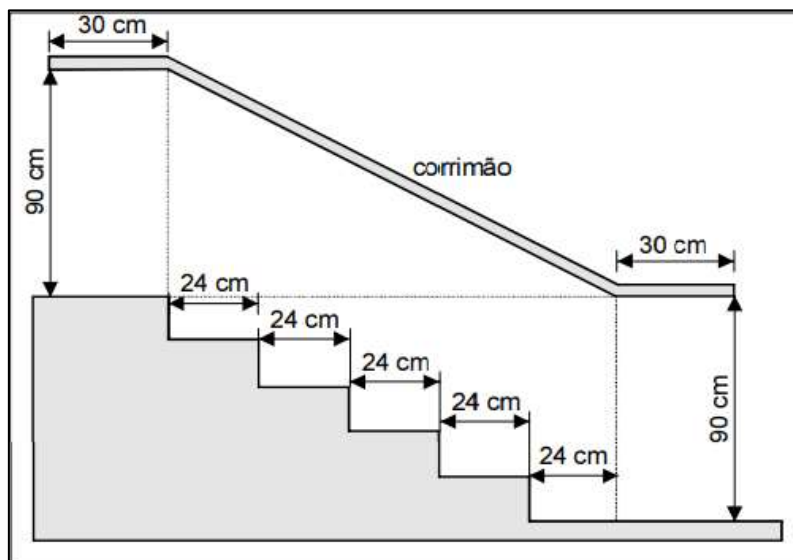


Em qual das alternativas aparece o enunciado do Teorema de Pitágoras?

- A) a medida da hipotenusa do triângulo retângulo é igual a soma das medidas das projeções de cada cateto sobre esta hipotenusa.
- B) o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.
- C) o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto.
- D) o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura é igual ao produto das medidas dos catetos.
- E) o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções de cada cateto sobre esta hipotenusa.

Fonte: o autor (2024)

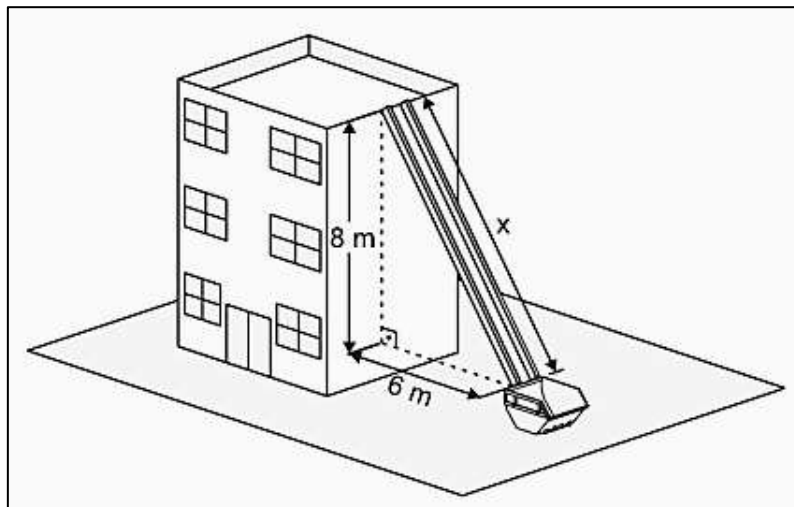
7. A figura abaixo representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura. Nessas condições, o comprimento total do corrimão, em metros, é igual a:



Fonte: ENEM/2006 (adaptado)

- A) 1,8
- B) 1,9
- C) 2,0
- D) 2,1
- E) 2,2

8. Durante a reforma de uma cobertura, a empreiteira responsável instalou uma rampa de madeira para depositar o entulho da obra diretamente na caçamba, conforme ilustra o desenho abaixo.



Qual é a medida x do comprimento da madeira utilizada para construção dessa rampa?

A) 10 m

C) 48 m

E) 100 m

B) 14 m

D) 50 m

Fonte: Adaptado de <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2023/03/Banco-de-questoes-SAEB-Matematica-9o-ano-EF-1.pdf>

9. Em qual das alternativas abaixo as medidas indicadas representam os lados de um triângulo retângulo?

A) 5, 6 e 12

B) 15, 8 e 17

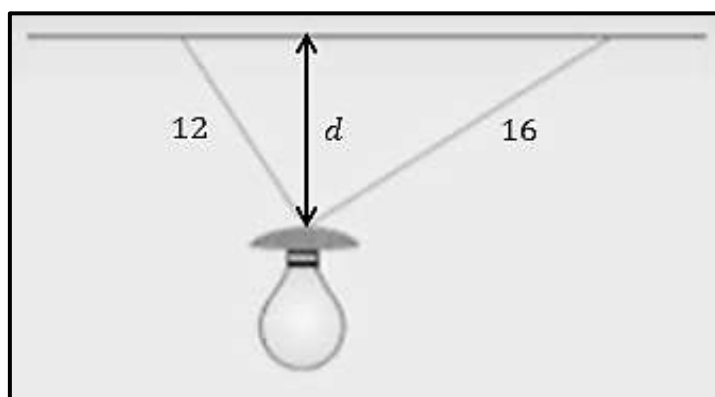
C) 4, 4 e 7

D) 10, 10, 10

E) 20, 15 e 10

Fonte: o autor (2024)

10. A lâmpada representada na figura está suspensa por dois fios perpendiculares entre si presos ao teto de uma sala. Sabendo que esses fios medem e , qual a distância da lâmpada ao teto?



A)

C)

E)

B)

D)

Fonte: o autor (2024)

ANEXO D: FICHAS DE INSTRUÇÃO E/OU DE OBSERVAÇÃO

TAREFA 1 (1ª UARC)

TÍTULO: Reconhecendo triângulos

OBJETIVO: Reconhecer a propriedade da desigualdade triangular.

MATERIAL UTILIZADO: Varetas de tamanhos pré-definidos, régua milimetrada, caneta ou lápis e a ficha de instrução com a sequência didática.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Comparação de medidas.

PROCEDIMENTOS: Prezado aluno, nesta atividade você deve utilizar as varetas para formar/tentar formar um triângulo com cada conjunto de três varetas indicado no **Quadro 16** e responder as perguntas feitas completando as lacunas de modo adequado. Espera-se que ao fim da atividade você seja capaz de reconhecer a propriedade da desigualdade triangular que garante a existência de um triângulo.

SUGESTÃO AO PROFESSOR: Para esta atividade, sugerimos que o professor divida a turma em grupos de no máximo cinco alunos.

TEMPO ESTIMADO: 01 aula de 50 minutos de duração ou a critério do professor.

[I_i – EP] De posse das varetas entregues pelo professor forme dois triângulos diferentes escolhendo três dessas varetas.

[I_r] Pelo que você observou durante a atividade anterior é correto afirmar que sempre conseguimos formar um triângulo quaisquer que sejam as varetas escolhidas?_____.

[I_e] Com os tamanhos indicados na primeira coluna do **Quadro 16**, tente formar um triângulo e depois preencha as demais colunas conforme o modelo, considerando para a medida da maior vareta, para a medida intermediária e para a medida da menor vareta.

Quadro 16 – Ficha de observação (TAREFA 1)

Tamanho das varetas							?	?	?	Formou triângulo?
3, 4 e 5	5	4	3	9	8	7	9>3 (SIM)	8>4 (SIM)	7>5 (SIM)	SIM
3, 5 e 10										
7, 24 e 25										
8, 12 e 20										
8, 15 e 17										
9, 12 e 15										
9, 12 e 17										
10, 24 e 26										
15, 20 e 25										
15, 24 e 26										

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025)

[I_r] Pelo que você observou ao preencher o **Quadro 16**, sempre foi possível formar um triângulo com o tamanho das varetas considerados? _____ Em quais casos isso aconteceu? _____

[I_r] Nos casos em que não foi possível formar um triângulo, o que aconteceu quando você comparou a soma das medidas das varetas menores com a medida da vareta maior? _____

[I_r] E nos casos em que foi possível formar um triângulo, o que aconteceu quando você comparou a soma das medidas das varetas menores com a medida da vareta maior? _____

[I_r] De modo geral, nos casos em que foi possível formar um triângulo, o que aconteceu quando você comparou a soma das medidas de dois lados quaisquer com a medida do terceiro lado? _____

[I_f] Em todo triângulo com lados medindo _____, _____ e _____, cada lado é _____ que a _____ dos outros dois. Essa propriedade, conhecida como desigualdade triangular, pode ser representada simbolicamente por:

$$\boxed{a \quad \quad \quad} \text{ ou } \boxed{b \quad \quad \quad} \text{ ou } \boxed{c \quad \quad \quad}$$

[IA_a] O proprietário de uma casa deseja construir uma piscina triangular com lados medindo _____, _____ e _____. Se você fosse o Engenheiro responsável pela obra, o que você diria ao proprietário?

() que é possível realizar esta construção.

() que não é possível realizar esta construção

TAREFA 2 (2ª UARC)

TÍTULO: O teorema de Pitágoras

OBJETIVOS: Identificar um triângulo retângulo e reconhecer a relação métrica existente entre os seus lados.

MATERIAL UTILIZADO: Caneta ou lápis, transferidor, calculadora e a ficha de instrução com a sequência didática.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Relação métrica entre os lados do triângulo retângulo.

PROCEDIMENTOS: Prezado aluno, agora que você já sabe reconhecer quando um triângulo existe, vamos observar uma relação métrica que ocorre entre os seus lados quando dois deles formam 90° entre si. Considere para esta atividade as medidas das varetas em que foi possível formar um triângulo, registradas na ficha de observação da **Tarefa 1**. Observe os triângulos atentamente e preencha o **Quadro 17** conforme o modelo apresentado. Ao fim da atividade você deverá ser capaz de: **(1)** identificar quais daqueles triângulos são retângulos, bem como **(2)** reconhecer e enunciar a relação métrica conhecida como teorema de Pitágoras, envolvendo os lados desses triângulos.

SUGESTÃO AO PROFESSOR: Para esta atividade, sugerimos que o professor divida a turma em grupos de no máximo cinco alunos.

TEMPO ESTIMADO: 01 aula de 50 minutos de duração ou a critério do professor.

[**I_e**] Utilize o transferidor para medir o ângulo oposto ao maior lado dos triângulos formados pelas varetas indicadas no **Quadro 17**. Depois, preencha cuidadosamente a ficha de observação conforme o modelo, efetuando os cálculos quando necessário.

Quadro 17 – Ficha de observação (TAREFA 2)

Tamanho das varetas									Ângulo entre os lados e
3, 4 e 5	5	4	3	25	16	9	25	SIM	(X) ()
7, 24 e 25									() ()
8, 15 e 17									() ()
9, 12 e 15									() ()
9, 12 e 17									() ()
10, 24 e 26									() ()
15, 20 e 25									() ()
15, 24 e 26									() ()

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025)

[I_r] Pelo que você observou durante o preenchimento do **Quadro 17**, ao comparar o quadrado da medida do maior lado com a soma dos quadrados das medidas dos lados menores, o resultado foi sempre o mesmo? _____

[I_r] Nos casos em que o quadrado da medida do maior lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos lados menores, qual o ângulo formado pelos lados menores? _____.

[I_r] Nos casos em que o quadrado da medida do maior lado é diferente da soma dos quadrados das medidas dos lados menores, qual o ângulo formado pelos lados menores? _____.

[I_r] De modo geral, quando os lados menores formam um ângulo igual a 90°, o quadrado da medida do maior lado é _____ a soma dos quadrados das medidas dos lados menores. Por outro lado, quando os lados menores formam um ângulo diferente de 90°, o quadrado da medida do _____ lado é diferente da soma dos quadrados das medidas dos lados menores.

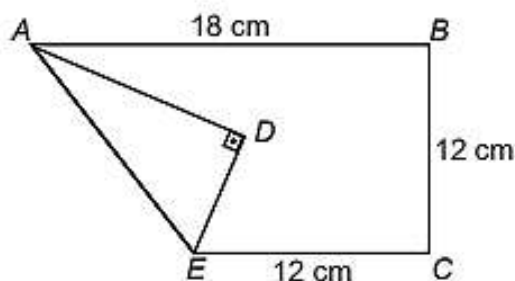
[I_f] Quando os lados menores de um triângulo formam 90° entre si, esse triângulo é classificado como triângulo retângulo. Nesse tipo de triângulo, os lados _____ e _____ são chamados de catetos e o lado _____ é chamado de hipotenusa.

[I_f] E mais, em todo triângulo retângulo é válida a relação conhecida como teorema de Pitágoras, ou seja, o quadrado da medida do maior lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos lados menores. Em outras palavras, o quadrado da medida da _____ é igual a soma dos quadrados das medidas dos _____. Simbolicamente, podemos representar essa relação por:

$$a^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$$

[I_{A_r}] (Problema 1) As extremidades de um cabo de aço totalmente esticado estão presas no topo de um prédio e no topo de um poste, respectivamente, com _____ e _____ de altura. Admitindo que o terreno nesse local seja perfeitamente horizontal, e que a distância entre o prédio e o poste é de _____, determine a medida do comprimento desse cabo de aço.

[I_{A_r}] (Problema 2 – ENEM, 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de _____ por _____. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento **AE** é:

d) $\sqrt{\hspace{1cm}}\text{ cm}$

d) $\sqrt{\hspace{1cm}}\text{ cm}$

e) $\sqrt{\hspace{1cm}}\text{ cm}$

e) $\sqrt{\hspace{1cm}}\text{ cm}$

f) $\hspace{1cm}\text{ cm}$

TAREFA 3 (3ª UARC)

TÍTULO: Comprovando o teorema de Pitágoras (construção de Perigal)

OBJETIVOS: Mostrar através de material manipulável a validade do teorema de Pitágoras.

MATERIAL UTILIZADO: Peças de EVA, painel de gabarito e a ficha de instrução com a sequência didática.

CONCEITOS ENVOLVIDOS: Relação métrica entre os lados do triângulo retângulo.

PROCEDIMENTOS: Prezado aluno, agora que você já conhece a relação métrica envolvendo os lados de um triângulo retângulo (teorema de Pitágoras), vamos comprovar a validade dessa relação mediante a manipulação de materiais concreto em EVA. Para isso, siga atentamente as orientações contidas nesta ficha de instrução. Ao fim da atividade você deverá ser capaz de mostrar a relação métrica conhecida como teorema de Pitágoras.

SUGESTÃO AO PROFESSOR: Sugerimos que após a atividade o professor apresente à turma a construção geométrica desenvolvida por Perigal para a dissecação das peças.

TEMPO ESTIMADO: 01 aula de 50 minutos de duração ou a critério do professor.

[I_e] Distribua o conjunto de peças recebidas, encaixando quando necessário, de modo a cobrir completamente os quadrados Q1 e Q2 do painel de gabarito disponível no ANEXO E.

[I_r] Com base no que você observou, qual a medida do lado do quadrado Q1? _____. Como você representaria a área da peça de cor azul? _____

[I_r] Com base no que você observou, qual a medida do lado do quadrado Q2? _____. Como você representaria a área das peças de cor amarela? _____

[I_e] Movimente o conjunto de peças recebidas para cima do quadrado Q3 no painel de gabarito e tente cobri-lo completamente.

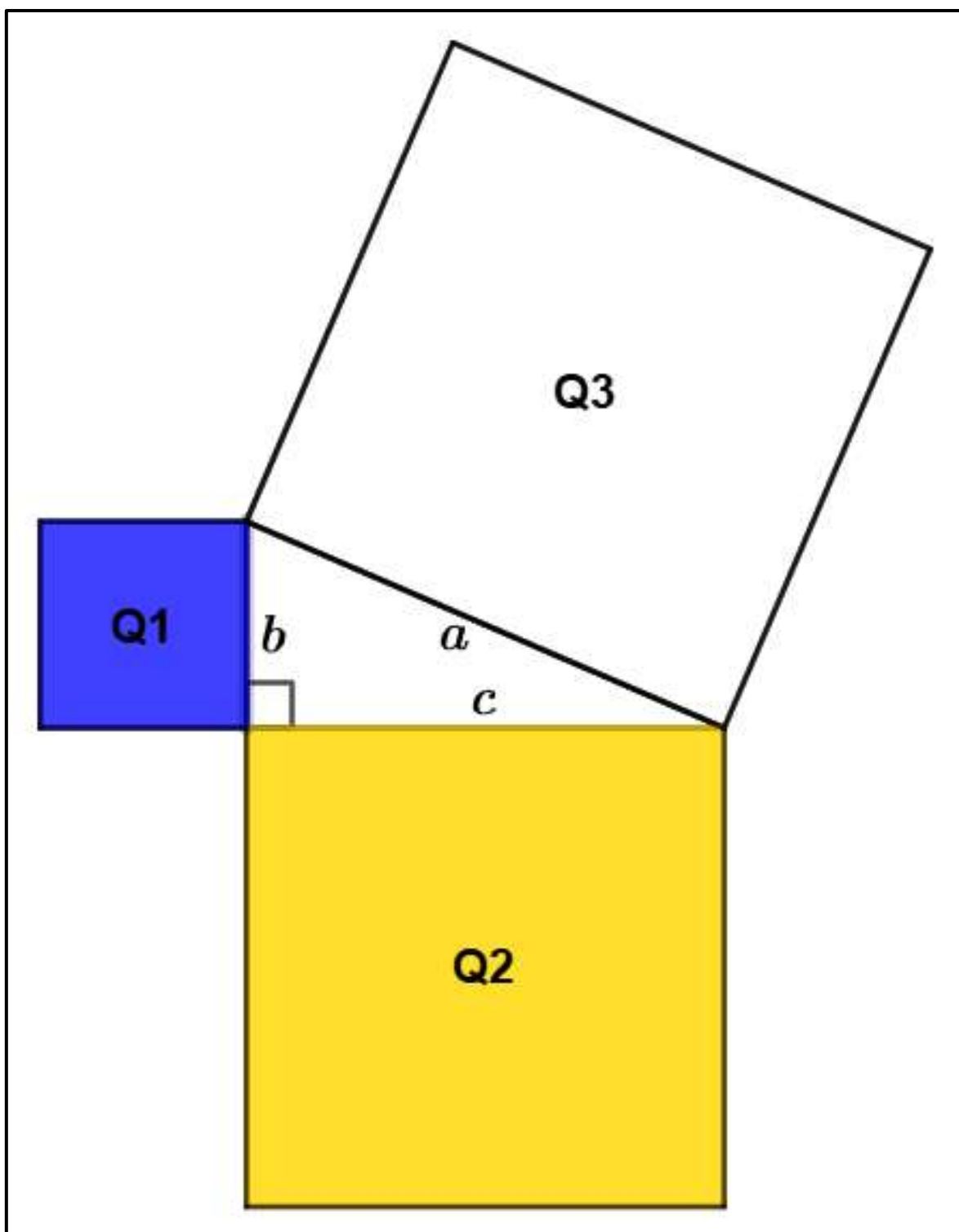
[I_r] Você conseguiu cobrir completamente o quadrado Q3? _____. Quantas peças você utilizou? _____.

[I_r] Com base no que você observou, o que é possível afirmar a respeito da área do quadrado Q3 em comparação as áreas dos quadrados Q1 e Q2? _____

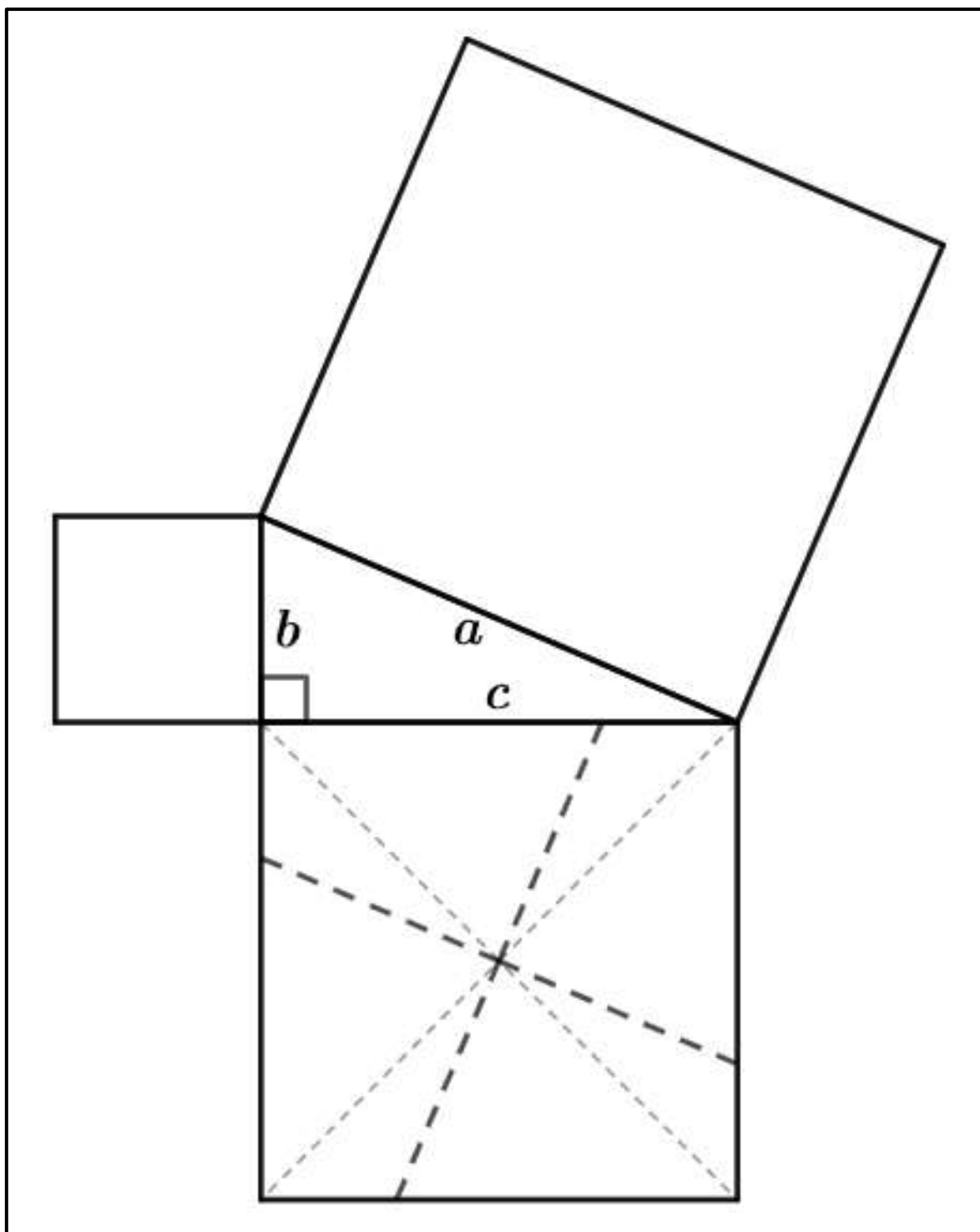
[I_f] Simbolicamente, como você representaria este fato? _____.

ANEXO E: PAINÉIS DE GABARITO – TAREFA 3 (3ª UARC)

Painel de gabarito com cor – TAREFA 3 (3ª UARC)



Painel de gabarito para corte – TAREFA 3 (3ª UARC)





Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem