Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino médio

FERNANDO AUGUSTO CUNHA CORDEIRO JUNIOR

O ENSINO DE CORPOS REDONDOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

BELÉM-PA
2025

Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior

O ENSINO DE CORPOS REDONDOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Texto de dissertação apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr Fábio José da Costa Alves.

BELÉM-PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

C794e Cordeiro Junior, Fernando Augusto Cunha
O ensino de corpos redondos com o auxílio do software geogebra / Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior. - Belém, 2025.
172f. : il.;color.

Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa
Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará. Campus I – Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2025.

1. Corpos redondos. 2. Abordagem instrumental. 3. Semiótica. 4. Sequência Didática I. Título.

CDD 22 ed. 510

Elaborada por Priscila Melo - Bibliotecária CBR2/1345

Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior

O ENSINO DE CORPOS REDONDOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Texto de dissertação apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr Fábio José da Costa Alves.

Data da Aprovação: 15 / 01 / 2025

Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
FABIO JOSE DA COSTA ALVES
Data: 23/01/2025 14:51:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____.Orientador
Prof. Dr Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofisica pela Universidade Federal do Pará - UFPA
Universidade do Estado do Pará - UEPA

Documento assinado digitalmente
CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA
Data: 23/01/2025 17:17:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____.Examinador Interno
Prof(a). Dr(a) Cinthia Cunha Maradei Pereira
Doutora em Bioinformática - Universidade Federal do Pará - UFPA
Universidade do Estado do Pará - UEPA

Documento assinado digitalmente
CINTHIA CUNHA MARADEI PEREIRA
Data: 23/01/2025 17:17:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_____.Examinador Externo
Prof. Dr Saul Rodrigo da Costa Barreto
Doutor em Educação em Ciências e Matemática - Universidade Federal do Pará - UFPA
Universidade do Estado do Pará - UEPA

BELÉM – PA
2025

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais, à minha esposa. A todos vocês, minha eterna gratidão e este trabalho, que carrega um pedaço de cada um de vocês.

"A adequada educação proporciona ao estudante um vasto caminho de progresso contínuo a tudo o que for bom, puro e nobre, dirigindo seus esforços não a coisas temporais, mas eternas".

(Ellen G. White)

RESUMO

CORDEIRO JUNIOR, Fernando Augusto Cunha. **O Ensino de Corpos Redondos com o Auxílio do Software Geogebra**. 2025, 173 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2025.

A presente dissertação busca responder à questão cientifica: qual é o impacto da utilização de uma sequência didática com o auxílio do software Geogebra na potencialização da aprendizagem sobre corpos redondos? Diante do questionamento, temos como objetivo geral: desenvolver uma sequência didática voltada para o ensino de corpos redondos com o auxílio do software Geogebra. Especificamente: identificar as principais dificuldades que os alunos do ensino médio enfrentam ao aprender os conceitos e propriedades dos corpos redondos; e investigar a internalização de conceitos geométricos de corpos redondos por meio da mobilização, coordenação e conversão de registros semióticos por alunos do ensino médio. Para alcançar esses resultados, nos fundamentamos à luz das teorias Instrumental (Rabardel, 1995) e dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1993). Como metodologia de pesquisa, utilizamos a Engenharia Didática, que tem com etapas: introdução, análises prévias, concepção e análise a *priori*, experimentação, análise a *posteriori* e validação. As análises prévias evidenciaram dificuldades, como a confusão entre conceitos e a aplicação inadequada de fórmulas. Durante a experimentação, o GeoGebra demonstrou eficácia ao facilitar a mobilização e conversão de registros semióticos, promovendo maior engajamento e compreensão dos alunos. Concluímos que a sequência didática mediada pelo software potencializou a aprendizagem de corpos redondos, destacando a relevância das tecnologias digitais para o ensino de matemática e fornecendo subsídios para práticas pedagógicas futuras. Com base nos resultados da pesquisa foi organizado um produto educacional na forma de uma sequência didática intitulada: O ensino de corpos redondos com o auxílio do software geogebra, que foi validada experimentalmente em sala da aula e pela avaliação da banca examinadora deste trabalho e está disponível com livre acesso no endereço http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/921975.

Palavras-chave: Corpos Redondos, Abordagem Instrumental, Semiótica, Sequência Didática

ABSTRACT

CORDEIRO JUNIOR, Fernando Augusto Cunha. **Teaching Round Solids with Aid of Geogebra Software**. 2025, 173 p. Dissertation (Master's in Mathema Education) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2025.

The present dissertation seeks to address the scientific question: what is the impact of using a didactic sequence with the aid of the GeoGebra software on enhancing the learning process of round solids? In response to this inquiry, the general objective is to develop a didactic sequence focused on the teaching of round solids with the support of GeoGebra software. Specifically, it aims to: identify the main difficulties faced by high school students in learning the concepts and properties of round solids; and investigate the internalization of geometric concepts related to round solids through the mobilization, coordination, and conversion of semiotic registers by high school students. To achieve these objectives, this study is grounded in the Instrumental Approach (Rabardel, 1995) and the Theory of Semiotic Representation Registers (Duval, 1993). As a research methodology, the study employs Didactic Engineering, structured into the following phases: introduction, preliminary analyses, conception and a *priori* analysis, experimentation, a *posteriori* analysis, and validation. The preliminary analyses highlighted difficulties such as confusion between concepts and the improper application of formulas. During the experimentation phase, GeoGebra proved effective in facilitating the mobilization and conversion of semiotic registers, promoting greater student engagement and understanding. It was concluded that the didactic sequence mediated by the software enhanced the learning of round solids, emphasizing the importance of digital technologies in mathematics education and providing support for future pedagogical practices
.

Keywords: Round Bodies, Instrumental Approach, Semiotics, Didactic Sequence

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo de Situações de Atividades Instrumentadas (SAI) 47
Figura 2 - Hipótese Fundamental de Aprendizagem: estrutura da representação em função de Conceitualização 57
Figura 3 - Plano 60
Figura 4 - Retas paralelas 60
Figura 5 - Reta perpendicular ao plano 60
Figura 6 - Planos paralelos 61
Figura 7 - Reta perpendicular entre dois planos paralelos 61
Figura 8 - Definição de Cilindro 62
Figura 9 - Elementos do cilindro 62
Figura 10 - Cilindro oblíquo 63
Figura 11 - Cilindro de Revolução 63
Figura 12 - Cilindro Equilátero 64
Figura 13 - Área planificada da superfície do cilindro 64
Figura 14 - Princípio de Cavalieri 65
Figura 15 - Princípio de Cavalieri 65
Figura 16 - Definição de cone 66
Figura 17 - Elementos do cone 66
Figura 18 - Cone de revolução 67
Figura 19 - Seção meridiana do cone 67
Figura 20 - Planificação da superfície do cone reto 68
Figura 21 - Volume do Cone 69
Figura 22 - Tronco de cone reto 70
Figura 23 - Elementos do tronco de cone 70
Figura 24 - Planificação da superfície do tronco de cone reto 71
Figura 25 - Volume do tronco de cone reto 72
Figura 26 - Esfera 72
Figura 27 - Elementos da esfera 73
Figura 28 - Revolução da esfera 73
Figura 29 - Superfície esférica 74

Figura 30 - Esfera secionada pelo plano 75
Figura 31 - Dedução do volume da esfera 76
Figura 32 - Bolas e Tangerina 81
Figura 33 - Casquinha de sorvete e Chapéus de Aniversário 81
Figura 34 – “Cone” de trânsito e Funil 82
Figura 35 – Lata de refrigerante e Copos Cilíndricos 82
Figura 36 - “Ferramentas” do software Geogebra 85
Figura 37 - Planificação dinâmica do cilindro 91
Figura 38 - Princípio de Cavalieri no Geogebra 91
Figura 39 – Planificação animada do Cone 96
Figura 40 - Demonstração do volume do cone 96
Figura 41 - Tronco de cone no Geogebra 98
Figura 42 - Demonstração da planificação do tronco de cone 99
Figura 43 - Demonstração do volume do tronco de cone 101
Figura 44 - Caneca 101
Figura 45 – Esfera no Geogebra 103
Figura 46 - Demonstração da fórmula da superfície da esfera 104
Figura 47 - Demonstração do Volume da esfera 105
Figura 48 - Pira Olímpica da França 105
Figura 49 - Análise da atividade 1, Q1, aluno 2M1 111
Figura 50 - Análise da atividade 1, Q1, aluno 2M6 113
Figura 51 - amostra da análise da atividade 1, Q2, aluno 3M1 114
Figura 52 - Análise da atividade 2, construção dos corpos redondos, aluno 3M2 .. 116
Figura 53 - Análise da atividade 2, aluno 3M3 117
Figura 54 - Análise da atividade 3, Q2, aluno 2M2 119
Figura 55 - Análise da atividade 3, Q3, aluno 2M3 120
Figura 56 - Análise da atividade 3, Q3 desenho, aluno 2M5 120
Figura 57 - Análise da atividade 3 contextualizada, aluno 2M1 122
Figura 58 - Análise da atividade 3 contextualizada, aluno 2M5 123
Figura 59 - Análise da atividade 4, Q1, aluno 2M3 125
Figura 60 - Análise da atividade 4, Q2, aluno 2M4 125
Figura 61 - Dificuldade do aluno na atividade 4, Q2, 3M3 126
Figura 62 – Análise da atividade 4, Q3, aluno 2M4 128
Figura 63 - Resolução da atividade 4 contextualizada, 2M1 130

Figura 64 - Análise da atividade 4 contextualizada, aluno 2M2 131
Figura 65 - Análise da atividade 5, Q2, aluno 2M4 133
Figura 66 - Análise da atividade 5, Q3, aluno 2M4 133
Figura 67 - Análise da atividade 5, amostra de desenho do aluno 2M2 133
Figura 68 - Análise da atividade 5 contextualizada, desenho da ampulheta do aluno 2M1 134
Figura 69 - Análise da atividade 6, Q1, aluno 2M4 138
Figura 70 - Análise de atividade 6, Q2 e Q3, aluno 3M1 139
Figura 71 - Análise da atividade 6 contextualizada, aluno 2M1 140
Figura 72 - Análise da atividade 6, fórmula do volume do cone, aluno 3M2 141
Figura 73 - Análise da atividade 6 contextualizada, aluno 3M2 141
Figura 74 - Análise de atividade 7, Q2, aluno 145
Figura 75 - Análise da atividade 7, Q3, aluno 145
Figura 76 - Análise da atividade 7, Q4, aluno 2M1 146
Figura 77 - Análise da atividade 7 contextualizada, aluno 3M3 147
Figura 78 - Análise da atividade 8, Q1, aluno 2M1 150
Figura 79 - Análise da atividade 8, Q2, aluno 2M4 151
Figura 80 - Análise da atividade 8, Q3, aluno 152
Figura 81 - Análise da atividade 8 contextualizada, aluno 153
Figura 82 - Análise da atividade 9, Q1, aluno 156
Figura 83 - Análise da atividade 9, Q2, aluno 157
Figura 84 - Análise da atividade 9, Q3, aluno 158
Figura 85 - Análise da atividade 9 contextualizada, aluno 3M3 159
Figura 86 - Análise da atividade 9 contextualizada, aluno 159
Figura 87 - Análise da atividade 9, construção da fórmula do volume da esfera, aluno 2M1 160
Figura 88 - Análise da atividade contextualizada, aluno 2M1 161

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Perfil - Descritor 1: Corpos Redondos 22
Quadro 2 - Perfil - Descritor 2: Sólidos de revolução 23
Quadro 3 - Escopo de trabalhos selecionados 25
Quadro 4 - Resumo dos trabalhos apresentados 26
Quadro 5 - Semelhança e diferença entre conceito 43
Quadro 6 - Blocos e atividades 78
Quadro 7 - Objetivos da atividade 1 80
Quadro 8 - Atividade 1 84
Quadro 9 - Objetivos da atividade 2 85
Quadro 10 - Objetivos da atividade 3 87
Quadro 11 - Atividade 3, questão 3 88
Quadro 12 - Atividade 3, desenhar 88
Quadro 13 - Objetivos atividade 4 90
Quadro 14 - Objetivos da atividade 5 92
Quadro 15 - Atividade 5. questão 3 93
Quadro 16 - Atividade 5, desenhar 93
Quadro 17 - Objetivos da atividade 6 95
Quadro 18 - Objetivos da atividade 7 97
Quadro 19 - Objetivos atividade 8 99
Quadro 20 - Objetivos da atividade 9 103
Quadro 21 - Cronograma da Experimentação 106

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
2 METODOLOGIA: ENGENHARIA DIDÁTICA 15
3 ANÁLISE PRÉVIA 21
3.1 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO 21
3.1.1 Síntese e discussão dos trabalhos 28
3.2 BASE TEÓRICA 45
3.2.1 A abordagem instrumental de Rabardel 45
3.2.2 Semiótica 50
3.2.3 Registros de representação semiótica 51
3.3 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA 58
3.3.1 Conceitos e definições matemáticos de corpos redondos. 59
4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*: A SEGUÊNCIA DIDÁTICA 77
4.1 BLOCO 1 79
4.2 BLOCO 2 87
4.3 BLOCO 3 92
4.4 BLOCO 4 97
4.5 BLOCO 5 102
5 EXPERIMENTAÇÃO 106
6 ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO 110
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 165
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 168
APÊNDICE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO . 173

1 INTRODUÇÃO

O ensino de geometria no contexto da educação básica apresenta desafios significativos, especialmente no que tange à compreensão de conceitos relacionados a corpos redondos, também conhecidos como sólidos de revolução. Esses objetos geométricos, como cilindros, cones (tronco de cones) e esferas, demandam dos alunos habilidades de visualização espacial e representação gráfica, bem como o desenvolvimento de um raciocínio geométrico que extrapola a abordagem puramente algébrica. Apesar disso, observa-se que as práticas tradicionais de ensino frequentemente não são eficazes para envolver ativamente os alunos na construção do conhecimento, resultando em dificuldades no aprendizado desses conceitos.

Diante desse cenário, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) enfatiza a importância de uma abordagem que integre o uso de tecnologias digitais no ensino da geometria. Ferramentas como softwares e aplicativos educativos surgem como recursos potencialmente eficazes para promover a compreensão significativa e o engajamento dos alunos. O Geogebra, em particular, tem se destacado por sua versatilidade e capacidade de oferecer uma abordagem interativa para explorar conceitos matemáticos, incluindo aqueles relacionados a corpos redondos.

O impacto da utilização de uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra na potencialização da aprendizagem sobre corpos redondos é o cerne desta pesquisa. O objetivo geral desta dissertação é desenvolver uma sequência didática voltada para o ensino de corpos redondos com o auxílio do software GeoGebra. Para alcançar esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos: (i) identificar as principais dificuldades que os alunos do ensino médio enfrentam ao aprender os conceitos e propriedades dos corpos redondos; e (ii) investigar a internalização de conceitos geométricos de corpos redondos por meio da mobilização, coordenação e conversão de registros semióticos por alunos do ensino médio.

Nesse sentido, a metodologia utilizada neste estudo é a Engenharia Didática, que permite a construção, aplicação e validação de sequências didáticas, possibilitando a análise detalhada do impacto da abordagem proposta, à luz dos referencias teóricos. Os referenciais teóricos adotados são a Teoria dos Registros de Representação Semótica, de Duval, e a Abordagem Instrumental, de Rabardel. Essas

teorias permitem compreender como os alunos mobilizam diferentes registros para a compreensão dos conceitos matemáticos e como os instrumentos tecnológicos, como o GeoGebra, podem ser apropriados e transformados em esquemas de utilização no contexto educacional.

A relevância desta pesquisa se justifica pelo fato de que as dificuldades na aprendizagem de geometria espacial são amplamente documentadas na literatura acadêmica (Silva Filho, 2015; Santiago, 2018; Santos, 2018). Os alunos do ensino fundamental II e do ensino médio frequentemente enfrentam dificuldades tanto na identificação de objetos geométricos, sejam eles planos ou espaciais, quanto na realização de cálculos relacionados a esses objetos.

A importância desta investigação também se sustenta na necessidade de modernizar e tornar mais significativa a aprendizagem de geometria espacial, em especial dos corpos redondos, que são frequentemente negligenciados nos currículos escolares (Santos, 2021). A ausência de uma abordagem contextualizada e de aplicações práticas dos conceitos geométricos contribui para a desmotivação dos alunos nas aulas de matemática, tornando necessária a adoção de estratégias inovadoras para a exploração desses conteúdos.

Assim, este estudo busca contribuir para a melhoria do ensino de geometria no ensino médio, oferecendo uma alternativa pedagógica que alia a tecnologia ao aprendizado significativo. A sequência didática desenvolvida e analisada neste trabalho visa fornecer subsídios tanto para professores quanto para pesquisadores interessados na utilização de ferramentas digitais no ensino de matemática, promovendo um ensino mais dinâmico, interativo e eficiente.

2 METODOLOGIA: ENGENHARIA DIDÁTICA

A partir das orientações recebidas pela banca durante a qualificação e do avanço nas etapas da pesquisa, e considerando os objetivos gerais e específicos delineados, foi identificada a necessidade de maior clareza na definição da metodologia adotada. O objetivo geral da pesquisa é desenvolver uma sequência didática voltada para o ensino de corpos redondos com o auxílio do software Geogebra, enquanto os objetivos específicos envolvem: (i) identificar as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos do ensino médio ao aprender os conceitos e propriedades dos corpos redondos; e (ii) investigar a internalização desses conceitos geométricos por meio da mobilização e coordenação de registros semióticos.

Embora a metodologia apresentada inicialmente possuísse características relevantes, observou-se que ela carecia de uma fundamentação teórica mais direcionada, que favorecesse a análise dos dados coletados, especialmente no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem, além do processo investigativo. Diante disso, foi realizada uma adequação teórica-metodológica, com o intuito de aprimorar a precisão e a consistência das análises ao longo da pesquisa.

Considerando que a presente pesquisa se configura como um experimento sobre o estudo de corpos redondos com o auxílio do software Geogebra, ela se fundamenta nos preceitos da Engenharia Didática, conforme estabelecido por Michelle Artigue (1988). A Engenharia Didática, além de ser uma metodologia de investigação, se distingue por seu esquema experimental baseado na aplicação didática realizada em sala de aula, envolvendo as etapas de concepção, realização, observação e análise das sequências de ensino.

No contexto da pesquisa, em que se busca construir e testar uma sequência didática para o ensino de corpos redondos com o auxílio do Geogebra, segue-se, conforme Peyrerol (2021), o processo de implementação dessa metodologia, estruturado em quatro fases principais: (i) análises prévias; (ii) concepção e análise a *priori*; (iii) experimentação; e (iv) análise a *posteriori* e validação. Peyrerol destaca que a Engenharia Didática, além de ser uma metodologia de investigação, oferece uma abordagem sistemática e iterativa.

Assim, além de aplicar a sequência didática previamente planejada, a pesquisa demanda o uso de um instrumento metodológico capaz de investigar e construir dados relevantes, fundamentais para a execução do estudo. Este instrumento deve

possibilitar a identificação de indícios de aprendizagem nos registros de representações semióticas produzidos pelos estudantes do ensino médio de escolas públicas, durante a interação com o software Geogebra no contexto da aplicação da sequência didática voltada ao estudo de corpos redondos.

Análise Prévia.

Segundo Almouloud (2007), a fase de análise prévia é de suma importância na construção de um embasamento teórico, metodológico e matemático, que orientará todas as etapas subsequentes da pesquisa. Essa etapa vai além da simples revisão bibliográfica, pois envolve a definição de objetivos investigativos claros, a identificação das dificuldades enfrentadas pelos alunos com relação ao objeto matemático, com base nas contribuições de outros pesquisadores. Esse processo é crucial para que o pesquisador não apenas compreenda o estado atual do conhecimento sobre o tema, mas também antecipe os desafios que podem surgir durante a aplicação da sequência didática, permitindo uma abordagem mais eficaz.

No contexto da Engenharia Didática, conforme exposto por Almouloud (2007), a análise prévia deve considerar uma série de aspectos essenciais para garantir a eficácia da pesquisa. Um desses aspectos é o levantamento bibliográfico, que desempenha um papel central na pesquisa ao fornecer o panorama teórico necessário para embasar as atividades ou situações-problema que fazem parte da sequência didática. Como afirmado por Almouloud (2007, p. 173), o levantamento bibliográfico "trata dos fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do objeto matemático", sendo um componente fundamental na identificação de desafios, conceitos-chave e abordagens relevantes relacionados ao tema em estudo. Além disso, essa etapa possibilita a análise de pesquisas didáticas anteriores, proporcionando insights sobre como os conceitos foram abordados em contextos semelhantes. Ela ainda permite a identificação de problemas recorrentes no ensino do tema, além de revelar estratégias metodológicas eficazes, que são vitais para a análise a *priori*. O levantamento bibliográfico também contribui para o refinamento dos objetivos e questões de pesquisa, estabelecendo um referencial teórico robusto para as fases seguintes da investigação.

Outro aspecto fundamental da análise prévia é a construção de uma fundamentação teórica e metodológica bem definida, que guiará não apenas a fase inicial, mas também as fases experimentais, de análise a *priori*, a *posteriori* e de validação (Almouloud, 2007). As teorias dos Registros de Representação Semiótica

(Duval, 1993), da Instrumentação (Rabardel, 1995) e da Engenharia Didática (Artigue, 1988), discutidas no Capítulo 3, são essenciais para a estruturação desta pesquisa. Essas teorias fornecem a base necessária para a seleção dos conceitos, atividades e recursos didáticos que serão utilizados no ensino do conteúdo, ajudando a estabelecer a abordagem didática a ser seguida ao longo da pesquisa.

Além disso, um aspecto crucial da análise prévia, conforme ressaltado por Almouloud (2007), é a organização matemática do objeto de estudo, que deve ser estruturada de forma cuidadosa. Essa organização deve ser feita com base tanto em fontes externas, como livros didáticos e currículos oficiais, quanto em uma estrutura própria desenvolvida pelo pesquisador. A organização matemática do conteúdo, discutida no Capítulo 4, é essencial para garantir que o conteúdo seja apresentado de maneira lógica e progressiva. Essa estruturação facilita a compreensão dos alunos durante a aplicação da sequência didática, o que é imprescindível para a efetividade do trabalho do pesquisador. A organização clara e estruturada contribui para o sucesso do ensino e aprendizagem, assegurando que os alunos possam se beneficiar do processo de ensino de forma mais eficiente.

Concepção e Análise a *Priori*.

Segundo Siqueira (2022), as análises realizadas na fase anterior são fundamentais para a construção de uma sequência didática eficaz. Nessa etapa, são consideradas as necessidades de aprendizagem dos alunos, a mobilização de conhecimentos prévios e a construção de uma aprendizagem que favoreça a redescoberta dos conceitos matemáticos. O objetivo dessa fase é, portanto, definir as expectativas de aprendizagem, planejar e antecipar o processo de ensino de novos objetos matemáticos, criando um caminho estruturado para o aprendizado.

Dentre as principais tarefas dessa fase, destacam-se, conforme Siqueira (2022), as seguintes atividades:- A elaboração de atividades, como situações-problemas (abertas ou fechadas), e materiais ou artefatos de apoio que ajudem o aluno a superar as dificuldades identificadas na análise prévia; - A definição de objetivos que promovam a construção de conhecimentos, saberes, habilidades e competências, os quais podem ser "mobilizados por diferentes representações matemáticas" (Almouloud, 2007, p. 174).

Nessa fase, o professor ou pesquisador assume o papel de mediador e orientador. A atuação do docente deve ser conduzida de maneira que preserve a autonomia dos alunos, sem prejudicar o processo de ensino. Para atingir esses

objetivos, o pesquisador pode ajustar variáveis didáticas que favoreçam mudanças no processo de ensino, promovendo uma aprendizagem mais eficaz e participativa. Essa abordagem está relacionada às variáveis didáticas descritas por Artigue (1988), que podem ser classificadas como: - Macro didáticas ou globais: Referem-se à organização geral da engenharia didática, abrangendo aspectos mais amplos do ensino, como o planejamento e a estruturação da sequência didática; e - Micro didáticas ou locais: Relativas à organização específica de um bloco ou momento particular da sequência didática, envolvendo ajustes pontuais em atividades ou abordagens de ensino.

No contexto dessa fase, conforme Almouloud (2007), os alunos devem ser incentivados a mobilizar os objetos de saber disponíveis, utilizando-os como ferramentas para a resolução dos problemas propostos. Essa mobilização de conhecimentos ocorre por meio da utilização de representações matemáticas, as quais são essenciais para o entendimento e aplicação dos conceitos abordados. A dimensão cognitiva do processo deve ser analisada matematicamente, identificando os métodos de resolução de cada atividade e os registros de resolução utilizados pelos alunos. A análise a *posteriori* será responsável por evidenciar os conhecimentos matemáticos envolvidos, permitindo uma compreensão mais profunda dos métodos de resolução e das estratégias cognitivas adotadas pelos alunos durante a aprendizagem.

Experimentação.

No Capítulo 5, conforme Lima (2022, p. 16), "na fase de Experimentação, descrevem-se as condições e o contexto da experimentação, apresentam-se e justificam-se os procedimentos adotados". O objetivo primordial dessa etapa é a implementação prática da sequência didática, que pode ocorrer tanto em sala de aula quanto em outros ambientes que se mostrem adequados ao desenvolvimento das atividades.

Durante a fase de experimentação, várias atividades são essenciais para garantir a coleta de dados significativa. A realização das atividades com os alunos permite verificar como eles interagem com os conteúdos e qual a eficácia das estratégias de ensino propostas. Um aspecto importante dessa fase é a observação das interações entre os alunos, permitindo ao pesquisador identificar as estratégias adotadas para resolver os problemas, assim como as dificuldades que surgem durante

o processo. Essas observações são cruciais para entender o comportamento cognitivo e as possíveis lacunas na aprendizagem.

Outro aspecto fundamental é o registro das produções dos alunos, o que pode incluir a coleta de respostas escritas, desenhos, raciocínios matemáticos e justificativas, que evidenciam o processo de aprendizagem. Além disso, o registro das dificuldades encontradas pelos alunos ao longo da execução das atividades oferece insights valiosos sobre os pontos de ensino que precisam ser ajustados ou aprimorados. Para realizar essa coleta de dados de maneira eficaz, o professor ou pesquisador utiliza ferramentas como as produções escritas dos alunos e as observações diretas durante as atividades. Essas ferramentas são essenciais para uma análise detalhada do impacto da sequência didática sobre o aprendizado dos alunos e para a posterior reflexão e ajustes na metodologia de ensino aplicada. Esses dados permitem uma análise qualitativa da experimentação, possibilitando identificar como os alunos estão respondendo às propostas da sequência didática sobre o ensino de corpos redondos com o auxílio do Geogebra e quais ajustes podem ser necessários.

Portanto, a experimentação, assim, não apenas valida a sequência didática, mas também nos orienta nas próximas etapas da Engenharia Didática, particularmente a análise a *posteriori*, onde os dados coletados serão utilizados para reflexões à luz dos referenciais teóricos da análise prévia.

Análise a *posteriori* e validação.

A fase de análise a *posteriori* representa o momento de reflexão e avaliação crítica sobre a eficácia da sequência didática implementada, observando os resultados por meio dos recordes de cada atividade. Conforme Muniz (2022, p. 20), “essa etapa baseia-se nos dados coletados durante a fase de experimentação, incluindo observações realizadas durante os blocos de ensino, as produções dos alunos” (tanto dentro quanto fora da sala de aula) e, em alguns casos, informações complementares obtidas por meio de metodologias externas, como questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos. Esse conjunto de dados permite uma análise detalhada sobre o impacto da intervenção didática.

Segundo Almouloud (2007), a análise a *posteriori* deve ser conduzida à luz da análise a *priori*, utilizando os referenciais teóricos, os objetivos de ensino e as questões de pesquisa como parâmetros de avaliação. Essa abordagem garante que o processo de validação seja baseado em uma confrontação entre o planejado

inicialmente e os resultados observados na prática. O objetivo não é apenas verificar se as expectativas foram atendidas, mas também identificar pontos fortes e limitações na sequência didática e, assim, gerar ideias para futuros trabalhos científicos.

No contexto específico mencionado, como o uso do software Geogebra no ensino de corpos redondos, a análise a *posteriori* avalia a eficácia dessa ferramenta em termos de: - Alcance dos objetivos de aprendizagem, verificando nos registros semióticos se os alunos conseguiram compreender e aplicar os conceitos relacionados a corpos redondos, conforme previsto na análise a *priori*; - Engajamento e estratégias dos alunos, analisando como o uso do artefato Geogebra influenciou as estratégias de resolução de problemas, a participação e o interesse dos estudantes no tema, tornando-se um potencial instrumento; - Relevância do referencial teórico, confrontando a fundamentação teórica utilizada com os resultados observados, verificando se as premissas iniciais foram corroboradas; - Adequação da metodologia, avaliando se as atividades propostas, mediadas pelo software, foram apropriadas para o nível de compreensão dos alunos e eficazes na superação das dificuldades previstas.

Assim, a análise a *posteriori* não apenas válida a eficácia da sequência didática e das ferramentas utilizadas, mas também oferece subsídios para ajustes e refinamentos em futuras intervenções. É nessa etapa que se estabelece a contribuição da pesquisa para a prática de ensino, com base na articulação entre teoria e prática e na análise crítica dos resultados obtidos

3 ANÁLISE PRÉVIA

3.1 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Esta seção tem como objetivo apresentar as metodologias e os resultados de pesquisas relacionadas ao estudo de corpos redondos (ou sólidos de revolução), desenvolvidas por pesquisadores e professores de matemática. A abordagem visa justificar e fundamentar teoricamente o desenvolvimento desta dissertação, fornecendo um panorama das práticas e estratégias pedagógicas propostas na literatura.

Para alcançar este objetivo, foi conduzida uma pesquisa bibliográfica estruturada, seguindo etapas específicas que garantiram um levantamento abrangente e criterioso das produções acadêmicas relevantes. A coleta de dados ocorreu entre os dias 10 de janeiro e 30 de março de 2024, e incluiu dissertações, teses, artigos científicos e outros documentos acadêmicos indexados em bases de dados como a CAPES, Scielo e Google Acadêmico.

As palavras-chave utilizadas na busca incluíram "corpos redondos", "sólidos de revolução", "metodologias de ensino de geometria espacial", "uso de softwares educativos na matemática" e "Geogebra no ensino". Os critérios de seleção contemplaram estudos publicados entre 2015 e 2023, que apresentassem resultados práticos ou teóricos sobre o ensino de geometria espacial no ensino médio, com foco na aplicação de tecnologias educacionais e metodologias ativas.

Com base nessa análise, foram identificadas contribuições importantes que embasam as discussões e propostas deste trabalho. A próxima seção apresenta a síntese dos principais resultados e das metodologias identificadas na literatura, evidenciando as lacunas que motivaram o desenvolvimento desta pesquisa.

Procedimento inicial .O procedimento inicial foi estruturado em sete etapas, buscando oferecer uma abordagem organizada e sistemática que facilite a compreensão e o aprimoramento das buscas bibliográficas. Essas etapas visam a proporcionar um método claro e eficaz para explorar e selecionar, de forma adequada, as fontes relevantes ao desenvolvimento desta dissertação.

Na primeira etapa, selecionamos os bancos de dados com acervos online onde seriam realizadas as buscas por documentos, como dissertações e teses. Optamos por dois bancos de dados amplamente utilizados:

- Catálogo de Dissertações e Teses da CAPES: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/.
- BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações: https://bdtd.ibict.br/vufind/.

Na segunda etapa, determinamos o período de recorte temporal de 2014 a 2023, um intervalo considerado satisfatório, e aplicamos os filtros de tempo em cada banco de dados para delimitar nossa busca.

Na terceira etapa, definimos os descritores (palavras-chave) de acordo com o nosso objeto de estudo e os aplicamos em cada banco de dados. Para garantir maior precisão, utilizamos aspas para pesquisar descritores compostos, como “corpos redondos” e “sólidos de revolução”, pois muitos autores consideram esses termos como representações do mesmo objeto de estudo na geometria espacial.

Na quarta etapa, procedemos ao levantamento e à identificação dos trabalhos, de acordo com o protocolo descrito. No site da BDTD, aplicamos os filtros conforme as etapas anteriores. Utilizando o descritor “sólidos de revolução”, identificamos 13 documentos: 11 dissertações e 2 teses, sendo que as teses não pertenciam à área de Educação Matemática. Com o descritor “corpos redondos”, encontramos 6 documentos de dissertações.

No segundo momento, no site da CAPES, ao utilizar o descritor “corpos redondos”, identificamos 4 dissertações; com o descritor “sólidos de revolução”, encontramos 14 dissertações e uma tese, também fora da área de Educação Matemática. Na quinta etapa, organizamos os trabalhos conforme os quadros (2 e 3) apresentados a seguir, classificando-os em dois perfis: Perfil - Descritor 1: Corpos Redondos e Perfil - Descritor 2: Sólidos de Revolução

Os quadros permitem visualizar de forma detalhada e sistemática os resultados obtidos com o levantamento, fundamentando a análise posterior.

Quadro 1- Perfil - Descritor 1: Corpos Redondos

Autor	Título	Ano	IES	Programa	UF
Araújo	A utilização de softwares educativos e métodos de ensino no estudo de poliedros e corpos redondos	2017	UFMT	PROFMAT	MT

Pinheiro	Estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos: concepções e práxis de uma sequência didática à luz da teoria de Guy Brosseau	2022	UFSM	PROFMAT	RS
Hellmann	GeogebraBook para o ensino de Corpos Redondos e Esfera	2021	UEMT	PROFMAT	MT
Matos	Aplicações dos teoremas de Pappus - Guldin no ensino médio: corpos redondos	2018	UFMS	PRFOMAT	MS

Fonte: autor (2024)

Quadro 2 - Perfil - Descritor 2: Sólidos de revolução

Autor	Título	Ano	IES	Programa	UF
Pinheiro	Estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos: concepções e práxis de uma sequência didática à luz da teoria de Guy Brosseau	2022	UFSM	PROFMAT	RS
Neitzel	Experimentação, tecnologias digitais e o teorema de Pappus-Guldin: uma proposta pedagógica para o ensino de sólidos de revolução	2023	Univates	PPECE	RS
Nadalon	Sólidos e superfícies de revolução com auxílio do software Geogebra	2018	CUF	PPECM	RS
Madeira	Sólidos de revolução: uma proposta de estudo	2014	UFJF	PROFMAT	MG
Silva	O ensino de sólidos de revolução com auxílio do Superlogo 3.0	2017	UFPA	PROFMAT	PA
Araujo	Volumes de sólidos de revolução no Ensino médio: uma abordagem dinâmica e intuitiva a partir das ideias do Cálculo	2015	UFF	PROFMAT	RJ
Souza	O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN E O PRINCÍPIO DE CAVALIERI: uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio	2021	UNIVASF	PROFMAT	BA

Fonte: autor (2024)

Na sexta etapa, foram iniciadas as anotações dos resultados, realizando-se a verificação da conformidade dos documentos com os descritores estabelecidos. Os resumos de cada trabalho foram analisados para garantir que estivessem dentro da área do ensino de matemática, excluindo-se os documentos que não se enquadravam no escopo da pesquisa. Inicialmente, foram levantados 37 documentos, mas após as verificações nas etapas quatro, cinco e seis, constatou-se que apenas 10 dissertações

abordavam o estudo de corpos redondos ou sólidos de revolução no ensino de matemática.

Na sétima etapa, os resultados gerais foram organizados em tabelas e quadros, conforme apresentados na Tabela 1: "Resultado por descritor e ano", e na Tabela 2: "Total de produções por universidades, programas e estados por descritor". Na Tabela 1, observou-se a ausência de registros de trabalhos nos anos de 2016, 2019 e 2020. Importante destacar que um dos trabalhos (identificado com um asterisco) foi registrado em ambos os descritores, evidenciando a relevância de certos temas na área de estudo.

Tabela 1 Resultado por descritor e ano

Descritor	20-14	20-15	20-16	20-17	20-18	20-19	20-20	20-21	20-22	20-23	Total
Corpos redondos	-----	-------	-------	1	1	-----	-----	1	1*	-----	4
Sólidos de revolução	1	1	-------	1	1	-----	-----	1	1*	1	7
Total	1	1	-------	2	2	-----	-----	2	1	1	10

Fonte: autor (2024)

Nesse sentido, também foi identificado um número considerável de dissertações (oito) produzidas no programa PROFMAT, o que chama atenção, considerando que esse programa tem como foco a formação matemática aprofundada.

Tabela 2: Total de produções por Universidades/ programas / Estados por descritor

Descritor	Programa	Instituição	Estado	Total
Corpos Redondos	PROFMAT	UEMT	Mato Grosso	1
		UFMT		1
		UFMS	Mato Grosso do Sul	1
		UFSM	Rio Grande do Sul	1
Sólidos de Revolução		UNIVASF	Bahia	1
		UFPA	Pará	1
		UFJF	Minas Gerais	1
		UFF	Rio de Janeiro	1
	PPECE	Univates	Rio Grande do Sul	1
	PPECM	CUF		1

Fonte: autor (2024)

Assim, como pode-se observar no quadro 4 - Escopo de dissertações, de forma geral estes foram os resultados de trabalhos levantados e selecionados em nossa pesquisa de busca nos bancos de dados E no quadro 4 vemos de forma resumida esses trabalhos.

Quadro 3 - Escopo de trabalhos selecionados

DISSERTAÇÕES				
N	Título	Autor	Ano	Acervo
1	Sólidos de revolução: uma proposta de estudo	Madeira	2014	BDTD CAPES
2	Estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos: concepções e práxis de uma sequência didática à luz da teoria de Guy Brousseau	Pinheiro	2022	BDTD CAPES
3	Aplicações dos teoremas de Pappus - Guldin no ensino médio: corpos redondos	Matos	2018	CAPES
4	O teorema de Pappus Guldin e o princípio de Cavalieri: uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio	Souza	2021	CAPES
5	Experimentação, tecnologias digitais e o teorema de Pappus-Guldin: uma proposta pedagógica para o ensino de sólidos de revolução	Neitzel	2023	BDTD CAPES
6	Volumes de sólidos de revolução no Ensino médio: uma abordagem dinâmica e intuitiva a partir das ideias do Cálculo	Araujo	2015	CAPES
7	A utilização de softwares educativos e métodos de ensino no estudo de poliedros e corpos redondos	Araújo	2017	BDTD CAPES
8	Sólidos e superfícies de revolução com auxílio do Software Geogebra	Nadalon	2018	BDTD CAPES
9	Geogebrabook para o ensino de corpos redondos e esfera	Hellmann	2021	CAPES
10	O ensino de sólidos de revolução com auxílio do Superlogo 3.0	Silva	2017	CAPES

Fonte: Autor (2024)

A partir dos dados apresentados nos Quadros 3 e 4, observa-se que a maior parte das dissertações selecionadas está voltada para o estudo de sólidos de revolução, com ênfase no uso de teorias matemáticas, como os teoremas de Pappus-Guldin, e na aplicação de tecnologias digitais no ensino de matemática. A diversidade de abordagens metodológicas reflete o interesse crescente em integrar o conhecimento matemático com ferramentas inovadoras, como softwares educativos e a utilização de plataformas como o Geogebra e o *Superlogo* 3.0, visando aprimorar a compreensão dos conceitos de geometria no ensino médio.

Destaca-se também a predominância de dissertações provenientes do programa PROFMAT, o que reforça a relevância desse programa para a formação de professores com foco em uma abordagem aprofundada no ensino da matemática. As dissertações foram produzidas entre 2014 e 2023, evidenciando a continuidade e a evolução da pesquisa na área do ensino de matemática, com particular atenção ao estudo de corpos redondos e sólidos de revolução.

Esse levantamento contribui para a compreensão das tendências atuais e das lacunas existentes na pesquisa acadêmica sobre o ensino de geometria, fornecendo uma base sólida para futuras investigações e para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais eficazes e inovadoras.

Quadro 4: Resumo dos trabalhos apresentados

Autor (ano)	Título	Objeto	Objetivo	Corpus/ Metodologia	Resultados
Madeira (2014)	Sólidos de revolução: uma proposta de estudo	Atividades de tarefas.	Reintroduzir este conceito matemático pouco explorado pelos alunos.	Bibliográfica e teórico/Método dedutivo. Desenvolvimento de atividade. Exploratórias.	Através da proposta de estudo espera-se que aluno desenvolva uma melhor compreensão sobre os conceitos de sólidos de revolução.
Pinheiro (2022)	Estudo dos sólidos de revolução com ênfase nos corpos redondos: concepções e práxis de uma sequência didática à luz da teoria de Guy Brousseau.	Situações Didáticas e Sequência didática	Investigar como teorias educacionais podem ser aplicadas de maneira eficaz para promover uma aprendizagem mais significativa e autônoma entre os alunos	Materiais de ensino e alunos/Experimental, Pesquisa Teórica e qualitativa	Os resultados indicaram que a sequência didática baseada na Teoria das Situações Didáticas promoveu autonomia intelectual e aprendizagem significativa dos alunos em relação aos sólidos de revolução no Ensino médio.

Araujo (2015)	Neitzel (2023)	Souza (2021)	Matos (2018)
Volumes de sólidos de revolução no Ensino médio: uma abordagem dinâmica e intuitiva a partir das ideias do Cálculo	Experimentação, tecnologias digitais e o teorema de Pappus-Guldin: uma proposta pedagógica para o ensino de sólidos de revolução	O teorema de Pappus Guldin e o princípio de Cavalieri: uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio	Aplicações dos teoremas de Pappus - Guldin no ensino médio: corpos redondos
Proposta educacional. Noções básicas do Cálculo. Software de Geometria Dinâmica.	Aplicação da sequência didática e Software de Geometria Dinâmica.	Ensino de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio. Pappus Guldin.	Teoremas de pappus-Guldin
Apresentar e avaliar uma sequência de atividades para o ensino da área do círculo e do volume de sólidos de revolução no ensino médio, utilizando conceitos básicos do Cálculo.	Investigar as potencialidades de uma sequência didática orientada pela experimentação, utilizando materiais concretos manipuláveis e tecnologias digitais.	Apresentar uma proposta para o ensino de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio, utilizando o Teorema de Pappus Guldin e o Princípio de Cavalieri.	Apresentar aos professores e alunos de matemática e física do ensino médio a aplicação dos Teoremas de Pappus-Guldin na dedução não tradicional.
Modelos simulados e Materiais de ensino/ Qualitativa. Descritiva. Sequência de atividades didáticas.	Dados Empíricos. Alunos do Ensino médio Integrado/ Descritiva. Qualitativa. Atividades experimentais, Estudo de Caso. Sequência didática.	Métodos e teorias. Aluno e professor do Ensino médio/ Sequência didática. Modelagem matemática	Métodos e teorias/ Teoremas de Pappu e fórmulas do volume e superfícies /Método dedutivo.
Atividades mostraram que a maioria dos alunos compreendeu as origens das fórmulas para calcular a área, usando conceitos intuitivos de limite e método de exaustão. Alguns alunos, tiveram dificuldades com escrita matemática e cálculos simples.	Atividades práticas com materiais manipuláveis e Geogebra mostraram aprendizado eficaz no ensino de sólidos de revolução.	Positivos, pois o aluno pode mostrar que é possível determinar facilmente as equações de volume dos objetos, além de calcular o volume de outros sólidos de revolução.	O trabalho visa tornar acessíveis os Teoremas de Pappus-Guldin para alunos e professores do ensino médio, utilizando uma linguagem adequada e exemplos práticos

Silva (2017)	Hellmann (2021)	Nadalon (2018)	Araújo (2017)
O ensino de sólidos de revolução com auxílio do Superlogo 3.0	Geogebrabook para o ensino de corpos redondos e esfera	Sólidos e superfícies de revolução com auxílio do Software Geogebra	A utilização de softwares educativos e métodos de ensino no estudo de poliedros e corpos redondos
Softwares de Geometria Dinâmica	Proposta educacional. Software de Geometria Dinâmica.	Explorar o uso de ferramenta pedagógica. Software de Geometria Dinâmica.	Software de Geometria Dinâmica. Aprendizagem Cooperativa.
Elaborar uma proposta de intervenção metodológica para resgatar o conceito de sólido de revolução	Propor uma abordagem inovadora para o ensino de geometria matemática	Construir um instrumento didático com o uso do Geogebra 3D para facilitar a obtenção visualização de superfícies e sólidos de revolução	Propor novas abordagens para o ensino de poliedros e corpos redondos, visando superar as dificuldades frequentemente encontradas por alunos na aprendizagem da geometria
Modelos Simulados Teórico/Método dedutivo. Desenvolvimento de atividade. Educacionais.	Modelos simulados/ Método dedutivo. Desenvolvimento de atividade. Quase experimental.	Modelos simulados materiais de ensino/Pesquisa qualitativa. Documental. Experimental. Análise de material.	Modelos simulados/ Pesquisa teórica. Estudo de caso. Análise de Material. Desenvolvimento de tarefas em sala de aula
Alunos demonstraram melhorias no raciocínio lógico-dedutivo e na percepção espacial, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa dos conceitos Matemático	O GeogebraBook como recurso educacional para o ensino de Corpos Redondos contribuiu para a dinamização do processo de aprendizagem.	O Geogebra 3D facilitou a visualização e compreensão de superfícies e sólidos de revolução, demonstrando ser eficaz no contexto educacional.	O impacto positivo dessas abordagens inovadoras no processo de aprendizagem dos alunos, demonstrando a eficácia das novas metodologias em relação aos métodos tradicionais de ensino.

Fonte: Autor (2024)

3.1.1 Síntese e discussão dos trabalhos

Durante minha prática pedagógica em sala de aula, observei que os alunos do ensino médio enfrentavam dificuldades significativas no entendimento dos conceitos de Geometria Espacial, particularmente no que se refere aos corpos redondos e à representação de objetos espaciais, como poliedros e sólidos de revolução. Esses

conceitos, quando abordados por meio de representações planas, seja no quadro negro ou em ilustrações de livros didáticos, não eram facilmente assimilados pelos estudantes, o que prejudicava a compreensão das propriedades geométricas desses corpos tridimensionais.

Nesse contexto, a pesquisadora Madeira (2014) inicia sua investigação ressaltando a importância da percepção geométrica no processo de aprendizagem, destacando que a capacidade de perceber e compreender o espaço é fundamental para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e lógico-matemáticas. Segundo a autora, a percepção geométrica desempenha um papel crucial na vida cotidiana dos alunos, sendo essencial não apenas para a interpretação do mundo ao seu redor, mas também para o desenvolvimento de habilidades abstratas e criativas, fundamentais para a formação do pensamento matemático. Nesse sentido, a Geometria no ensino médio é apresentada como um instrumento imprescindível para a interpretação e compreensão do espaço, ao passo que a Matemática, enquanto ciência, deve ser encarada como um campo que utiliza métodos investigativos e teoremas para a solução de problemas.

No que diz respeito ao estudo dos corpos redondos no ensino médio, Madeira (2014) observa que, apesar da relevância atribuída a esse tema nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os autores de livros didáticos geralmente dedicam pouca atenção a essa área, o que contribui para a lacuna no ensino de sólidos de revolução. A pesquisadora, portanto, propõe como objetivo principal do seu trabalho a reintrodução do conceito de sólido de revolução, com vistas a proporcionar aos alunos uma compreensão mais aprofundada das relações matemáticas e variáveis envolvidas no estudo desses corpos geométricos.

A proposta pedagógica delineada por Madeira (2014) visa a aplicação de atividades didáticas com alunos dos dois últimos anos do ensino médio. O foco das atividades é introduzir a técnica dos discos para estimar volumes de sólidos de revolução, utilizando funções matemáticas com as quais os alunos já estão familiarizados. A utilização de materiais concretos e o software Winplot são recursos adotados para facilitar a visualização dos sólidos e das superfícies geradas pela rotação de regiões planas.

A metodologia proposta pela pesquisadora contempla 18 encontros de 50 minutos, distribuídos em 22 atividades que visam a facilitar a compreensão dos conceitos abordados. Essas atividades são organizadas de acordo com a seguinte

estrutura: Uma aula dedicada à aplicação de um questionário inicial, com o objetivo de diagnosticar o nível de conhecimento prévio dos alunos sobre o tema; Duas aulas destinadas à revisão dos conceitos relacionados aos volumes e à análise das dificuldades identificadas no questionário; Duas aulas focadas na exploração do conceito de sólidos de revolução e na construção de uma compreensão inicial sobre o tema; Duas aulas para consolidar o entendimento dos sólidos de revolução, incluindo o cálculo dos volumes de formas geométricas conhecidas; Uma aula introdutória sobre a técnica dos discos e sua aplicação no cálculo de volumes de sólidos de revolução; Duas aulas práticas no laboratório, nas quais os alunos terão a oportunidade de aplicar a técnica dos discos utilizando o software Winplot; Duas aulas para discutir em profundidade a técnica dos discos e aplicar a atividade 16; Seis aulas para aplicar a técnica dos discos e consolidar o aprendizado adquirido durante as atividades anteriores.

A conclusão de Madeira (2014) aponta que, por meio das atividades propostas, espera-se que os alunos desenvolvam a habilidade de aplicar a técnica dos discos na estimativa de volumes de sólidos de revolução, ampliando suas competências em pensamento matemático avançado. Além disso, a autora salienta a importância de promover uma conexão entre diferentes conteúdo do ensino médio e do ensino superior, possibilitando aos estudantes uma compreensão mais ampla e integrada dos conceitos geométricos. A utilização de ferramentas tecnológicas, como o Winplot, é enfatizada como um recurso fundamental para a visualização das superfícies geradas e o cálculo do volume dos sólidos de revolução, facilitando a abstração de conceitos complexos e promovendo uma aprendizagem mais eficaz e contextualizada.

Pinheiro (2022) desenvolve um estudo que propõe uma sequência didática para o ensino dos sólidos de revolução, com ênfase nos corpos redondos, embasada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. A pesquisa, de abordagem qualitativa, foi realizada com alunos do terceiro ano do ensino médio de um instituto estadual localizado em Júlio de Castilhos, RS. O objetivo principal do trabalho, conforme exposto pela autora, é investigar as contribuições da TSD para o ensino desse objeto de conhecimento, com o intuito de consolidar esses saberes de forma significativa (Pinheiro, 2022, p. 16). A sequência didática foi estruturada em quatro blocos principais, abordando desde a planificação dos sólidos de revolução até a resolução de problemas complexos envolvendo áreas e volumes. Os resultados demonstraram que o uso de materiais manipuláveis e simuladores foi crucial para a

aprendizagem dos alunos, especialmente na percepção geométrica e na compreensão dos conceitos relacionados ao cálculo de áreas e volumes dos sólidos de revolução.

Matos (2018), por sua vez, dedica-se ao estudo dos Teoremas de Pappus-Guldin, propondo uma aplicação não tradicional desses teoremas no ensino médio, dado que muitos professores e alunos desconhecem seus conceitos. O objetivo principal de Matos é proporcionar uma aplicação prática e acessível dos teoremas, considerando a realidade do ensino médio, e comparar a eficácia de dois métodos de ensino: o tradicional (Modo 1) e o método que envolve a aplicação direta dos teoremas (Modo 2). A metodologia de Matos visa refletir sobre a eficiência dos métodos na resolução de problemas relacionados aos sólidos de revolução, com a intenção de oferecer aos professores do ensino médio alternativas para promover um aprendizado mais eficaz e significativo.

Ambos os estudos convergem na importância de um ensino dinâmico e contextualizado dos sólidos de revolução, com ênfase na utilização de recursos que favoreçam a visualização e a aplicação prática dos conceitos matemáticos. A pesquisa de Pinheiro (2022) destaca a relevância da TSD e dos materiais manipuláveis para a promoção de uma aprendizagem ativa, enquanto Matos (2018) enfoca a necessidade de adaptar os conteúdos aos conhecimentos prévios dos alunos, utilizando abordagens inovadoras e acessíveis para tornar o estudo dos teoremas de Pappus-Guldin mais relevante e compreensível para os estudantes do ensino médio.

Ambos os autores evidenciam a importância de estratégias pedagógicas que envolvam a aplicação prática dos conceitos matemáticos em situações do cotidiano, o que torna o aprendizado mais significativo e eficaz. O trabalho de Matos (2018) está estruturado de forma a explorar de maneira didática os conceitos e aplicações dos sólidos de revolução, com um foco especial nos Teoremas de Pappus-Guldin. Ele organiza a pesquisa em quatro capítulos: (1) Definições e Conceitos Preliminares, que introduzem os fundamentos matemáticos necessários para a compreensão do conteúdo; (2) Os Principais Corpos Redondos no Ensino médio, que apresentam as fórmulas tradicionais para o cálculo do volume e da área da superfície dos sólidos de revolução ensinados nesse nível de ensino; (3) Aplicações dos Teoremas de Pappus-Guldin, que confirmam as fórmulas desses corpos, utilizando o Modo 2, baseado na aplicação direta dos teoremas; e (4) Algumas Aplicações, que resolvem problemas práticos com as duas metodologias: tradicionalmente, sem os teoremas, e com a

aplicação dos Teoremas de Pappus-Guldin. Além disso, para facilitar a visualização dos conceitos, o autor utiliza o software Geogebra, ilustrando cada solução com o sólido correspondente.

Enfim, Matos (2018) enfatiza a importância de incentivar os professores de Matemática a refletirem sobre a introdução do Modo 2 no ensino dos sólidos redondos, promovendo uma abordagem mais aprofundada dos aspectos posicionais e métricos, que são fundamentais no ensino de geometria no ensino médio.

No estudo de Souza (2021), o autor parte da premissa de que o ensino da geometria é uma das bases essenciais para o desenvolvimento do conhecimento matemático, proporcionando ao aluno uma compreensão mais ampla de situações cotidianas e promovendo o desenvolvimento do pensamento lógico-geométrico. Souza (2021) propõe uma metodologia para o ensino do cálculo de volumes de sólidos de revolução, utilizando a modelagem matemática como ferramenta pedagógica. O foco da pesquisa é demonstrar a aplicação dos Teoremas de Pappus-Guldin e do Princípio de Cavalieri no cálculo de volumes, especificamente no contexto do 2º ano do ensino médio. Souza (2021) adota uma abordagem de pesquisa básica, com a criação de uma sequência didática composta por quatro atividades principais, visando o aprimoramento do ensino e a promoção de uma aprendizagem mais significativa.

Ambos os estudos, de Matos (2018) e Souza (2021), convergem na utilização de metodologias inovadoras e no fortalecimento do entendimento dos alunos sobre os sólidos de revolução, destacando a importância dos Teoremas de Pappus-Guldin e de outras ferramentas matemáticas para o desenvolvimento de habilidades geométricas e o cálculo preciso dos volumes e áreas desses corpos. Ambos os autores reconhecem a necessidade de tornar o ensino de Matemática mais acessível e aplicável, incentivando uma aprendizagem mais interativa e prática, com o auxílio de recursos como o Geogebra e metodologias que favoreçam a reflexão crítica dos estudantes sobre os conceitos trabalhados.

Souza (2021) justifica o uso da sequência didática associada à modelagem matemática, destacando a necessidade de superar a abordagem tradicionalista que predominou no ensino da Matemática no Brasil por longo tempo. Nesse modelo, o papel do professor era central, sendo visto como o detentor do conhecimento, enquanto os alunos assumiam uma postura passiva, limitando-se à reprodução mecânica de conceitos e fórmulas por meio da memorização. Esse formato de ensino resultou em uma compreensão superficial dos conteúdos, especialmente no ensino

da geometria, e prejudicou o desenvolvimento das habilidades necessárias para que os alunos compreendessem e se envolvessem com a realidade ao seu redor.

Souza (2021) conclui que a utilização da modelagem matemática e a sequência didática proposta, ao envolver os alunos como protagonistas ativos no processo de aprendizagem, torna o ensino da geometria mais eficaz. Isso é possibilitado pela contextualização dos conceitos em situações reais, facilitando a compreensão dos alunos. A diversificação dos métodos de ensino, com a inclusão dos Teoremas de Pappus-Guldin e do Princípio de Cavalieri no cálculo de volumes, amplia a compreensão dos alunos sobre os sólidos de revolução.

Neitzel (2023) propõe investigar as potencialidades de uma sequência didática orientada pela experimentação, utilizando materiais manipuláveis e tecnologias digitais, no contexto do ensino de sólidos de revolução. Sua pesquisa segue uma abordagem qualitativa, com o objetivo de explorar os aspectos subjetivos do processo de aprendizagem dos alunos. Além do mais, a pesquisa tem uma natureza descritiva e explicativa, buscando compreender as nuances do ensino de sólidos de revolução por meio de uma sequência didática aplicada em campo.

Neitzel (2023) utilizou uma pesquisa de campo, que envolveu uma investigação bibliográfica prévia e a implementação da sequência didática com um grupo de 27 alunos do 3º ano do ensino médio em uma instituição técnica que oferece cursos de Química Integrada. A sequência foi aplicada durante seis encontros de 1h40min cada, utilizando recursos do laboratório de matemática e informática da instituição. Para a coleta de dados, o autor utilizou observações, atividades escritas e questionários.

Nesse sentido, os resultados da pesquisa foram organizados com base nas atividades realizadas em cada encontro da sequência didática: 1º encontro: Introdução ao tema com a apresentação de uma máquina elétrica giratória e de polígonos para a formação dos sólidos de revolução. 2º encontro: Realização de medições das alturas e raios do cilindro, cone e esfera, e determinação dos volumes em metros cúbicos de cada sólido. 3º e 4º encontros: Aprofundamento da compreensão dos conceitos dos sólidos de revolução. 5º encontro: Utilização do software Geogebra, especialmente a janela 3D, para explorar as figuras geométricas no laboratório de informática. 6º encontro: Apresentação dos experimentos pelos grupos, em seminário, consolidando os conceitos adquiridos ao longo da sequência didática.

Neitzel (2023) observa que, ao final da sequência, os alunos apresentaram uma compreensão mais robusta dos conceitos de sólidos de revolução, mostrando-se mais envolvidos no processo de aprendizagem. A aplicação de recursos como a experimentação prática, materiais manipuláveis e o uso de tecnologias digitais foi essencial para a construção do conhecimento, além de facilitar o entendimento dos conteúdos geométricos por parte dos alunos.

Pode-se constatar que, ao avaliar os conhecimentos prévios dos alunos por meio de uma tarefa proposta, que consistia em identificar as faces, vértices e arestas dos sólidos e classificá-los como convexos ou não convexos, observou-se que apenas um aluno obteve desempenho perfeito, enquanto metade dos alunos alcançou 60% de acertos. O autor destaca que os alunos relataram dificuldades na análise de figuras tridimensionais, especialmente quando estas eram representadas em uma superfície plana.

Em função dessas dificuldades, Neitzel (2023) aponta que "livros didáticos e lousas" são frequentemente utilizados para "representar uma visão bidimensional dos poliedros, o que pode dificultar o aprendizado do conteúdo" (p. 79). Diante disso, durante a intervenção pedagógica, o pesquisador introduziu os sólidos de revolução, destacando seus aspectos tridimensionais, em comparação com os poliedros, a fim de proporcionar uma melhor compreensão das figuras geométricas.

Portanto, conforme argumentado por Neitzel (2023), diversos autores enfatizam que a compreensão de conceitos vai além da simples observação, sendo necessário envolver os alunos na organização de ações que possibilitem a assimilação dos conteúdos. Nesse sentido, a aplicação de uma sequência didática fundamentada na experimentação, utilizando materiais manipuláveis e o software Geogebra para o cálculo do volume dos sólidos de revolução, em combinação com o Teorema de Pappus-Guldin, deve ser planejada levando-se em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes.

Araujo (2015), por sua vez, inicia sua pesquisa defendendo a ideia de que o estudo das noções de cálculo deve ser reincorporado aos currículos de matemática do ensino médio no Brasil, como ocorreu no passado. Nesse contexto, o objetivo principal do autor foi "apresentar uma proposta e realizar uma avaliação de uma sequência de atividades didáticas para o ensino da área do círculo e do volume dos sólidos de revolução" (2015, p. 13).

Para atingir esse objetivo, Araujo (2015) utilizou uma metodologia qualitativa, visando obter dados descritivos a partir da execução de atividades por 32 alunos, com idades entre 16 e 18 anos, de uma turma do 2º ano do ensino médio do Colégio Estadual Visconde de Itaboraí. As atividades foram planejadas com o intuito de avaliar o desempenho dos alunos no uso do método de exaustão, aliado à noção intuitiva de limite.

O autor acima, referenciado, relata que as atividades foram implementadas por meio de sequências didáticas ao longo de seis aulas, utilizando aplicativos e recursos interativos do software Geogebra 3D. Os temas abordados nas aulas envolveram a área do círculo, o volume do cilindro, o volume do cone e o volume da esfera (corpos redondos). Após as atividades, o pesquisador aplicou um questionário sobre os tópicos estudados e sobre a utilização do software, coletando as respostas dos alunos para posterior tabulação e análise. A análise foi conduzida utilizando uma escala Likert de cinco pontos, a fim de medir as percepções dos estudantes em relação aos conteúdos e à ferramenta utilizada.

Para atingir esse objetivo, Araujo (2015) utilizou uma metodologia qualitativa, com o intuito de obter dados descritivos a partir da execução de atividades por 32 alunos, com idades entre 16 e 18 anos, de uma turma do 2º ano do ensino médio do Colégio Estadual Visconde de Itaboraí. As atividades foram planejadas com o objetivo de avaliar o desempenho dos alunos no uso do método de exaustão, aliado à noção intuitiva de limite.

Destaca-se que, as atividades foram implementadas por meio de sequências didáticas ao longo de seis aulas, utilizando aplicativos e recursos interativos do software Geogebra 3D. Os temas abordados nas aulas envolveram a área do círculo, o volume do cilindro, o volume do cone e o volume da esfera (corpos redondos). Após a execução das atividades, o pesquisador aplicou um questionário sobre os tópicos estudados e sobre a utilização do software, coletando as respostas dos alunos para posterior tabulação e análise (Araujo, 2015). A análise foi conduzida utilizando uma escala Likert de cinco pontos, a fim de medir as percepções dos estudantes em relação aos conteúdos e à ferramenta utilizada.

Neste contexto, Neitzel (2023) afirma que, ao avaliar os conhecimentos prévios dos alunos por meio de uma tarefa proposta, que consistia em identificar as faces, vértices e arestas dos sólidos e classificá-los como convexos ou não convexos, observou-se que apenas um aluno obteve desempenho perfeito, enquanto metade

dos alunos alcançou 60% de acertos. O autor destaca que os alunos relataram dificuldades na análise de figuras tridimensionais, especialmente quando estas eram representadas em uma superfície plana.

Em função dessas dificuldades, constata-se que, "livros didáticos e lousas" são frequentemente utilizados para "representar uma visão bidimensional dos poliedros, o que pode dificultar o aprendizado do conteúdo" (p. 79). Diante disso, durante a intervenção pedagógica, o pesquisador introduziu os sólidos de revolução, destacando seus aspectos tridimensionais, em comparação com os poliedros, a fim de proporcionar uma melhor compreensão das figuras geométricas. (Neitzel, 2023)

Neitzel (2023) e Araujo (2015) enfatizam que, a compreensão de conceitos vai além da simples observação, sendo necessário envolver os alunos na organização de ações que possibilitem a assimilação dos conteúdos. Nesse sentido, a aplicação de uma sequência didática fundamentada na experimentação, utilizando materiais manipuláveis e o software Geogebra para o cálculo do volume dos sólidos de revolução, em combinação com o Teorema de Pappus-Guldin, deve ser planejada levando-se em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes.

Araujo (2015), por sua vez, inicia sua pesquisa defendendo a ideia de que o estudo das noções de cálculo deve ser reincorporado aos currículos de matemática do ensino médio no Brasil, como ocorreu no passado. Nesse contexto, o objetivo principal do autor foi "apresentar uma proposta e realizar uma avaliação de uma sequência de atividades didáticas para o ensino da área do círculo e do volume dos sólidos de revolução" (2015, p. 13).

Araújo (2017) ressalta que, um dos principais resultados da pesquisa foi o impacto positivo do uso de softwares educativos e dobraduras na visualização de figuras espaciais, bem como a eficácia de outras metodologias no processo de aprendizagem dos alunos, destacando que nenhum dos métodos de ensino propostos havia sido utilizado pelos professores anteriormente. A autora ressalta que, devido à presença dos corpos redondos na vida cotidiana e profissional dos alunos, é necessário um cuidado especial ao trabalhar com esse conteúdo, enfatizando a importância da contextualização e da promoção da interdisciplinaridade.

Quanto ao método de aprendizagem cooperativa Jigsaw, sua utilização deve ser realizada com atenção, uma vez que nem sempre o conteúdo permite que os próprios alunos construam o conhecimento geométrico. Além disso, o tempo é um fator desafiador para esse método, requerendo um planejamento cuidadoso devido à

sua demanda de tempo. Em casos de alunos desinteressados, é fundamental motivar seu envolvimento para evitar a dispersão e alcançar os objetivos propostos.

Neste contexto, Araújo (2017) enfatiza que, em nenhum momento, houve a intenção de criticar o método tradicional de ensino que é utilizado nos dias de hoje, mas sim de oferecer uma nova abordagem que possa ser adotada por professores que lidam com alunos que enfrentam dificuldades no aprendizado de corpos redondos, visando sempre promover o aprendizado, que é o principal objetivo de todo educador competente.

Nabalon (2018) busca em seu trabalho responder à seguinte questão norteadora: “De que forma o Geogebra 3D pode facilitar a obtenção e a visualização de superfícies e sólidos de revolução em uma proposta de oficina pedagógica realizada na formação de professores de Matemática?” (2018, p. 13). Tendo em vista este questionamento, a pesquisa teve como objetivos construir um instrumento didático com o uso do software mencionado, aplicar e analisar uma oficina pedagógica denominada “Superfícies e Sólidos de Revolução no uso do Geogebra”.

Além disso, a pesquisa de Nabalon (2018, p. 26) teve como abordagem metodológica: “fazer um levantamento crítico sobre as questões envolvendo conteúdos de Geometria nas provas do ENEM e elaborar uma análise do conteúdo de superfícies e sólidos de revolução encontrados em livros didáticos do Ensino médio”; assim, o trabalho caracteriza-se como qualitativo e documental. Ao adotar uma abordagem filosófica mais ampla para o estudo da cognição, é possível destacar como os avanços nas ciências cognitivas refletem valores fundamentais de uma educação voltada para a formação integral do indivíduo. O conceito de cognição, compreendido como o processo pelo qual os seres humanos percebem, assimilam, processam e aplicam informações, evoluiu significativamente nas últimas décadas, incorporando perspectivas interdisciplinares que unem neurociência, psicologia, inteligência artificial e filosofia.

Essa evolução não apenas amplia a compreensão dos processos cognitivos, mas também enfatiza a importância da integração entre as dimensões biológica, cultural e tecnológica. Sob a ótica filosófica, o conhecimento cognitivo é visto como um fenômeno dinâmico, dialógico e contextualizado, alinhando-se a correntes como o construtivismo e a epistemologia histórica. Essas perspectivas enfatizam que o conhecimento não é estático, mas sim uma construção contínua que emerge das interações entre o indivíduo, o ambiente e a sociedade.

Por exemplo, o avanço no entendimento das funções cognitivas como a memória, a atenção e a tomada de decisão trouxeram à tona discussões éticas e filosóficas sobre os limites e as possibilidades da cognição humana, especialmente diante das tecnologias digitais. As ferramentas tecnológicas, que influenciam os processos cognitivos, destacam a necessidade de uma reflexão crítica sobre seus impactos na forma como aprendemos, resolvemos problemas e nos relacionamos com o conhecimento.

Diante isso, a integração entre cognição e filosofia permite um diálogo profundo sobre questões como a natureza do pensamento, a consciência e a relação entre mente e corpo. Essa abordagem, ao considerar o caráter histórico e cultural do conhecimento, reforça a importância de uma visão sistêmica e interdisciplinar no estudo da cognição. Ela também promove a análise crítica dos processos de construção do conhecimento, ajudando os indivíduos a compreenderem que a ciência e a tecnologia são produtos de contextos específicos, influenciados por valores e interesses diversos.

No contexto educacional, a evolução do conceito de cognição destaca a importância de estratégias pedagógicas que considerem a diversidade cognitiva dos estudantes. Abordagens que reconheçam as múltiplas formas de aprender e as experiências prévias dos indivíduos são fundamentais para promover uma educação inclusiva e adaptativa. Essa perspectiva, alinhada às correntes filosóficas contemporâneas, possibilita a formação de cidadãos críticos, reflexivos e capazes de enfrentar os desafios complexos da sociedade atual.

Ao integrar cognição e filosofia, o ensino contemporâneo contribui para o desenvolvimento de um pensamento crítico que transcende a simples aquisição de informações. Essa abordagem promove uma visão ampliada e ética da cognição, capaz de preparar indivíduos para uma sociedade interconectada, que exige habilidades reflexivas, colaborativas e inovadoras. Assim, a evolução do conceito de cognição reflete não apenas mudanças nos paradigmas científicos, mas também uma reconfiguração das práticas educacionais, rumo a uma formação integral e transformadora.

Constata-se sobre a evolução do estudo da cognição reafirmam sua relevância em diversos campos do conhecimento, destacando seu impacto transformador em áreas como educação, saúde e tecnologia. Ao longo das últimas décadas, a cognição tem sido explorada sob uma abordagem interdisciplinar, permitindo uma compreensão

mais profunda das interações entre mente, corpo e ambiente. Esse avanço é resultado de contribuições teóricas fundamentais, como as de Piaget, Vygotsky e Bruner, que estabeleceram as bases para o entendimento do desenvolvimento cognitivo, somadas às inovações tecnológicas e científicas contemporâneas.

No campo educacional, as descobertas em neurociência e psicologia cognitiva têm possibilitado a criação de estratégias pedagógicas personalizadas, voltadas para atender à diversidade de estilos e ritmos de aprendizagem. Ferramentas tecnológicas, como a inteligência artificial e a realidade virtual, têm transformado o ensino, tornando-o mais dinâmico e interativo, e ampliando o potencial para um aprendizado significativo e de longo prazo.

Em paralelo, os avanços na neurociência cognitiva têm impulsionado o entendimento sobre a plasticidade cerebral, abrindo novas perspectivas para o tratamento de transtornos mentais e para a reabilitação cognitiva em diferentes contextos. No campo tecnológico, o desenvolvimento de sistemas baseados em inteligência artificial que simulam e até potencializam processos cognitivos humanos traz benefícios, mas também levanta desafios éticos e sociais, especialmente em relação à autonomia das máquinas, ao impacto no mercado de trabalho e às implicações para a privacidade.

À medida que a sociedade se torna cada vez mais digitalizada, é fundamental refletir sobre os impactos das tecnologias emergentes nos processos cognitivos, promovendo um equilíbrio entre a inovação e o respeito às complexidades humanas. A integração de disciplinas como neurociência, pedagogia, inteligência artificial e ética possibilita a construção de uma abordagem sistêmica e equilibrada, essencial para lidar com os desafios de um mundo em constante transformação.

Portanto, o estudo da cognição não se limita a entender como o ser humano processa informações, mas também assume um papel estratégico na construção de uma sociedade mais adaptativa, inclusiva e inovadora. A continuidade das pesquisas, com foco em uma abordagem ética e interdisciplinar, será crucial para ampliar o potencial humano e abordar questões globais, como o envelhecimento populacional, a saúde mental e a sustentabilidade em um mundo altamente tecnológico.

. Dessa forma, os estudos sobre cognição consolidam-se como um campo fundamental para enfrentar os desafios contemporâneos e contribuir para o desenvolvimento de uma sociedade que valorize tanto os avanços científicos quanto o bem-estar coletivo. É necessário, portanto, que o investimento em pesquisa e

inovação esteja alinhado à promoção de práticas éticas e sustentáveis, garantindo que os benefícios desses avanços alcancem toda a sociedade de forma equitativa e responsável.

Durante a oficina, os alunos foram incentivados a participar de discussões teóricas, seguidas de atividades práticas, com o objetivo de contextualizar as novas abordagens pedagógicas em cenários reais de ensino. Além disso, foi promovida a utilização de ferramentas digitais, como softwares de geometria dinâmica e plataformas de ensino interativo, permitindo que os graduandos experienciassem diretamente como essas tecnologias podem ser integradas ao ensino da matemática. A análise dos resultados dessa oficina, baseada em observações e entrevistas com os participantes, tem como objetivo avaliar a eficácia das metodologias propostas e fornecer insights para a melhoria do processo de formação dos futuros professores de matemática.

Pode-se constatar que, os estudos sobre cognição consolidam-se como um campo fundamental para enfrentar os desafios contemporâneos e contribuir para o desenvolvimento de uma sociedade que valorize tanto os avanços científicos quanto o bem-estar coletivo. É necessário, portanto, que o investimento em pesquisa e inovação esteja alinhado à promoção de práticas éticas e sustentáveis, garantindo que os benefícios desses avanços alcancem toda a sociedade de forma equitativa e responsável. Durante a oficina, os alunos foram incentivados a participar de discussões teóricas, seguidas de atividades práticas, com o objetivo de contextualizar as novas abordagens pedagógicas em cenários reais de ensino.

Além disso, foi promovida a utilização de ferramentas digitais, como softwares de geometria dinâmica e plataformas de ensino interativo, permitindo que os graduandos experienciassem diretamente como essas tecnologias podem ser integradas ao ensino da matemática. A análise dos resultados dessa oficina, baseada em observações e entrevistas com os participantes, tem como objetivo avaliar a eficácia das metodologias propostas e fornecer insights para a melhoria do processo de formação dos futuros professores de matemática.

De forma contextualizada, as semelhanças encontradas nos trabalhos de Nabalon (2018), Hellmann (2021) e Silva (2017) revelam um movimento comum em direção à utilização de tecnologias educacionais para transformar o ensino de Matemática, com ênfase na Geometria. A seguir, são apresentadas essas semelhanças, analisadas dentro de seus respectivos contextos. Primeiramente, o uso

de tecnologias digitais como ferramentas pedagógicas é um ponto central nos três trabalhos. Nabalon (2018) destaca o Geogebra, um software de geometria dinâmica, que permite aos alunos construírem sólidos de revolução de forma interativa, facilitando a visualização de conceitos geométricos abstratos.

Da mesma forma, Hellmann (2021) adota o GeogebraBook, uma plataforma que proporciona uma visualização dinâmica de corpos redondos, como cilindros, cones e esferas, ampliando a compreensão dos alunos sobre esses conceitos geométricos. Silva (2017), por sua vez, explora o SuperLogo 3.0, que também facilita a construção de sólidos de revolução e busca proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das relações geométricas. Em todos os casos, a tecnologia atua como uma mediadora no processo de ensino-aprendizagem, tornando o aprendizado de Matemática mais visual, acessível e interativo, permitindo que os alunos explorem conceitos de forma prática e engajante.

A Geometria, especialmente o estudo dos sólidos de revolução e corpos redondos, é o foco principal das três pesquisas. Nabalon (2018) e Silva (2017) se concentram na construção prática desses sólidos utilizando ferramentas tecnológicas, permitindo aos alunos visualizarem e entenderem como esses objetos geométricos são gerados, indo além de uma abordagem teórica. Hellmann (2021), embora utilize o GeogebraBook, também direciona sua pesquisa para o estudo de figuras geométricas, como cilindros, cones e esferas, explorando suas propriedades e aplicações de maneira dinâmica. Todos os estudos compartilham a proposta de proporcionar uma abordagem mais concreta e interativa ao ensino da Geometria, destacando a importância de distanciar-se de métodos puramente teóricos e proporcionar aos alunos experiências práticas de aprendizado.

Outro ponto comum entre os estudos é o objetivo de aprimorar o raciocínio lógico e dedutivo dos alunos. Silva (2017) busca estimular esse desenvolvimento por meio da exploração de sólidos de revolução, incentivando os alunos a estabelecerem relações matemáticas entre as medidas e propriedades desses objetos. Nabalon (2018) também observa um avanço no raciocínio dos alunos ao trabalhar com a construção de superfícies e sólidos, notando uma melhoria nas habilidades analíticas e dedutivas. Já Hellmann (2021) propõe uma abordagem dinâmica e visual que visa promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, focando especialmente em corpos redondos. Em todas as abordagens, o objetivo é estimular a capacidade dos alunos

de pensar de forma crítica e estruturada sobre a Matemática, promovendo um aprendizado mais profundo e analítico.

A flexibilidade das ferramentas tecnológicas é uma característica comum nas três pesquisas. Nabalon (2018) destaca o Geogebra como uma ferramenta de fácil acesso, capaz de se adaptar a diferentes níveis de aprendizagem, proporcionando suporte tanto para iniciantes quanto para alunos mais avançados. Hellmann (2021) também enfatiza a adaptabilidade do GeogebraBook, que pode ser ajustado de acordo com as necessidades dos professores e seus métodos de ensino, permitindo uma personalização no processo pedagógico. Silva (2017), por sua vez, ressalta a simplicidade e acessibilidade do SuperLogo 3.0, com uma interface intuitiva que facilita a adaptação do software ao ensino da Geometria de forma prática e compreensível. Esses aspectos demonstram uma preocupação comum em tornar as tecnologias acessíveis tanto a professores quanto a alunos, independentemente de seu nível de experiência com ferramentas digitais, destacando a importância da democratização do uso de recursos tecnológicos no ensino.

Em resumo, os trabalhos de Nabalon (2018), Hellmann (2021) e Silva (2017) compartilham uma abordagem convergente no uso de tecnologias digitais para transformar o ensino da Matemática, em particular na área de Geometria. A utilização dessas ferramentas não só torna o aprendizado mais visual e acessível, mas também promove uma maior compreensão dos conceitos matemáticos, desenvolvendo habilidades lógicas e dedutivas nos alunos. A flexibilidade das tecnologias exploradas é outro ponto em comum, destacando a importância de adaptar o uso dessas ferramentas às necessidades dos alunos e professores, tornando o ensino de Matemática mais dinâmico, interativo e eficaz.

Todos os estudos abordam a transformação do ensino de Matemática por meio da utilização de tecnologias educacionais, com o objetivo de tornar o processo de aprendizagem mais interessante e envolvente. A integração de ferramentas como o Geogebra e o SuperLogo 3.0 permite a aluno visualizar e construir objetos geométricos de forma interativa, o que contribui para a concretização de conceitos muitas vezes abstratos. Nabalon (2018) e Silva (2017) promovem uma abordagem prática e exploratória, em que os alunos constroem sólidos geométricos, enquanto Hellmann (2021) aposta na visualização dinâmica por meio do GeogebraBook, proporcionando uma interação mais acessível com os conceitos de Geometria. O uso dessas ferramentas, ao tornar a Matemática mais concreta e menos abstrata, visa

aumentar o interesse dos alunos pela disciplina, criando uma atmosfera de aprendizado mais estimulante e participativa.

Além disso, as pesquisas ressaltam a preocupação com o impacto das tecnologias no desenvolvimento profissional dos professores. Nabalon (2018) e Silva (2017) destacam a importância de capacitar os docentes no uso de tecnologias como o Geogebra e o SuperLogo 3.0, com o objetivo de aprimorar a prática pedagógica e otimizar o ensino de Geometria. Hellmann (2021), por sua vez, enfatiza a flexibilidade do GeogebraBook, permitindo que os professores personalizem seu uso de acordo com suas metodologias de ensino, o que reforça a ideia de que a tecnologia deve ser uma ferramenta adaptável ao contexto educacional de cada docente. Em todos os casos, a ênfase recai sobre a capacitação docente, para que os professores possam incorporar essas tecnologias de maneira eficaz em suas práticas pedagógicas, promovendo um ensino mais dinâmico e interativo.

Dessa forma, as semelhanças entre os trabalhos de Nabalon (2018), Hellmann (2021) e Silva (2017) refletem um movimento crescente de integração das tecnologias no ensino da Matemática. O uso de softwares educativos, como Geogebra e SuperLogo 3.0, contribui para uma aprendizagem mais visual e interativa, proporcionando aos alunos uma compreensão mais aprofundada de conceitos geométricos e promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Além disso, essas ferramentas também possibilitam que os docentes adaptem seu ensino às diferentes realidades educacionais, tornando-o mais significativo e eficaz. O impacto dessas tecnologias vai além do ensino, ao também beneficiar o desenvolvimento profissional dos professores, que, ao se apropriarem dessas ferramentas, têm a oportunidade de explorar novas metodologias de ensino, tornando o aprendizado de Matemática mais envolvente e acessível a todos os alunos.

Quadro 5 - Semelhança e diferença entre conceito

Quanto ao conceito / referencial teórico	
Semelhança	Matos (2018); Souza (2021) e Neitzel (2023) consideram os Teoremas de Pappus – Guldin como principal referencial teórico.
Diferença	Por outro lado, estes outros autores consideram outros referenciais, a saber: Madeira (2014) Volume de sólidos de revolução; Pinheiro (2022) Teoria das Situações Didáticas; Araujo (2015) Cálculo no Ensino médio; Araújo (2017) Softwares Educacionais, Modelagem Matemática e Método da Aprendizagem Cooperativa; Nadalon (2017) conceitos de sólidos de revolução; Hellmann (2021) Ensino de Geometria; Silva (2017) Sólidos de revolução
Quanto ao objeto	

Semelhança	Neitzel (2023), Nadalon (2018), Araujo (2015), Araújo (2017), Hellmann (2021) e Silva (2017) têm o Software de Geometria Dinâmica em comum. Assim como Matos (2018) e Souza (2021) com Pappus Guldin; também Pinheiro (2022) e Neitzel (2023) com a sequência didática.
Diferença	Madeira (2014) se distância do restante em todos os aspectos.
Quanto ao Córpus	
Semelhança	Araujo (2015), Araújo (2017) Nadalon (2018), Hellmann (2021) e Silva (2017) têm como principal estrutura os Modelos Simulados: Resultados de simulações computacionais.
Diferença	Matos (2018) e Souza (2021) usam Métodos e Teorias. Madeiras (2015) Bibliográfica e Teórica. Neitzel (2023):Dados Empíricos. Pinheiro (2022) Materiais de Ensino.
Quanto a Metodologia / procedimentos	
Semelhança	Pinheiro (2022), Neitzel (2023), Araujo (2015) e Nadalon (2018) têm em comum a pesquisa qualitativa e experimental.
Diferença	Madeira (2015), Matos (2018), Hellmann (2021) e Silva (2017), por outro lado, usam o método dedutivo.

Fonte: Autor (2024)

Pode-se constatar que, o quadro apresentado possibilita uma análise aprofundada de como diferentes pesquisadores abordam o ensino de corpos redondos, destacando variações significativas nas referências teóricas, objetos de estudo, tipos de corpus e metodologias adotadas. Essas diferenças refletem a diversidade de perspectivas no campo da pesquisa acadêmica, revelando a complexidade do tema e a pluralidade de estratégias pedagógicas para o ensino da Matemática.

Observa-se que, apesar das variações nas abordagens, existe uma convergência entre os pesquisadores quanto à importância de métodos inovadores para o ensino de corpos redondos. A ênfase está no uso de recursos como softwares educativos (como o Geogebra), materiais manipuláveis e modelos tridimensionais. Esses recursos têm se mostrado essenciais para facilitar a compreensão dos alunos, proporcionando uma aprendizagem mais concreta e significativa. A visualização dos sólidos de revolução e a aplicação prática dos conceitos matemáticos em contextos do cotidiano permitem um maior engajamento dos estudantes, contribuindo para o aprofundamento do conhecimento.

Outro ponto recorrente nos estudos analisados é a preocupação com a organização do ensino e a aplicação de metodologias que envolvem sequências didáticas estruturadas. Autores como Neitzel (2023), Pinheiro (2022) e Souza (2021) propõem sequências que abrangem desde a introdução conceitual até a aplicação

prática dos conteúdos em problemas contextualizados. Tais metodologias não apenas favorecem a compreensão teórica dos conceitos, mas também contribuem para o desenvolvimento das habilidades cognitivas dos alunos, promovendo um ensino mais eficaz e integrado. Esse ponto está em sintonia com o objetivo geral deste trabalho, desenvolver uma sequência didática voltada para o ensino de corpos redondos com o auxílio do software Geogebra como ferramenta pedagógica.

Nesse contexto, destaca-se a relevância de adaptar os conteúdos ao perfil dos alunos e às realidades das escolas. Matos (2018) enfatiza a necessidade de uma linguagem acessível e de métodos de ensino que considerem as dificuldades específicas dos estudantes do Ensino médio, tornando os conceitos de corpos redondos mais acessíveis e atrativos. A adaptação metodológica é fundamental para promover a equidade no processo de aprendizagem, garantindo que todos os alunos, independentemente de suas dificuldades, possam compreender e aplicar os conceitos de forma eficaz.

Portanto, a análise das pesquisas sugere que, para um ensino de Matemática mais eficaz, é crucial integrar recursos tecnológicos inovadores, sequências didáticas bem estruturadas e uma abordagem adaptada às necessidades dos alunos. Isso contribui para um aprendizado mais significativo, contextualizado e equitativo, potencializando a compreensão dos conceitos matemáticos e promovendo um ensino mais inclusivo e eficiente.

3.2 BASE TEÓRICA

3.2.1 A abordagem instrumental de Rabardel

A abordagem instrumental, desenvolvida por Pierre Rabardel (1995) em sua obra *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*, tem grande relevância na compreensão das relações entre o ser humano e as tecnologias, sendo amplamente reconhecida e aplicada no campo educacional. A proposta de Rabardel baseia-se na análise das situações em que a atividade humana se confronta com objetos utilizados como meios para a realização de ações, ou seja, os instrumentos, entendidos como meios para a ação do sujeito (Idem, 1995, p. 3).

Na visão de Rabardel (1995), a abordagem instrumental é aplicada a diversos campos sociais, como a educação, e se relaciona com questões derivadas de áreas científicas como psicologia, didática e ergonomia. De acordo com Henriques (2021), essa abordagem trata da aprendizagem da aplicação de ferramentas tecnológicas, como o software Geogebra, ou qualquer outro recurso que seja utilizado como instrumento no contexto educacional, especialmente na aprendizagem de conteúdos e objetos de saber.

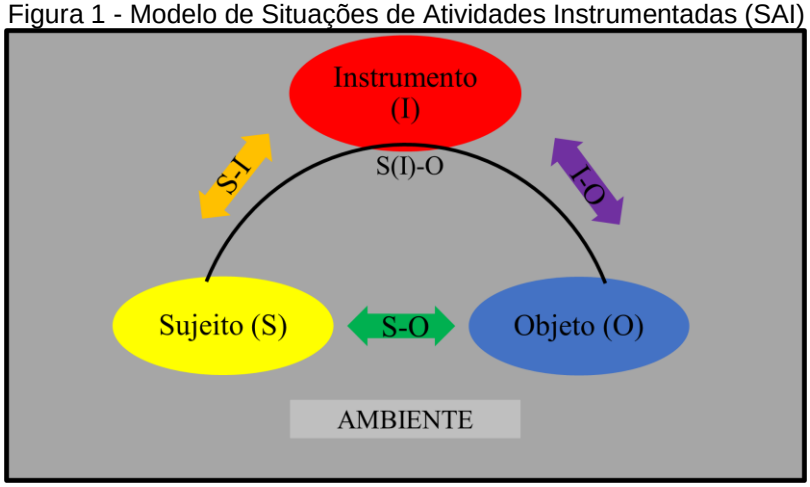
Rabardel (1995) faz uma distinção importante entre os conceitos de "ferramenta" (ou artefato) e "instrumento". Para o autor, o artefato, seja material ou não, é um mediador utilizado na prática de um sujeito, e não deve ser entendido como um simples objeto operacional ou meio individual. Ao contrário, os artefatos são portadores de um significado social incorporado, refletindo práticas e divisões de trabalho dentro de um contexto social específico (Valletta, 2020). No contexto deste trabalho, por exemplo, os artefatos tecnológicos referem-se aos dispositivos móveis ou computadores utilizados por professores e alunos nas atividades da sequência didática.

Em relação ao instrumento, Rabardel (1995) descreve-o como o produto de uma escolha do sujeito, que associa um artefato, ou um subconjunto deste, à tarefa ou atividade de sua ação. O autor ressalta que cada artefato foi projetado para produzir uma classe de efeitos, e sua implementação nas condições fornecidas pelos projetistas permite a realização desses efeitos (Idem, 1995, p. 49). O instrumento, portanto, é uma entidade composta por dois elementos: o artefato e os esquemas, sendo resultado de um processo de transformação que Rabardel denomina "Gênese Instrumental" (Oliveira, 2014).

Nesse contexto, Rabardel (1995) propõe um modelo triádico que envolve três polos: sujeito, instrumento (como o software Geogebra) e objeto (como o estudo de corpos redondos). Esse modelo permite uma análise das relações e interações entre os diferentes polos, revelando a complexidade e multiplicidade das interações nas atividades instrumentais. De acordo com Oliveira (2014, p. 5), o objetivo principal desse modelo é evidenciar as diversas interações presentes nas atividades instrumentais e delinear as relações entre o sujeito e o objeto sobre o qual ele atua, destacando a importância dessas relações na construção do conhecimento.

Assim, Rabardel (1995) denomina esse modelo de Situações de Atividades Instrumentadas (SAI) — figura 1, como podemos observar abaixo.

Figura 1 - Modelo de Situações de Atividades Instrumentadas (SAI)



Fonte: Rabardel (1995, p.53)

Conforme indicado por Abar e Alencar (2013), o modelo de Rabardel (1995) apresenta um conjunto de relações que refletem a interação entre o sujeito, o objeto e o instrumento, destacando-se as seguintes interações: Sujeito-Instrumento [S-I], Instrumento-Objeto [I-O], Sujeito-Objeto [S-O] e Sujeito-Objeto mediado pelo instrumento [S(I)-O]. Essas relações se desenvolvem dentro de um ambiente que inclui todas as condições contextuais que influenciam a atividade do sujeito.

No caso específico da relação [S(I)-O], que destaca a posição intermediária do instrumento, o autor enfatiza que a principal propriedade do instrumento é sua capacidade de ser ajustado tanto ao sujeito quanto ao objeto. Esse ajuste ocorre por meio de adaptações que envolvem aspectos materiais, cognitivos e semióticos do instrumento, e que variam conforme o tipo de atividade em que ele será empregado.

O autor identifica duas principais orientações de mediação no uso de instrumentos:

1. Mediação Epistemológica: Essa mediação está relacionada à capacidade do instrumento de facilitar a compreensão e a exploração do objeto. Por meio de suas características materiais e semióticas, o instrumento contribui para ampliar as possibilidades de conhecimento e análise do objeto em questão. No contexto educacional, isso pode ser exemplificado pelo uso de softwares como o Geogebra, que permite aos alunos visualizarem propriedades matemáticas de forma interativa e dinâmica, promovendo um aprendizado mais significativo.

2. Mediação Pragmática: A mediação pragmática refere-se ao suporte que o instrumento oferece ao sujeito para realizar sua atividade de maneira mais eficiente. Nesse caso, o instrumento atua como um facilitador da interação do sujeito com o objeto, reduzindo barreiras operacionais e otimizando o processo de ação. Essa

mediação está relacionada ao ajuste do instrumento às capacidades e necessidades do sujeito, bem como às exigências específicas da tarefa.

Essas orientações de mediação evidenciam a importância do instrumento como um elemento ativo no processo de ensino e aprendizagem, desempenhando um papel fundamental na interação entre o sujeito e o objeto. O modelo de Rabardel, assim, contribui para uma compreensão mais aprofundada das dinâmicas instrumentais em contextos educacionais e destaca a relevância de tecnologias como ferramentas pedagógicas no ensino contemporâneo.

Portanto o autor corrobora que:

> - No sentido, objeto em direção ao sujeito, uma mediação que qualificaremos como mediação epistêmica onde o instrumento é um meio que permite o conhecimento do objeto;
> - No sentido do sujeito para o objeto, uma mediação pragmática onde o instrumento é o meio de uma ação transformadora (em sentido amplo incluindo controle e regulação) dirigida ao objeto.
> Mas quando essa mediação faz parte de uma atividade real, as dimensões epistêmicas e pragmáticas da mediação estão em constante interação dentro dessa atividade. As ações são obviamente de natureza muito diversa:
> - Transformação de um objeto material com uma ferramenta manual: instrumento material;
> - Tomada de decisão cognitiva, por exemplo em uma situação de gerenciamento de ambiente dinâmico: ferramenta cognitiva;
> - Gestão da própria atividade: instrumento psicológico;
> - Interação semiótica com um objeto semiótico ou outro: ferramenta semiótica (Idem, 1995, p.72-73).

Rabardel (1995) define o conceito de *esquema* no contexto da Gênese Instrumental, com destaque para o Esquema de Utilização (EU). Segundo o autor, o EU está vinculado às tarefas associadas ao uso de artefatos. Abar e Alencar (2013) e Henriques (2021) complementam que os Esquemas de Uso (EUs) referem-se às tarefas secundárias, relacionadas à gestão das propriedades, estrutura e características do artefato, incluindo sua funcionalidade e manipulação. Essa etapa ocorre no primeiro contato do sujeito com o artefato, momento em que as relações entre ação e resultado ainda estão sendo estabelecidas (Rabardel, 1995).

Por exemplo, ao acessar o software Geogebra, o usuário explora ferramentas básicas, como pontos, retas e polígonos, além de comandos como arrastar e inserir código na área de álgebra. Esse contato inicial possibilita ao sujeito compreender o potencial do artefato, configurando a fase de instrumentalização, como apontado por Bittar (2015) e Valletta (2020).

Rabardel (1995) também introduz o conceito de Esquemas de Ação Instrumentada (EAIs), que se referem às transformações nos objetos da atividade,

ligadas às tarefas principais em que o artefato é utilizado como meio de execução. Segundo Valletta (2020), nesse estágio, os artefatos são integrados à ação, caracterizando o processo de instrumentação.

Por exemplo, no uso do Geogebra, construir um sólido de revolução, como um cilindro reto com raio 5, ou animar uma esfera, demonstra como o artefato é empregado para explorar conceitos geométricos. O sujeito utiliza as ferramentas do software para realizar essas tarefas, desenvolvendo os EAIs e promovendo a integração entre o artefato e a atividade.

Os esquemas de uso e de ação instrumentada são interdependentes. De acordo com Bittar (2015), os Esquemas de Uso (Eus) fomentam o desenvolvimento de novos Esquemas de Ação Instrumentada (EAIs) e, reciprocamente, os EAIs impulsionam a criação de Eus, configurando um ciclo contínuo de desenvolvimento instrumental. Rabardel (1995) amplia essa perspectiva ao incluir as ações instrumentadas em contextos coletivos, introduzindo o conceito de Esquemas de Atividades Coletivas Instrumentadas (EACIs).

Nesse sentido, o Esquema de Utilização (EU) pode ser entendido como um conjunto interdependente de Eus, EAIs e EACIs, que possibilita a generalização e a evolução no uso de artefatos. Quando incorporado às práticas educacionais no ensino de corpos redondos, o software Geogebra transforma-se em um instrumento pedagógico que favorece a organização e a modificação dos esquemas de utilização, contribuindo significativamente para o desenvolvimento conceitual dos alunos (Valletta, 2020).

No contexto do ensino médio, o Geogebra exemplifica como a tecnologia pode ser integrada ao processo de ensino-aprendizagem, oferecendo uma abordagem dinâmica, interativa e visualmente rica. Dentro do modelo triádico de Rabardel (sujeito, instrumento e objeto), o software conecta de maneira efetiva professores, alunos e conceitos geométricos, promovendo um ambiente de aprendizado mais engajante e eficiente. A rede de interações estabelecida entre os alunos, os artefatos tecnológicos e o objeto de estudo evidenciam a importância das ferramentas tecnológicas para o aprimoramento da aprendizagem. Assim, o Geogebra não apenas facilita a execução de tarefas específicas, mas também enriquece a compreensão e a visualização de conceitos matemáticos. Dessa forma, a utilização desse recurso tecnológico fortalece o desenvolvimento de competências educacionais no ensino da geometria.

3.2.2 Semiótica

Neste momento, abordaremos a teoria que fundamentará as análises de nossa pesquisa: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) desenvolvida pelo francês Raymond Duval (1993). Este autor, filósofo, psicólogo e Professor Emérito da Universidade do Litoral *Côte d'Opale*, na França, direciona suas pesquisas para a área da Educação Matemática, com ênfase na Didática da Matemática. Desde a década de 1970, Duval tem realizado significativas contribuições, especialmente na interseção entre Psicologia Cognitiva e a aprendizagem matemática.

Uma de suas principais contribuições diz respeito às questões cognitivas envolvidas na conversão entre registros, como a linguagem natural e as notações simbólicas. Do ponto de vista linguístico, observa-se que compreender um problema expresso em texto matemático é uma tarefa desafiadora para muitos alunos. Essa dificuldade engloba a interpretação do enunciado e a identificação de símbolos e signos (Langwinski, 2020). A complexidade dessa tarefa se acentua quando a linguagem utilizada no texto matemático difere da língua materna do aluno.

Duval (1993) destaca que, os objetos matemáticos, como números, funções, vetores, traçados e figuras, são representados por notações, símbolos ou escritas. Contudo, o autor enfatiza a distinção crucial entre o objeto matemático e sua representação, considerando essa diferenciação estratégica para o ensino e a aprendizagem da matemática. Ele argumenta que o acesso ao conhecimento matemático ocorre exclusivamente por meio de representações, cuja operacionalização depende dos sistemas de representação semiótica empregados.

Nesse contexto, Duval (1995) introduz o que denomina paradoxo cognitivo do pensamento matemático, abordando dois conceitos principais: noésis e semiose. A noésis refere-se às representações mentais ou apreensões conceituais, que abrangem imagens e associações formadas sobre um objeto ou situação. Já a semiose diz respeito às representações semióticas, produtos originados pelo uso de signos em sistemas de representação específicos, regidos por convenções próprias.

A semiose envolve a mobilização de múltiplos registros para produzir, externar ou transformar representações de um mesmo objeto matemático, sendo essencial para o funcionamento cognitivo. Essa multiplicidade de registros, como gráficos, tabelas e expressões algébricas, é indispensável tanto para a comunicação quanto para a exteriorização das representações mentais dos conceitos matemáticos.

Duval (2010) destaca a relação codependente entre noésis e semiose, sublinhando a importância das representações semióticas na atividade cognitiva matemática. A semiótica, nesse sentido, permite descrever e analisar os tipos de atividades matemáticas, contribuindo para o entendimento e a generalização dos conceitos. Assim, compreender a relação entre registros semióticos e pensamento matemático é essencial para a análise e o aprimoramento das práticas educacionais na área.

3.2.3 Registros de representação semiótica

Segundo Duval (2010, p. 130), "um registro é um sistema semiótico"; contudo, "para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose" (Duval, 2012, p. 271): formação, tratamento e conversão.

Duval (1995) explora em seus estudos sobre os registros de representação semiótica uma abordagem cognitiva que apresenta o funcionamento mental necessário para que os alunos compreendam, realizem, controlem e mobilizem a diversidade de procedimentos matemáticos propostos em situações de ensino. Essa análise destaca como os registros de representação são fundamentais no processo de aprendizagem em matemática.

Além disso, Duval (2003, p. 33) identificou, nas atividades matemáticas, que "os estudantes apresentam muitas dificuldades em diferenciar o objeto matemático da representação que o torna acessível". Isso reforça a ideia de que o conhecimento matemático só pode ser mobilizado por meio de uma ou várias representações, sendo estas o elo entre o objeto matemático e o pensamento cognitivo do aluno.

É importante salientar que todos os sistemas semióticos têm como função transmitir informações. De fato, um sistema semiótico é constituído por códigos compostos de signos que possuem uma referência discursiva intencional de designação (Pinheiro, 2015). No entanto, para Duval (2010), essa função comunicativa não é suficiente para que o sistema seja efetivamente útil no desenvolvimento do pensamento matemático. Por exemplo, em uma aula discursiva, embora a objetivação dos conceitos matemáticos seja interessante para quem ensina, ela pode não ser significativa ou compreensível para quem aprende.

Nesse sentido, Duval argumenta que, para que um sistema semiótico seja eficaz para o aluno, ele deve cumprir mais de uma função além da comunicação. A função essencial no contexto matemático é a de possibilitar a transformação de uma representação semiótica inicial em outra representação semiótica. Essa transformação é indispensável ao pensamento matemático e ocorre por meio do uso dos registros de representação semiótica. Essa dinâmica, segundo Duval (2011), enfrenta dois problemas principais: os obstáculos epistemológicos do objeto e o funcionamento do pensamento. O primeiro diz respeito às dificuldades inerentes à natureza dos objetos matemáticos, que muitas vezes exigem representações específicas para serem compreendidos. O segundo refere-se aos processos cognitivos necessários para operar e converter representações dentro de diferentes registros semióticos.

Em relação aos registros, pode-se reforçar que sua utilização no ensino da matemática é fundamental para superar as barreiras cognitivas e epistemológicas, promovendo uma aprendizagem mais significativa e favorecendo o desenvolvimento das competências matemáticas dos alunos. Segundo Duval:

> É, evidentemente, um sistema semiótico, mas um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza essencialmente pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar (2011, p. 70).

Em outras palavras, o autor destaca, do ponto de vista cognitivo, que os códigos não permitem possibilidades de transformação dos conteúdos das representações produzidas nas atividades matemáticas, ao contrário dos registros, que permitem.

Ainda sobre o desenvolvimento do pensamento matemático e seus obstáculos, Duval (1993; 2009) classifica três fenômenos: o primeiro é a diversificação dos registros de representação semiótica (oposição feita entre linguagem e imagem); o segundo, a distinção entre representante e representado (a dificuldade de diferenciar representante de representado); e, por último, o autor aborda a coordenação entre os diferentes registros (o representante de um registro pode ser considerado o representante de outro registro).

As três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose. Como mencionado anteriormente, retomando as palavras de Duval (2009), o autor afirma que existem três atividades cognitivas de representação inerentes à semiose. A primeira ele chama de formação:

> Ela é a formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado em forma de enunciado de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula etc. (Duval, 1993, p. 41).

Em outras palavras, Duval (2012) destaca que a formação de representações implica a seleção e a codificação de relações e dados no conteúdo a ser representado, seguindo regras próprias do sistema utilizado. Essa formação é feita em função de unidades e respeitando as gramáticas de diferentes sistemas, como as regras de uma língua natural, as normas de um sistema formal e as restrições de construção de figuras.

Para o autor, a função das regras é garantir as condições necessárias para identificar e reconhecer a representação, permitindo, assim, que ela seja utilizada para tratamentos subsequentes. Ou seja, a formação de uma representação não se limita apenas à sua criação, mas também ao seu reconhecimento. Nesse contexto, a formação de uma representação pode ser comparada a uma tarefa de descrição, onde o objetivo não é apenas criar, mas também compreender e identificar as características essenciais do objeto ou conceito representado.

Um exemplo dessa abordagem poderia ser a apresentação dos diferentes tipos de corpos redondos aos alunos. Nesse caso, seria interessante mostrar modelos visuais e convidar os estudantes a discutir as principais características desses corpos, como suas bases, eixos ortogonais e propriedades específicas. Para complementar a atividade, os alunos poderiam ser divididos em pequenos grupos, sendo solicitados a representar um corpo redondo de duas maneiras: visualmente, desenhando-o em papel e depois construindo-o no software Geogebra; e verbalmente, descrevendo suas características oralmente e por escrito. Esse exercício permitiria que os estudantes formassem representações tanto visuais quanto verbais, promovendo um entendimento mais profundo dos conceitos geométricos envolvidos.

A segunda atividade cognitiva identificada por Duval (2012) é o tratamento. Essa atividade ocorre quando se realiza a primeira transformação de uma representação dentro do mesmo registro semiótico em que ela foi originalmente desenvolvida. Um exemplo claro de tratamento nas atividades matemáticas é o cálculo, onde se aplicam regras algébricas para manipular expressões numéricas. No contexto da geometria espacial, por exemplo, o tratamento pode envolver a reconfiguração de uma figura, como a aplicação de regras de semelhança, que são

essenciais para manipular as representações geométricas. Assim, os tratamentos podem incluir diversas operações, como ampliação ou redução de escala, rotação de figuras em diferentes direções, decomposição de objetos em partes constituintes (como planificações ou calotas) e até mesmo a composição de diferentes corpos para formar estruturas mais complexas.

A última atividade cognitiva descrita por Duval (2009) é a conversão de uma representação. A conversão ocorre quando há uma transformação de um objeto ou situação em outro registro semiótico, mantendo ou modificando parcialmente o conteúdo da representação original. A conversão é distinta do tratamento, pois envolve a utilização de mais de um registro semiótico, o que implica uma transformação externa ao registro inicial, enquanto o tratamento ocorre dentro de um único registro e é mais interno. Em outras palavras, a conversão envolve a mobilização de diferentes formas de representação, como o verbal e o não verbal, e não se limita a transformar o conteúdo dentro de um único sistema semiótico.

Exemplos de conversões incluem a transformação de uma descrição verbal das características de um corpo redondo em um desenho ilustrativo, a conversão de um modelo físico do corpo redondo em uma representação matemática, analítica ou gráfica, ou ainda a mudança de uma representação bidimensional (como um desenho ou imagem) para uma tridimensional (como um modelo físico ou uma simulação em software). Além disso, pode-se converter uma representação visual de um corpo redondo em uma representação textual ou simbólica, como os axiomas e definições de Euclides, destacando diferentes tipos de conversões: verbal, não verbal, de ilustração, de tradução e de descrição.

Duval (1993) reforça que a conversão não deve ser confundida com os termos codificação e interpretação, já que a conversão envolve a transformação e mobilização de representações entre diferentes registros semióticos, enquanto a codificação e a interpretação se referem ao processo de atribuição de significado a essas representações dentro de um único sistema semiótico. Dessa forma, a conversão desempenha um papel essencial na aprendizagem matemática, permitindo que os alunos transitem entre diferentes formas de representação para aprofundar sua compreensão e resolver problemas de maneira mais eficiente, pois :

> Embora a atividade cognitiva de conversão de uma representação possa, muitas vezes, parecer estreitamente ligada a uma interpretação ou a um código, ela lhe é irredutível, porque, por um lado, ela não se funda sobre alguma analogia, como no caso da interpretação e, por outro lado, a

> conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação (Duval, 2012, p. 273).

A partir de Duval (2009), a conversão dos registros de representações semióticas é identificada como uma atividade cognitiva particularmente desafiadora, sendo considerada uma das mais complexas para os alunos. Isso ocorre porque a mudança entre registros não segue um conjunto de regras fixas ou predeterminadas, como acontece no tratamento das representações. Em vez disso, essa conversão envolve uma flexibilidade cognitiva, que exige que o aluno consiga manipular e transitar entre diferentes formas de representação do mesmo objeto matemático. Essa transição, portanto, é um processo que não está necessariamente relacionado à complexidade do campo conceitual em si, mas à natureza da atividade cognitiva exigida para realizar a conversão de maneira eficaz.

Ou seja, o desafio não é necessariamente a dificuldade intrínseca do conteúdo, mas sim a habilidade do aluno em lidar com a multiplicidade de registros semióticos e suas interações. Essa dificuldade está ligada ao fato de que a conversão exige um entendimento profundo do objeto matemático e das diferentes formas de representá-lo, além de uma compreensão das inter-relações entre esses registros. Dessa forma, os obstáculos que surgem durante esse processo são de natureza cognitiva e epistemológica, e não exclusivamente complexidade conceitual. Portanto, a conversão entre os registros de representação semiótica constitui um aspecto crucial da aprendizagem matemática, pois permite ao aluno expandir sua compreensão e manipulação dos objetos matemáticos de maneira mais flexível e dinâmica, embora envolva um processo cognitivo que requer desenvolvimento e prática.

Coordenação de registros de representação inerente a noesis. Duval (1993) argumenta que a existência de múltiplos registros de representação semiótica não só facilita a compreensão matemática, mas também contribui para a eficiência no processo cognitivo. A possibilidade de transitar entre esses registros oferece aos alunos um leque mais amplo de opções para representar e manipular objetos matemáticos, o que pode tornar o tratamento das informações mais econômico e eficaz. Ao possuir diferentes registros, os alunos têm maior flexibilidade para escolher a forma mais adequada para lidar com um determinado problema ou conceito.

De acordo com o autor supracitado a utilização de uma variedade de registros semióticos no contexto matemático oferece vantagens significativas, pois permite uma economia de tratamento nas atividades matemáticas, superando as limitações da

linguagem natural. Por exemplo, as relações algébricas podem ser compreendidas e manipuladas de forma mais rápida e eficiente através de fórmulas literais, em comparação com descrições longas e verbais. Isso se traduz em um processo mais ágil e menos complexo, onde a escolha do registro apropriado facilita a comunicação e o entendimento dos conceitos.

Duval também enfatiza a complementaridade entre os diferentes registros. Ele argumenta que "toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa" (idem, 1993, p. 49), ou seja, cada registro possui suas próprias limitações e potencialidades. A seleção de um registro específico depende das características do objeto ou conceito que se deseja representar. Por exemplo, enquanto uma linguagem discursiva pode ser menos eficiente para representar relações geométricas, uma figura ou um gráfico pode comunicar essas relações de forma mais clara e precisa. Da mesma forma, uma equação algébrica proporciona uma visão mais concisa e exata de certos conceitos matemáticos, quando comparada a uma descrição verbal.

Ademais, Duval (1993) argumenta que a conceitualização é o processo de coordenação entre esses diversos registros de representação semiótica. A escolha adequada do registro é crucial para garantir uma compreensão sólida do conteúdo matemático. Quando os registros são mal escolhidos ou insuficientemente coordenados, isso pode levar a dificuldades na conversão entre as representações e, consequentemente, na compreensão do conceito em questão.

Assim, uma coordenação eficaz entre os registros semióticos é essencial para que o aluno consiga mobilizar suas representações mentais de forma coerente e bem-sucedida. A habilidade de alternar entre diferentes registros, ao mesmo tempo em que se mantém a integridade e o significado do conceito, é um fator fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático e a superação das barreiras cognitivas.

Nesse contexto, Duval reforça que:

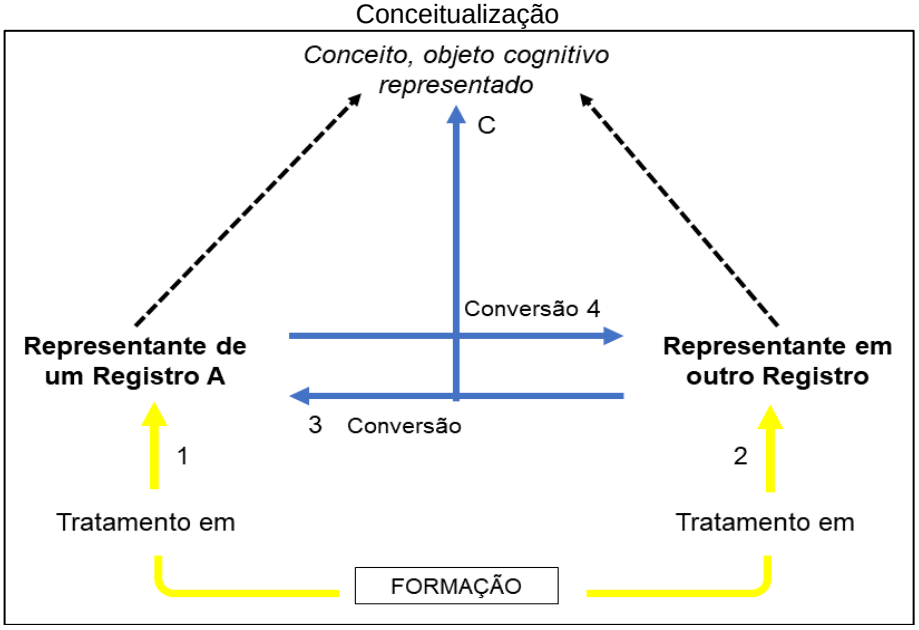
> A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Esta hipótese apela para outra descrição da estrutura de representações semióticas e de seu funcionamento: hipótese fundamental de aprendizagem (1993, p.51).

De acordo com o esquema apresentado (figura 2), é possível visualizar como se dá a estrutura da coordenação simples entre dois registros de representação semiótica. As setas amarelas, 1 e 2, correspondem às transformações internas, ou

seja, aos tratamentos realizados dentro de um único registro. Por outro lado, as setas azuis, 3 e 4, representam as transformações externas, que correspondem à mudança de registro por meio de conversões.

Assim, a seta C ilustra a compreensão integral de uma representação, que, nesse contexto, pressupõe a coordenação entre dois ou mais registros. Além disso, o autor estabelece uma distinção entre o *representante* e o *representado* (indicados pelas setas pontilhadas à esquerda e à direita), destacando que um representante de um registro pode, também, servir como representante de outro registro.

Figura 2 - Hipótese Fundamental de Aprendizagem: estrutura da representação em função de Conceitualização



Fonte: Duval (1993, p.51)

Portanto, conforme Duval o principal objetivo no ensino da matemática não deve se limitar à "automatização de certos tratamentos ou à compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, que são necessariamente mobilizados por esses tratamentos ou por essa compreensão" (1993, p. 54). Dessa forma, o aluno é capaz de conceituar ou aprender a noção de conteúdo do objeto matemático.

3.3 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018, p. 523), uma das competências específicas estabelecidas para o estudo de geometria é:

> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos em seus campos — Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística — para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir uma argumentação consistente.

Ou seja, basicamente o documento nos traz que o ensino de geometria tem que ter procedimentos que leve ao aluno desenvolver uma abordagem matemática para resolver problemas, analisar os resultados e comunicar as soluções de forma fundamentada e clara. Além disso, uma das habilidades da BNCC (EM13MAT309) destaca:

> Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais (idem, 2018, p. 529).

A aplicação dos conceitos de áreas e volumes de sólidos geométricos no contexto do ensino de Matemática visa a resolução de problemas práticos do cotidiano, como aqueles relacionados à construção, decoração e outras atividades diárias dos alunos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), essa habilidade pode ser desenvolvida ao longo de todo o Ensino médio, oferecendo uma abordagem contextualizada e aplicável para o aluno.

A BNCC destaca que, durante o processo de aprendizagem, os alunos devem ser capazes de mobilizar diversas habilidades. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam a necessidade de desenvolver competências como:

- Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos geométricos redondos, como esfera, cone, cilindro e outros, promovendo a compreensão das formas e suas características específicas;
- Exploração das planificações de figuras tridimensionais, o que contribui para a visualização espacial e a compreensão das formas em dois e três dimensões;
- Percepção de elementos geométricos presentes na natureza e nas criações artísticas, permitindo uma conexão entre a matemática e o mundo ao redor do

aluno, além de aproximá-lo da arte e da cultura;

- Representação das figuras geométricas, com ênfase na identificação de suas características por meio de processos de composição, decomposição, simetrias, ampliações e reduções, essenciais para o desenvolvimento de uma visão analítica e crítica das formas.

Por sua vez, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), na coleção *Conexões:* **Matemática e suas Tecnologias, Funções e Aplicações** da editora Moderna, sugere que o estudo de corpos redondos seja abordado no último bimestre do 2º ano do Ensino médio, após a introdução à Geometria Espacial e ao estudo de poliedros. Essa organização curricular tem como objetivo assegurar que os alunos possuam os conhecimentos prévios necessários sobre figuras planas e geometria espacial, facilitando a compreensão das propriedades e aplicações dos corpos geométricos redondos, como o cálculo de áreas e volumes, elementos essenciais para a resolução de problemas práticos da vida cotidiana.

3.3.1 Conceitos e definições matemáticos de corpos redondos.

Ao estudarmos sólidos geométricos e figuras espaciais, é fundamental compreender os conceitos básicos da geometria espacial, que lida com as propriedades e as relações entre figuras que ocupam um espaço tridimensional. O estudo dessas figuras é realizado por meio de fórmulas, teoremas e axiomas, que definem e estruturam as propriedades de cada objeto geométrico.

Para tanto, é necessário entender alguns conceitos primitivos e seus postulados, que são aceitos sem necessidade de demonstração, e teoremas, que são conclusões derivadas de postulados e que requerem provas formais., será necessário saber alguns conceitos básicos como postulados e teoremas. O seu conceito é primitivo. É aceito como verdade absoluta e que não precisa de demonstração. Ponto no espaço representa localização, geralmente com uma representação de letras maiúsculas (A, B, C, D...). Os pontos são infinitos e não possui dimensões mensuráveis.

Tendo em vista estes conceitos primitivos, veremos agora os primeiros postulados e alguns teoremas. Haja vista que, os postulados são axiomas, ou seja, não necessita de demonstrações, já os teoremas são conclusões sustentadas em

postulados e precisão ser demostrados.

Postulado 1: Retas e plano são formados por conjuntos de pontos.

Postulado 2: Existem infinitos pontos pertencente a uma reta, assim como infinitos pontos que não pertencem a ela.

Postulado 3: Existem infinitos pontos que pertencem a um plano, assim como infinitos pontos que não pertence a ele.

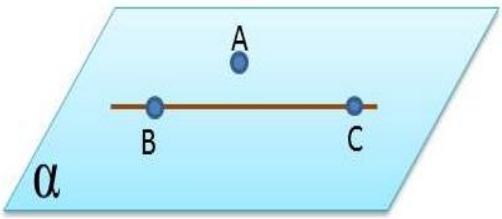
Postulado 4: uma única reta pode ser formada por dois pontos distintos.

Postulado 5: Três pontos não colineares determinam um único plano.

Considerando os postulando, determinaremos agora um primeiro teorema.

Teorema 1: uma reta e um ponto não pertencentes a ela determinaram o que chamamos de plano (figura 3). Sejam os pontos distintos A, B, e C com B e C pertencentes a uma reta s e o ponto A não pertencente a esta reta. Pelos postula 5, existe um único plano determinado por A, B, C. o postulado 6 faz com que cheguemos às seguintes conclusões que s está contida em α, pois B e C pertencem a s e a α. Podemos concluir que, α é o único plano que contêm a reta s e o ponto A.

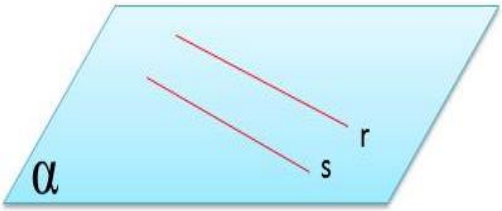
Figura 3 - Plano



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Retas paralelas (figura 4): duas retas qualquer r e s são paralelas se e somente se elas são coplanares e não possuem pontos em comum, representado por r//s.

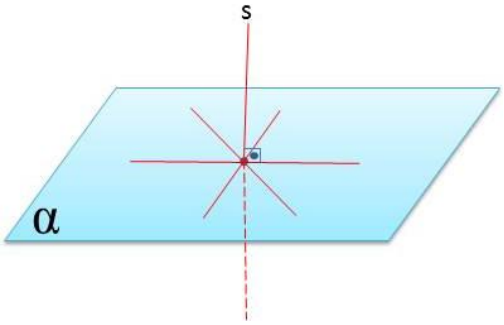
Figura 4 - Retas paralelas



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Reta perpendicular ao plano (figura 5): uma reta s é perpendicular se e somente se s é perpendicular a todas as retas concorrentes a ela contidas em α.

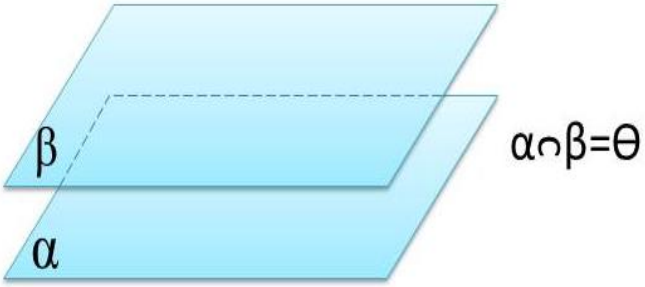
Figura 5 - Reta perpendicular ao plano



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Planos paralelos (figura 6): dois planos quaisquer α e β são paralelos se e somente se não possuem pontos em comum.

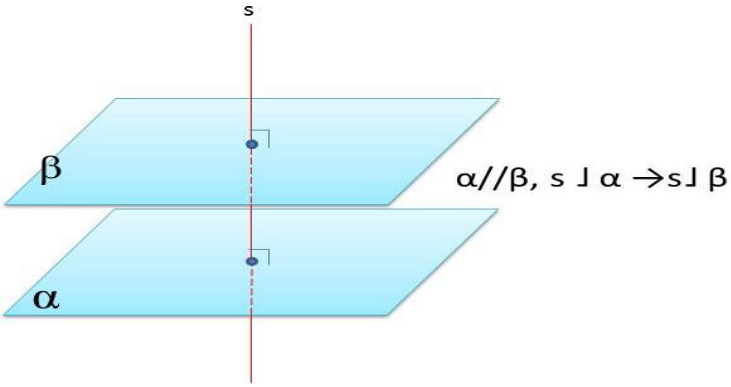
Figura 6 - Planos paralelos



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Na figura 7 observamos umas das propriedades do paralelismo entre dois planos diz que: se α e β são planos paralelos, toda reta s perpendicular a um deles será perpendicular ao outro.

Figura 7 - Reta perpendicular entre dois planos paralelos



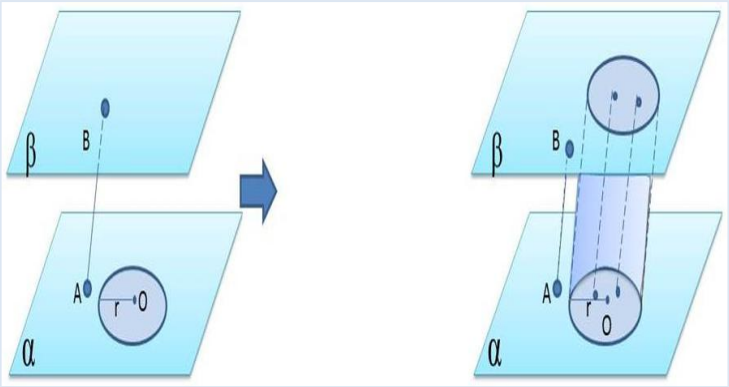
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Definição matemática de um cilindro. De acordo com a definição mais simples, o cilindro ou cilindro circular é um sólido geométrico alongado e de forma arredondada, caracterizado por duas bases circulares idênticas e paralelas, cujos centros estão alinhados ao longo de um eixo comum. Esse eixo, conhecido como eixo do cilindro, conecta os centros das bases e determina o comprimento do cilindro.

A superfície lateral do cilindro é formada por uma linha curva que conecta os

contornos das duas bases, mantendo uma distância constante do eixo. Ou, matematicamente falando, consideramos dois planos distintos e paralelos, α e β, um círculo de centro O e raio r, contido em α, e um segmento AB, com A pertencente em α e B pertencente em β. Denomina-se cilindro circular, ou simplesmente cilindro, o conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$ com uma extremidade o círculo de centro O em α, e outra extremidade em β.

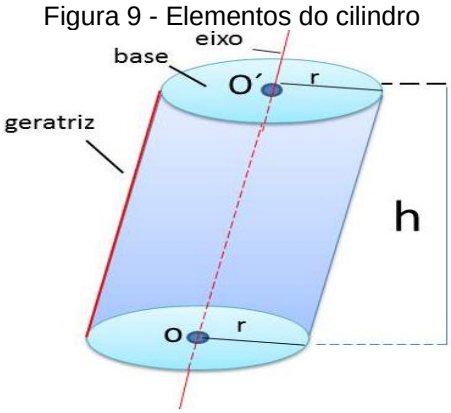
Figura 8 - Definição de Cilindro



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

O cilindro tem os seguintes elementos (figura 9):

Figura 9 - Elementos do cilindro



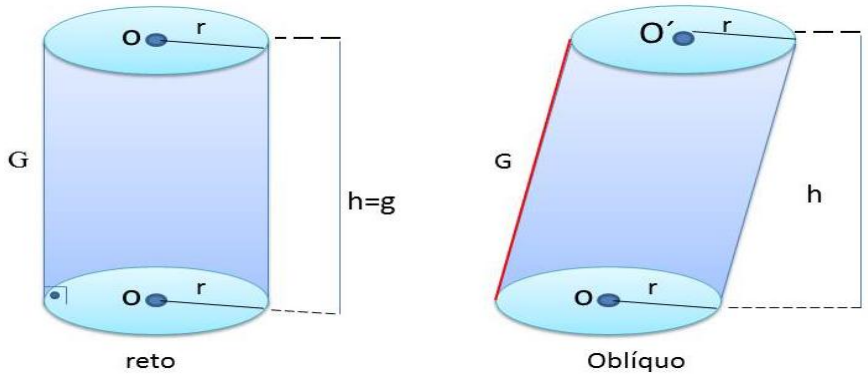
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

- Bases: como o cilindro e construído através de dois planos paralelos com círculos contidos em ambos, logo as bases do cilindro são círculos paralelos, um superior e outro superior.
- Geratrizes: são segmentos paralelos a $\overline{OO'}$ com extremidades nas circunferências das bases que corresponde com a altura.
- Eixo: é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- Altura (h): é a distância entre os planos das bases.

- Superfície lateral: é a reunião de todas as geratrizes. A área dessa superfície é chamada área lateral.
- Raio: é distância entre o centro da base do cilindro e a extremidade.

Na figura 10, o cilindro pode ser classificado como reto ou oblíquo. Isto vai depender da inclinação das geratrizes, pois se elas formarem um ângulo reto com as bases chamamos de reto, oblíquo quando a mesmo estiver com as bases.

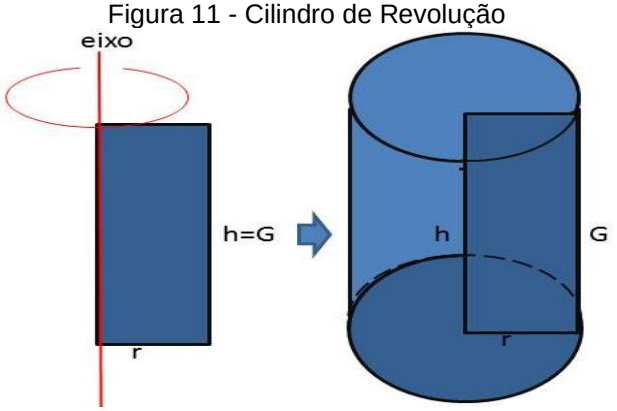
Figura 10 - Cilindro oblíquo



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Uma outra denominação para o cilindro reto é cilindro de revolução, que é uma forma geométrica gerada pela rotação de uma região retangular ao redor de um de seus lados, chamado de eixo de revolução, em um giro completo de 360°. A rotação da figura retangular cria a superfície lateral do cilindro, enquanto as duas bases circulares do cilindro são as projeções das extremidades da região retangular.

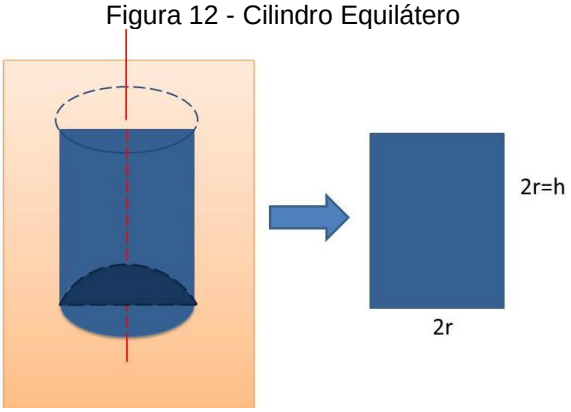
Figura 11 - Cilindro de Revolução



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Secção meridiana (figura 12) é a interseção do cilindro com um plano que contém a reta OO’ determinada pelos centros das bases. Quando seccionamos um cilindro reto regular resulta em um quadrado, isto é, 2r=h, então denominamos de cilindro equilátero.

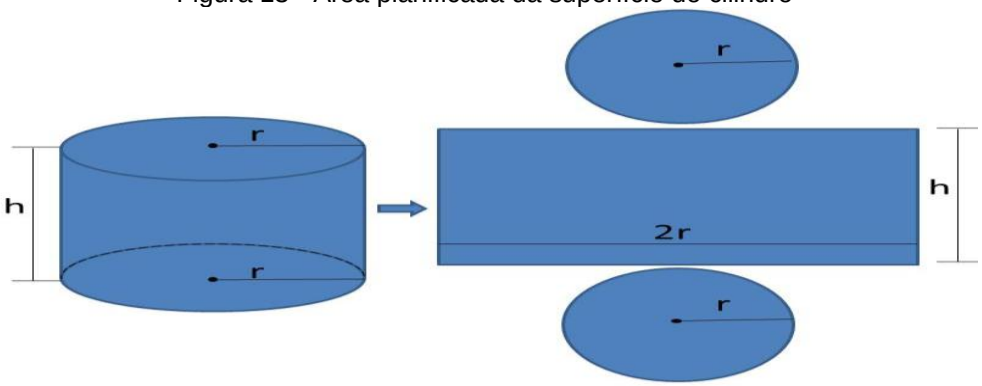
Figura 12 - Cilindro Equilátero



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Área total da superfície do cilindro reto. Área da superfície do cilindro (figura 13) é a soma da área lateral mais as bases.

Figura 13 - Área planificada da superfície do cilindro



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A superfície lateral de um cilindro reto ou cilindro de revolução é equivalente a um retângulo de dimensões 2πr (comprimento da circunferência da base) e h (altura do cilindro). Isso significa que a superfície lateral de um cilindro de revolução desenvolvida num plano (planificada, figura 11) é um retângulo de dimensões 2 πr e h. Portanto área lateral é

$$A_l = 2\pi rh$$

Área total (A_t) de um cilindro é a soma da área lateral (A_l) com as áreas das duas bases (B= πr^2); logo:

$$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$A_t = 2\pi r(h + r)$$

Volume do cilindro. Para calcular o volume do cilindro, podemos aplicar o princípio de Cavalieri, que se baseia no conceito de que, se dois sólidos possuem a mesma altura e as mesmas áreas das seções transversais em qualquer plano

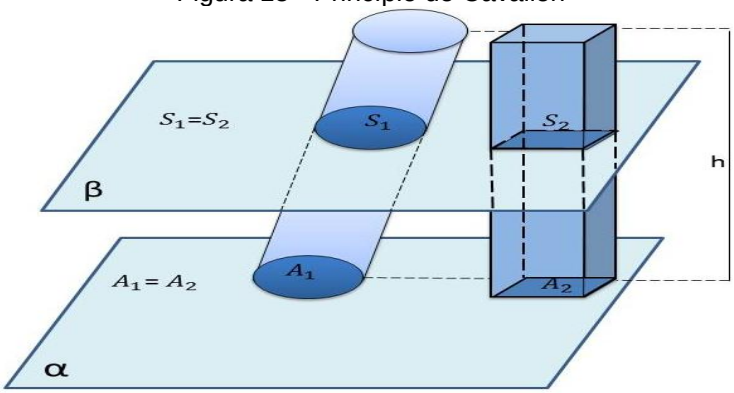
horizontal, então esses sólidos possuem o mesmo volume. Esse princípio é útil na comparação de volumes de sólidos com formas diferentes, mas com as mesmas propriedades geométricas essência.

Figura 14 - Princípio de Cavalieri

Fonte: Autor

Formalizando, considerando os sólidos $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$, figura 15, cuja altura h é a mesma, apoiados em um mesmo plano horizontal α, e um plano β, paralelos a α, que determina em $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ duas regiões planas de áreas $\boldsymbol{A_1}$e $\boldsymbol{A_2}$. Nesse caso, se s $\boldsymbol{A_1}$= $\boldsymbol{A_2}$ para qualquer plano β, temos que o volume de $\boldsymbol{S_1}$ é igual a $\boldsymbol{S_2}$, ou seja, $\boldsymbol{V_{s1}}$= $\boldsymbol{V_{s2}}$.

Figura 15 - Princípio de Cavalieri



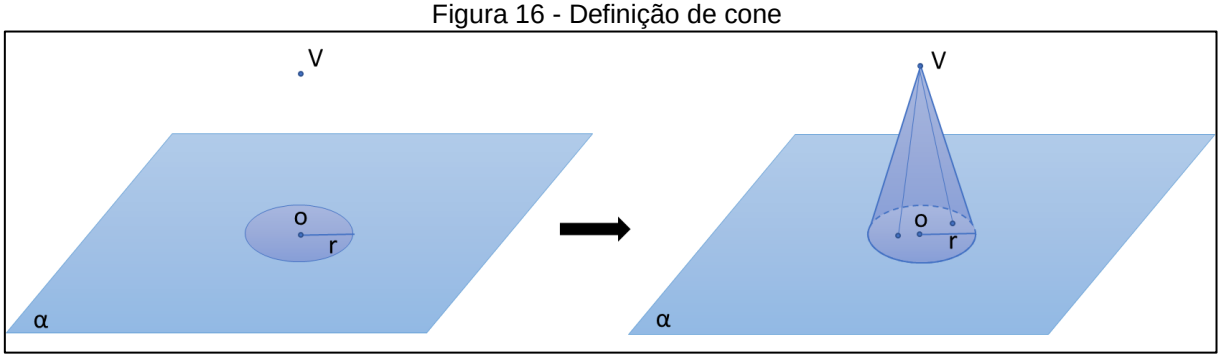
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o volume do cilindro e o do prisma são iguais. Como o volume do prisma é dado por $\boldsymbol{V_{p=}A_b.h}$, temos que o volume do cilindro é dado por:

$$\boldsymbol{V = A_b.h \Rightarrow V = \pi r^2 h}$$

Definição matemática do cone. Consideramos um círculo (região circular), figura 16, de centro O e raio r situado em um plano α e um ponto V fora de α. Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

Figura 16 - Definição de cone

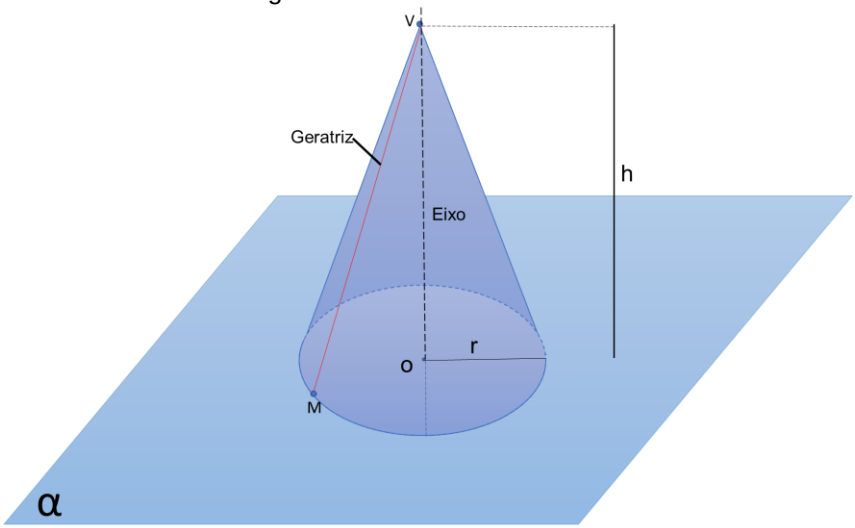


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Em um cone, de acordo com a figura 17, podemos destacar os seguintes elementos:

- A base é o círculo de raio r e centro O.
- O vértice é o ponto V.
- As geratrizes são os segmentos com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base. Nesse cone abaixo, $\overline{VM}$ é um exemplo de geratriz.
- O eixo é a reta $\overleftrightarrow{OV}$.
- A altura h é a distância entre os planos paralelos que contêm a base e o vértice V.
- A superfície lateral é a reunião de todas as geratrizes.

Figura 17 - Elementos do cone



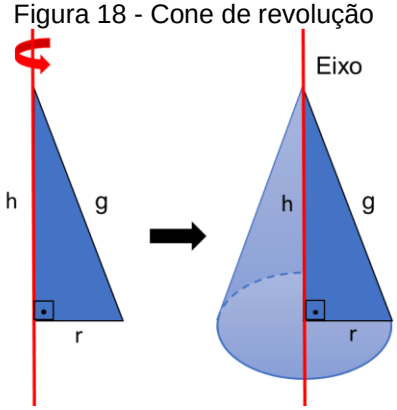
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Os cones podem ser classificados pela posição da reta $\overleftrightarrow{OV}$ em relação ao plano da base. Se a reta $\overleftrightarrow{OV}$ é obliqua ao plano da base, ou seja, quando o eixo de um cone é obliquo à base, classificamo-lo como cone obliquo. Já se a reta $\overleftrightarrow{OV}$ é perpendicular

ao plano da base, isto é, quando o eixo é perpendicular à base, classificamo-lo como cone reto.

Assim como o cilindro reto, o cone reto também é considerado um sólido de revolução, pois pode ser obtido ao rotacionarmos uma região triangular, cujo contorno é um triângulo retângulo, uma volta completa em torno do eixo (com um dos catetos contido no eixo). Dessa maneira, o cone reto também é denominado cone de revolução, figura 18.

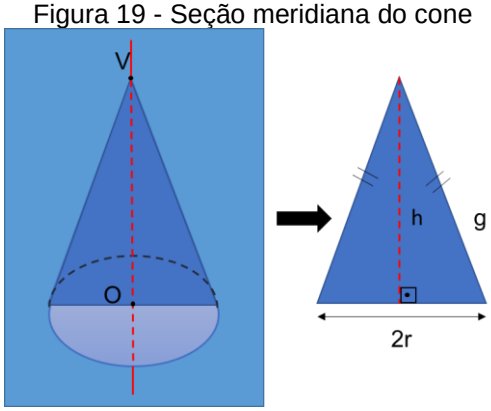
Figura 18 - Cone de revolução



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Assim como o cilindro, podemos obter no cone circular reto (ou cone de revolução) a secção meridiana, figura 19, onde a interseção do cone com um plano que contém seu eixo (reta $\overleftrightarrow{OV}$) é um triangulo isósceles.

Figura 19 - Seção meridiana do cone



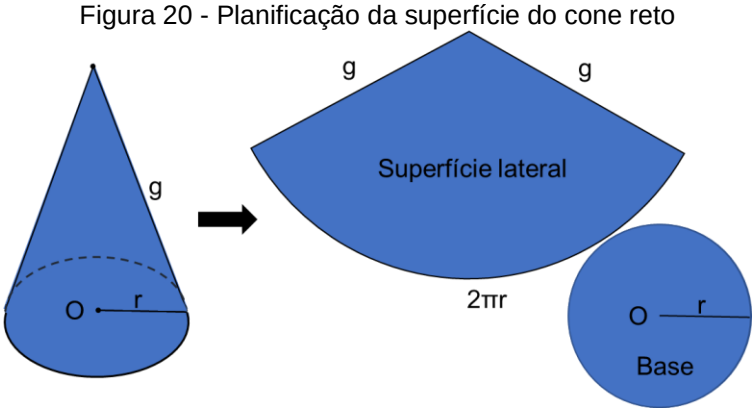
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Quando a seção meridiana de um cone é um triângulo equilátero, ele é denominado cone equilátero. Nesse caso, 2r=g.

Área da superfície de um cone reto. Umas das áreas de superfície do cone é a lateral. A superfície lateral (figura 20) de um cone circular reto ou cone de revolução de raio de base r e geratriz g é equivalente a um setor circula de raio g e comprimento de arco $2\pi r$. Isso significa que a superfície lateral de um cone de revolução

desenvolvida num plano (planificada) é um setor circula cujo raio é g (geratriz) e comprimento do arco 2$\boldsymbol{\pi}$r

Figura 20 - Planificação da superfície do cone reto



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do respectivo arco, podemos determinar a área lateral (A_l) por meio de uma regra de três simples.

Comprimento do Arco	Área do setor
2πg _____	πg^2
2πg _____	A_l

$$\frac{2\pi g}{2\pi r} = \frac{\pi g^2}{A_l} \Rightarrow A_l . g = \pi g^2 \Rightarrow \boxed{A_l = \pi\, rg}$$

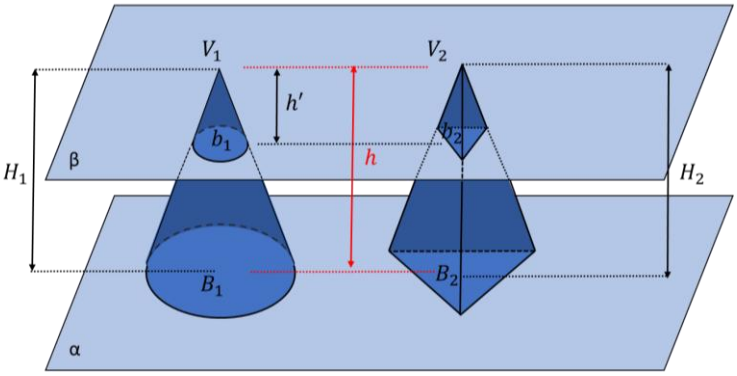
A área total (A_t) da superfície do cone podemos calcular com a soma da área lateral (A_l) com a área da base ($A_B = \pi\, r^2$), logo:

$$A_t = A_b + A_l = \pi\, rg + \pi\, r^2 \Rightarrow \boxed{A_t = \pi\, r(r+g)}$$

Volume do Cone (V_c). Assim como foi realizado no estudo do volume do cilindro, utilizaremos o Princípio de Cavalieri para calcular o volume do cone. Consideramos um conde de altura $H_1 = h$ e área da base $B_1 = B$ e um tetraedro de altura $H_1 = h$ e área de base $B_2 = B$ (o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes).

Suponhamos que os dois sólidos (figura 21) têm as bases num mesmo plano α e que os vértices estão num mesmo semiespaço dos determinados por α.

Figura 21 - Volume do Cone



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Qualquer plano secante β paralelo a α, distando h' dos vértices que seccionam o cone, também secciona o tetraedro, e sendo as áreas das secções $\boldsymbol{b_1}$ e $\boldsymbol{b_2}$, respectivamente, temos:

$$\left(\frac{b_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2, \frac{b_2}{B_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2\right) \Rightarrow \frac{b_1}{B_1} = \frac{b_2}{B_2}.$$

Como $B_1 = B_2 = B$, vem que $b_1 = b_2 = B$.

Então, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{cone} = V_{tetraedro}$$

Como $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} B_2 h$, ou seja, $V_{tetraedro} = \frac{1}{3} B.h$, vem que $V_{cone} = \frac{1}{3} Bh$; ou resumidamente:

$$V = \frac{1}{3} Bh.$$

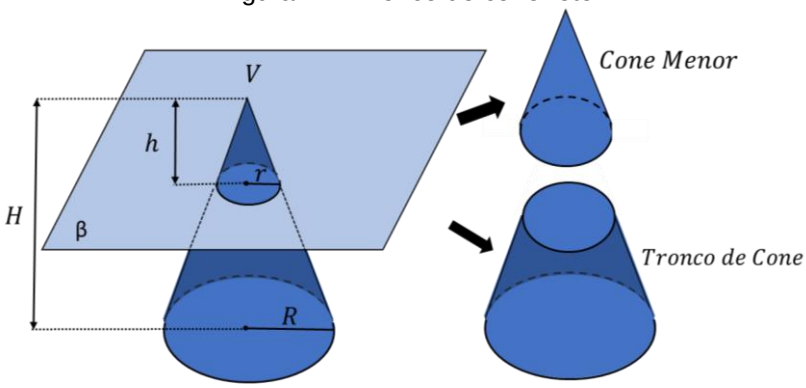
Portanto, o volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Se $B = \pi r^2$, temos:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$

Tronco de cone. Na figura 22 - tronco de cone reto, está representando um cone reto altura H e raio de base R, secionado por um plano β paralelamente à sua base. Esse plano determina um cone menor de altura h e raio r, e um sólido denominado tronco de cone.

Figura 22 - Tronco de cone reto

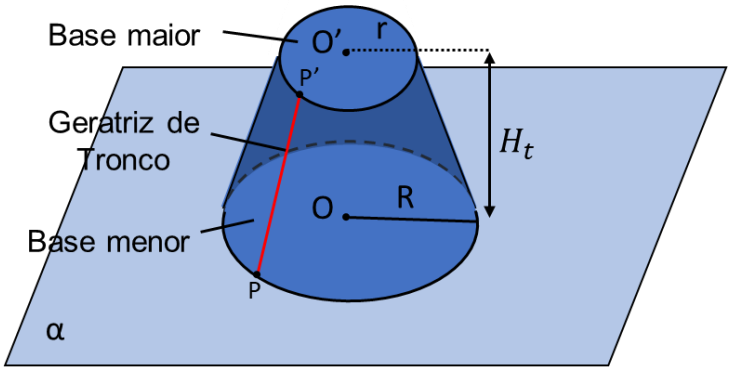


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Conforme a figura 23, em um tronco de cone, podemos destacar os seguintes elementos:

- A base maior é o círculo de centro O e raio R.
- A base menor é o círculo de centro O' e raio r.
- A distância $\boldsymbol{H_t}$, entre a base maior e a base menor, corresponde à altura do tronco de cone.
- A geratriz do tronco corresponde a cada segmento contido na geratriz do cone cujas extremidades pertencem às bases do tronco. Nesse tronco, $\overline{\boldsymbol{PP'}}$ é um exemplo de geratriz do tronco.
- A superfície lateral corresponde a reunião de todas as geratrizes do tronco.

Figura 23 - Elementos do tronco de cone



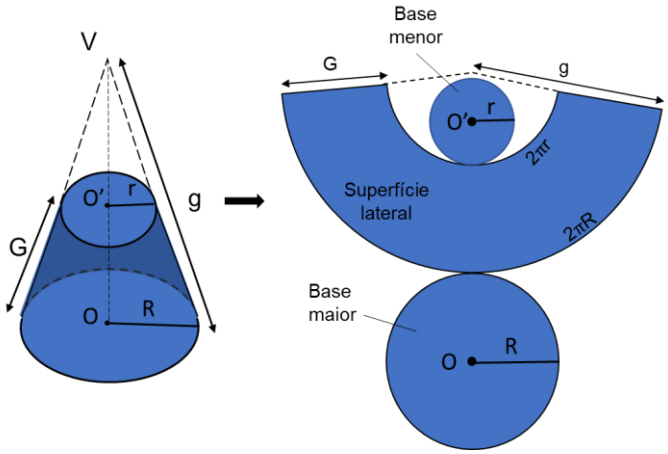
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Área da superfície de um tronco de cone reto. Observe na figura 24 um tronco de cone reto e sua respectiva planificação, onde podemos ver três áreas: dois círculos e uma área lateral.

Como a área da base maior é um círculo, então aplica-se: $\boxed{\boldsymbol{A_B = \pi R^2}}$.

Como a área da base menor é um círculo, então: $\boxed{\boldsymbol{A_b = \pi r^2}}$.

Figura 24 - Planificação da superfície do tronco de cone reto



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Área lateral ($\boldsymbol{A_l}$) de um tronco de cone pode ser calculada pela diferença entre as áreas laterais dos cones de vértices V e bases de centro O e O'.

$$A_l = A_O - A_{O'}$$

Onde a área lateral do cone menor é $A_{O'} = \pi r(g - G)$ e do cone maior $A_O = \pi R g$.

$$A_l = \pi R g - \pi r(g - G) \quad (1)$$

Escrevendo primeiro a expressão acima com g em função de G, R e r, para depois obtemos a área lateral do tronco de cone:

$$\frac{g}{(g - G)} = \frac{R}{r} \Rightarrow g.r = R.(g - G) \Rightarrow g.r = g.R - G.R \Rightarrow$$

$$G.R = g.R - g.r \Rightarrow G.R = g.(R - r) \Rightarrow g = \frac{GR}{(R - r)} \quad (2)$$

Substituindo g de (2) em (1), temos:

$$A_l = \pi R\left(\frac{GR}{(R - r)}\right) - \pi r\left(\frac{GR}{(R - r)} - G\right) = \frac{\pi R.GR}{(R - r)} - \pi r\left(\frac{GR - G(R - r)}{(R - r)}\right)$$

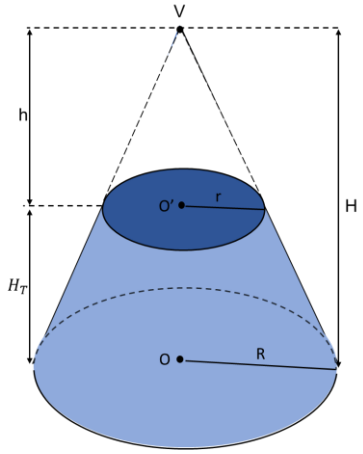
$$= \frac{\pi R.GR - \pi r.(GR - G(R - r))}{(R - r)} = \frac{\pi R.GR - \pi r.GR + \pi r.G(R - r))}{(R - r)}$$

$$= \frac{(R - r).(\pi GR) + \pi r G(R - r)}{(R - r)} = \pi GR + \pi r G \Longrightarrow \boxed{A_l = \pi G(R + r)}$$

Por fim, área total da superfície: $\boxed{A_t = A_B + A_b + A_l}$

Volume de um tronco de cone reto ($\mathbf{V_t}$). Podemos determinar o volume de um tronco de cone reto, como o apresentamos a seguir, na figura 25, calculando a diferença entre os volumes dos cones de vértices V e bases de centro O e O'. Onde H é altura do cone reto, h altura do cone menor $\boldsymbol{H_t}$ altura do tronco de cone reto.

Figura 25 - Volume do tronco de cone reto



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

$$V = V_O - V_{O'} = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h \,, onde\ H = h + H_T, \Longrightarrow$$

$$V = \frac{\pi}{3}[R^2(h + H_T) - r^2 h] \Longrightarrow V = \frac{\pi}{3}[R^2 H_T + (R^2 - r^2)h] \qquad (1)$$

Agora vamos calcular h em função de R, r e H_T:

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R} \Longrightarrow \frac{h}{r} = \frac{(h + H_T)}{R} \Longrightarrow Rh = rh + rH_T \Longrightarrow h(R - r) = rH_T \Longrightarrow$$

$$h = \frac{rH_T}{(R - r)} \qquad (2)$$

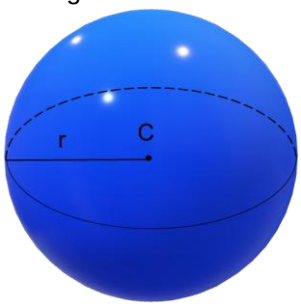
Obtemos o volume do tronco de cone reto, substituindo h de (2) em (1):

$$V = \frac{\pi}{3}\left[R^2 H_T + (R^2 - r^2)\frac{rH_T}{(R - r)}\right] \Longrightarrow V = \frac{\pi}{3}[R^2 H_T + (R + r)rH_T] \Longrightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{\pi H_T}{3}(R^2 + Rr + r^2)}$$

Esfera. Para definirmos a esfera, consideramos um número real positivo r e um ponto C. Denomina-se esfera o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a r a partir do ponto C. Nesse caso, temos uma esfera de centro C e raio r (figura 26 - esfera).

Figura 26 - Esfera

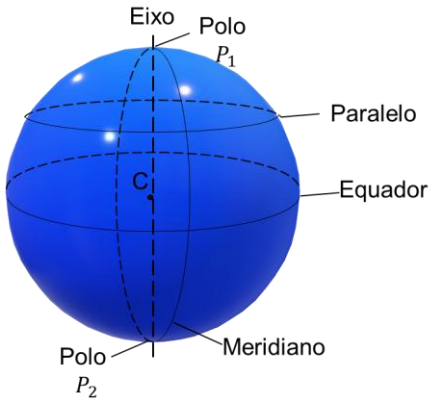


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

De acordo com a figura 27 – elementos da esfera, podemos destacar os seguintes elementos:

- O centro é o ponto C.
- O eixo é a reta que contém o centro da esfera.
- Os polos são os pontos de interseção da superfície da esfera com o eixo. Nessa esfera, os polos são P1 e P2.
- O equador é a circunferência obtida ao se secionar a esfera por um plano perpendicular ao eixo e que passe pelo centro C.
- Os paralelos são as circunferências obtidas as secionar a esfera por planos paralelos as equador.
- Os meridianos são as circunferências obtidas as se secionar a esfera por planos que contém o eixo.

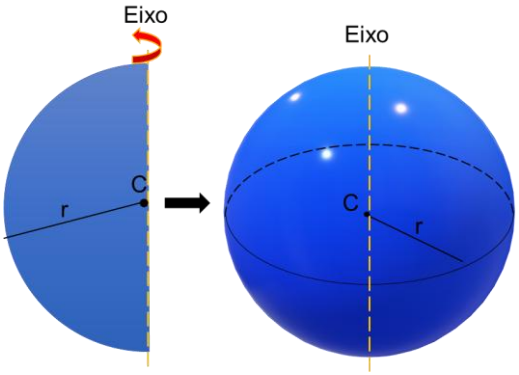
Figura 27 - Elementos da esfera



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Como podemos ver abaixo, na figura 28 – revolução da esfera, assim como o cilindro e o cone reto, a esfera também é um sólido de revolução, que ´pode ser obtida as se rotacionar um semicírculo em torno da reta (eixo) que contém seu diâmetro.

Figura 28 - Revolução da esfera

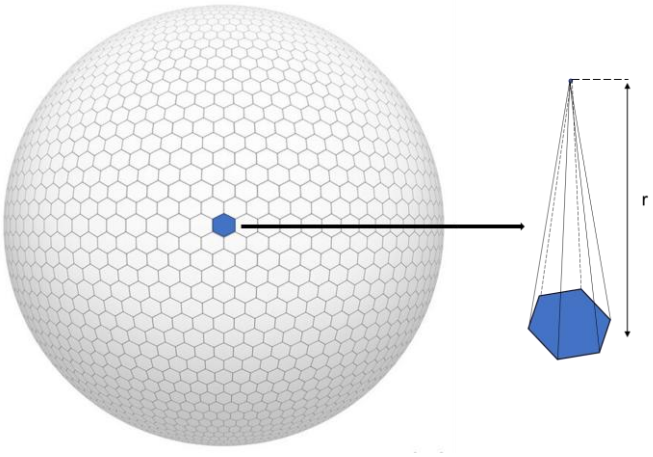


Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Área da superfície da esfera. Nesse momento iremos definir conceito de área da superfície esférica, além disso, é de suma importância para o estudo de esfera também definirmos a calota esférica e a zona esférica:

Por experimentação. Admitimos que uma esfera de centro C, figura 29, seja dividida em n sólidos congruentes de maneira que, à medida que n aumenta, esses sólidos assemelham-se a pirâmides com vértices em C e altura igual ao raio da esfera. Assim, o volume de cada uma dessas pirâmides será dado por $\boldsymbol{V_i = \frac{1}{3}A_i r}$, em que $\boldsymbol{A_i}$ corresponde a área da base da pirâmide.

Figura 29 - Superfície esférica



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

Temos que o volume da esfera, quando n não tende ao infinito, é igual à soma dos volumes dos sólidos obtidos:

$$\boldsymbol{V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \Longrightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + \cdots + \frac{1}{3}A_n r \Longrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)}$$

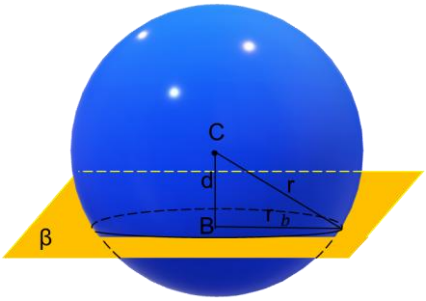
Quando n tende ao infinito, a soma das áreas das bases dos sólidos é igual à área A da superfície da esfera, então temos:

$$\boldsymbol{\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \Longrightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}rA \Longrightarrow \boxed{A = 4\pi r^3}}$$

Portanto, a área da superfície da esfera é provada.

Volume da esfera. Considere uma esfera de centro C, figura 30, e raio r secionada por um plano β.

Figura 30 - Esfera secionada pelo plano



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

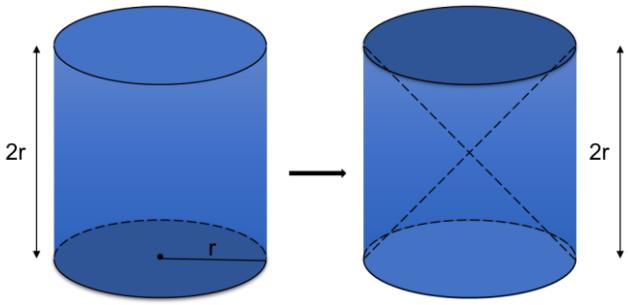
A partir do círculo de centro B e raio r_b, obtido na seção, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$r^2 = r_b^2 + d^2 \Longrightarrow r_b^2 = r^2 - d^2$$

Escrevendo a área do círculo de centro B em função de r e d, temos:

$$S_b = \pi r_b^2 \Longrightarrow S_b = \pi(r^2 - d^2)$$

Considere agora um sólido X, obtido ao retirarmos de um cilindro reto de raio r e altura 2r (cilindro equilátero) dois cones retos de raio e altura r, conforme figuras a seguir:



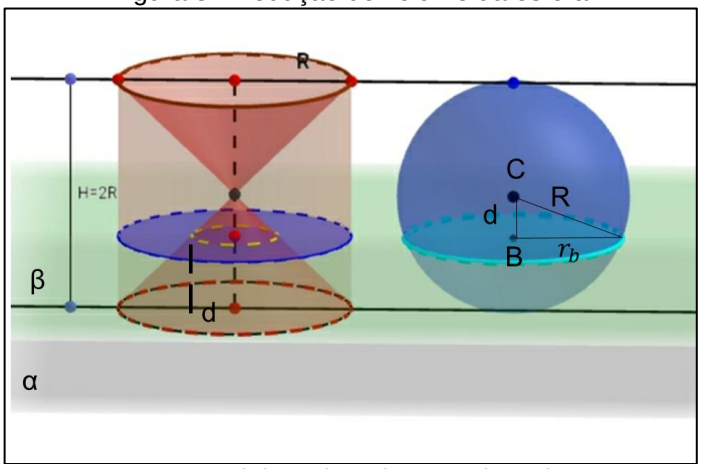
Fonte: elaborado pelo autor (2024)

O volume V desse sólido é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o dos cones retiramos:

$$V = \pi r^2 2r - 2.\frac{\pi r^2.r}{3} \Longrightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Para obtermos o volume da esfera, figura 31, vamos utilizar novamente o Princípio de Cavalieri, considerando a esfera e o sólido X, obtidos anteriormente, apoiados em um plano α e secionados por um plano β paralelo a α.

Figura 31-Dedução do volume da esfera



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A área S_c da seção obtida no sólido X é dada pela área da coroa definida pelos círculos de raio r e d:

$$S_c = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$$

Como a área da seção determinada na esfera é dada por: $S_b = \pi(r^2 - d^2)$, conforme visto anteriormente, temos que as áreas das duas seções obtidas são iguais ($S_b = S_c$). Dessa maneira, pelo Princípio de Cavalieri, temos que o volume da esfera e do sólido X são iguais.

Portanto, o volume da esfera de raio r é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4\pi r^3}{3}}$$

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*: A SEGUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta sequência didática, o objetivo é proporcionar aos alunos do 2º e 3º ano do ensino médio uma compreensão aprofundada sobre os corpos redondos, como o cilindro, o cone, o tronco de cone e a esfera, abordando suas propriedades e aplicações práticas. A proposta visa conectar o conteúdo matemático com o cotidiano dos alunos, demonstrando como esses conceitos geométricos podem ser utilizados em diversas áreas, como construção, design e engenharia.

A sequência didática foi planejada para ser dinâmica e interativa, utilizando diferentes registros para que os alunos possam representar e comunicar suas ideias de maneira eficaz. Os registros incluem a escrita matemática, com a utilização de fórmulas para cálculo de volume e área dos corpos redondos, além de desenhos e diagramas, que ajudam na visualização das formas geométricas e suas propriedades. Também serão explorados gráficos, que ilustram as relações entre as variáveis associadas aos corpos redondos, e descrições verbais, que incentivam os alunos a explicarem seus raciocínios matemáticos de forma clara. Além disso, os alunos terão a oportunidade de trabalhar com modelos físicos, o que permite uma aprendizagem mais concreta e prática, e utilizarão ferramentas tecnológicas, como softwares de geometria, para visualizar os conceitos em 3D.

O conteúdo será abordado de maneira contextualizada, com exemplos do dia a dia que ajudam os alunos a perceberem a aplicabilidade prática dos corpos redondos. Por exemplo, ao estudar o cilindro, os alunos poderão analisar objetos como latas de bebidas ou tubos industriais, enquanto no estudo da esfera, poderão relacioná-la a bolas esportivas e outros objetos com essa forma. Essa abordagem visa tornar a aprendizagem mais relevante e interessante, conectando a teoria à prática e mostrando como os conceitos geométricos estão presentes em diferentes contextos.

A sequência didática será estruturada em cinco blocos, com atividades planejadas para garantir uma aprendizagem progressiva. No primeiro bloco, os alunos serão introduzidos aos corpos redondos, entendendo suas propriedades e aplicações básicas. O estudo do cilindro e do cone será aprofundado no segundo e terceiro blocos, com atividades práticas que envolvem cálculos e análise de situações reais. O tronco de cone será abordado em contextos como copos e funis, enquanto a esfera será estudada a partir de objetos cotidianos, como bolas e tanques de combustível. No último bloco, os alunos serão desafiados a aplicar o que aprenderam na resolução

de problemas práticos, como calcular a quantidade de material necessário para fabricar objetos com essas formas geométricas.

A avaliação será contínua e baseada na participação dos alunos, nos registros feitos durante as atividades e na capacidade de resolver os problemas propostos. A ênfase estará na aplicação dos conceitos de forma contextualizada, permitindo que os alunos demonstrem não só o domínio dos cálculos, mas também a capacidade de comunicar seus conhecimentos de maneira clara e precisa.

Com essa abordagem, a sequência didática busca proporcionar uma aprendizagem significativa, que vai além do ensino tradicional de geometria, promovendo a formação de cidadãos capazes de aplicar o conhecimento matemático para resolver problemas do cotidiano e de diferentes áreas profissionais.

Quadro 6 - Blocos e atividades

Bloco	Atividade	Objetivo	Recurso
1º	1	Introdução ao estudo dos corpos redondos.	Papeis com as atividades, caneta, lápis, borracha, Aplicativo Geogebra e Smartphones.
	2	Conhecer o artefato Geogebra e suas funcionalidades. Criar pontos, retas e planos (polígonos) com auxílio do Geogebra.	
2º	3	Representar os conceitos de espaço e forma do Cilindro e identificar os seus elementos.	
	4	Definir as áreas e o volume de um Cilindro.	
3º	5	Representar os conceitos de espaço e forma do Cone e identificar os seus elementos.	
	6	Determinar as áreas e o volume de um Cone.	
4º	7	Representar os conceitos de espaço e forma do tronco de Cone e identificar os seus elementos.	
	8	Determinar as áreas e o volume de um tronco de cone.	
5º	9	Representar os conceitos de espaço e forma da Esfera e identificar os seus elementos. Determinar a área e o volume de uma Esfera.	

Fonte: autor

A seguir, vamos especificar os pontos levantados nas análises prévia e a *priori*, que são os objetivos e as análises a *priori* da expectativa na aprendizagem de cada atividade.

4.1 BLOCO 1

ATIVIDADE 1: introdução ao estudo de Corpos Redondos.

A Atividade 1 tem como objetivo introduzir os alunos ao estudo dos corpos redondos, apresentando os conceitos fundamentais relacionados a esse tipo de sólido geométrico, como cilindro, cone, tronco de cone e esfera. Será feita uma explicação inicial sobre as características básicas de cada um desses corpos, como seus elementos, além de uma introdução ao cálculo de áreas de superfícies e volume. Para tornar o conteúdo mais acessível e relevante, a atividade também incluirá exemplos de aplicação desses corpos redondos no cotidiano dos alunos e na natureza, destacando sua presença em objetos e fenômenos que eles podem reconhecer em seu dia a dia.

A atividade terá como foco os conceitos intuitivos, já que os alunos geralmente possuem familiaridade com alguns desses objetos, como latas (cilindro), cones de sorvete (cone) ou bolas (esfera). Espera-se que, ao serem apresentados os nomes e as propriedades desses sólidos, os alunos consigam associá-los rapidamente às suas representações visuais e a objetos reais. Além disso, ao discutir suas aplicações práticas, os alunos terão a oportunidade de perceber a importância da geometria espacial em diversas áreas, como engenharia, design e até mesmo em fenômenos naturais como montanhas, árvores e formigas, que podem ter formas que se assemelham aos corpos redondos estudados.

Quanto à aprendizagem, espera-se que os alunos utilizem diversos tipos de registros para aprofundar seus conhecimentos. Por meio de representações visuais, como desenhos dos corpos redondos, e registros verbais, como descrições orais ou escritas sobre as propriedades e aplicações desses sólidos, eles serão estimulados a integrar diferentes formas de expressão e reflexão. A utilização de recursos como smartphones pode ser uma maneira de os alunos buscarem exemplos práticos ou até mesmo usar aplicativos de geometria para visualização e exploração interativa dos sólidos.

O suporte visual será dado por folhas de atividade impressas e coloridas, nas quais os alunos poderão realizar anotações e fazer desenhos dos corpos redondos. Além disso, será incentivada a interação com os dispositivos móveis para pesquisa e troca de ideias, proporcionando uma abordagem mais dinâmica e conectada à realidade digital dos alunos.

Espera-se que, ao final dessa atividade, os alunos sejam capazes de identificar e descrever os corpos redondos, compreendendo suas propriedades principais, além de reconhecer sua aplicação no mundo real. A atividade inicial tem o objetivo de criar uma base sólida para o estudo mais aprofundado dessas formas geométricas nos blocos subsequentes da sequência didática.

Quadro 7 - Objetivos da atividade 1

Momentos	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Primeiro Momento	5 minutos	Introduzir ideia de corpos redondos
Segundo Momento	5 minutos	Conceituar corpos redondos

Fonte: autor

Primeira Momento. A análise das imagens representativas de corpos redondos proporcionará uma compreensão mais clara sobre como esses objetos geométricos se manifestam em nosso cotidiano. Ao observarmos as representações visuais, como figuras de cilindros, cones, esferas e troncos de cone, conseguimos estabelecer uma conexão entre as formas geométricas e os objetos concretos que as possuem.

Por exemplo, ao observarmos a figura de um cilindro, podemos identificar objetos como latas de refrigerante, garrafas e potes de produtos diversos. Esses itens apresentam a característica de ter uma base circular e uma altura, sendo exemplares claros de cilindros na vida real. O estudo dessa forma geométrica nos leva a compreender suas propriedades, como as fórmulas para calcular sua área de superfície e volume, as quais são amplamente aplicadas em situações práticas, como no cálculo da quantidade de líquido em uma garrafa ou no dimensionamento de embalagens industriais.

De maneira semelhante, ao analisarmos um cone, podemos visualizar objetos como cones de sorvete, funis ou mesmo montanhas, que compartilham a forma de um cone. O cone é um sólido de revolução gerado pela rotação de um triângulo sobre um de seus lados. A análise de sua geometria é essencial para entender tanto a aplicação em utensílios do cotidiano quanto fenômenos naturais como a formação de vulcões e cones de neve, os quais se assemelham a esse tipo de corpo geométrico.

A esfera, por sua vez, está presente em diversos objetos, como bolas de futebol, bolas de basquete e até mesmo planetas no cosmos. A esfera é uma forma que possui simetria perfeita, com todos os pontos equidistantes de seu centro. Compreender as propriedades da esfera nos ajuda a perceber como essas formas

desempenham papel essencial tanto em produtos industriais como em fenômenos astronômicos.

Já o tronco de cone, que é gerado pela interseção de um cone com um plano paralelo à sua base, pode ser observado em objetos como copos de plástico descartáveis e cones de trânsito. Essa forma também tem ampla aplicabilidade prática, tanto no design de objetos quanto na engenharia, em áreas como a construção de funis e sistemas de armazenamento.

A análise dessas formas geométricas e de como elas se aplicam em objetos do nosso dia a dia, como utensílios domésticos, alimentos e até mesmo na natureza, permite compreender a importância e a ubiquidade dos corpos redondos. Eles não apenas têm utilidade prática, mas também são fundamentais para a organização e funcionalidade de muitos aspectos do mundo físico. Além disso, estudar esses corpos geométricos no contexto da geometria espacial permite que possamos resolver problemas práticos, como o cálculo de volumes e áreas, de maneira mais eficiente, o que é essencial em várias áreas da ciência, engenharia e design.

Figura 32 - Bolas e Tangerina

Fonte: Autor

Figura 33 - Casquinha de sorvete e Chapéus de Aniversário

Fonte: Autor

Figura 34 – “Cone” de trânsito e Funil

Fonte: Autor

Figura 35 – Lata de refrigerante e Copos Cilíndricos

Fonte: Autor

1. Observe os objetos nas imagens acima e responda as perguntas a seguir.

a) Para você, quais são as características geométricas de cada um desses objetos?

_____

b) Quais as diferenças geométricas entre esses objetos?

_____

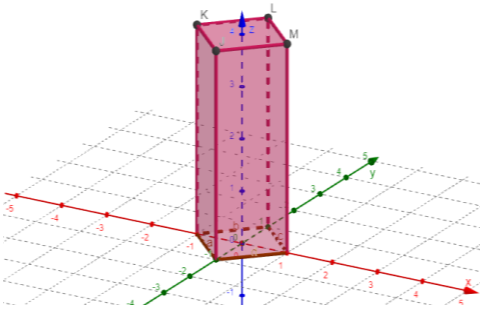
Segundo Momento. Após a introdução inicial e a observação de exemplos práticos, será apresentada uma breve definição e características fundamentais dos corpos redondos, abordando suas propriedades distintivas. Como podemos observar, os corpos redondos são figuras geométricas tridimensionais que possuem uma característica especial: superfícies curvas. Diferentemente das figuras planas, como triângulos, quadrados ou círculos, que podem ser completamente representadas em um plano, os corpos redondos têm superfícies que se desenvolvem no espaço, o que os torna tridimensionais.

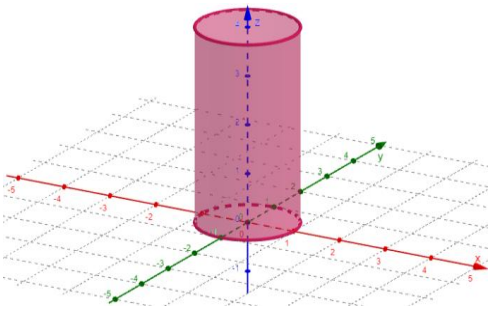
Esses sólidos incluem o cilindro, o cone, a esfera e o tronco de cone, cada um com propriedades específicas que os diferenciam. Um ponto em comum entre eles é a presença de superfícies curvas, sejam elas geradas por rotações de figuras planas ou por características naturais de sua forma. Essa superfície curva é o que os torna

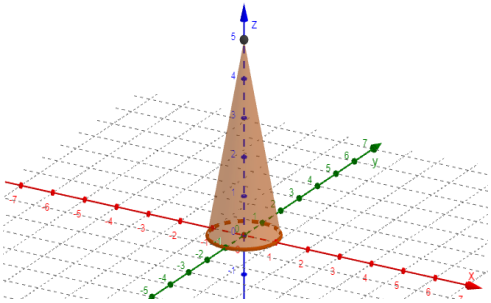
impossíveis de serem completamente planificados sem que sua estrutura original seja alterada.

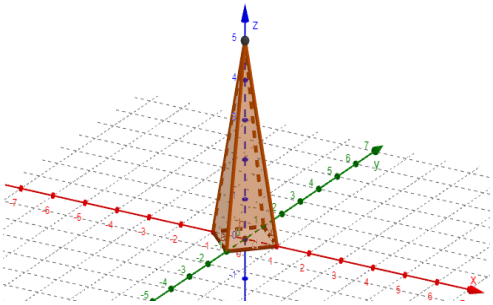
Além disso, os corpos redondos são amplamente encontrados na natureza e no cotidiano, como nas formas de frutas, objetos de decoração, utensílios domésticos e até fenômenos astronômicos. Compreender suas propriedades, como áreas de superfícies e volumes, é essencial para explorar suas aplicações em diferentes contextos, desde o design de embalagens até a engenharia e arquitetura.

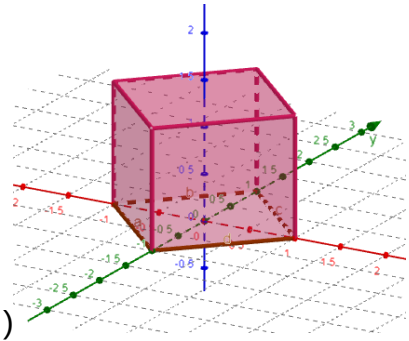
1. De acordo com a definição de corpos redondos, marque abaixo as figuras que têm superfície curva.

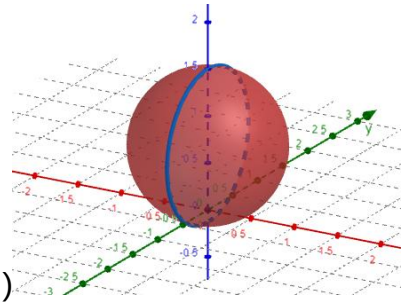
( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

( ) 

Por fim, será dado para cada aluno a tabela a seguir, onde eles terão que escrever outros objetos do dia a dia referente a um corpo redondo.

c) Escreva os nomes de objetos que você encontra no seu dia a dia que se encaixa nos grupos de um dos Corpos Redondos abaixo.

d)

Quadro 8 - Atividade 1

Corpos Redondos	Objetos do dia a dia
Cilindro	
Cone	
Tronco de cone	
Esfera	

Fonte: Autor (2024)

ATIVIDADE 2: Conhecendo o artefato Geogebra.

Nesta atividade os alunos terão familiarização com o aplicativo Geogebra. Iremos fazer uma introdução de como usar as “Ferramentas” básicas do aplicativo tecnológico, mostrando como desenhar pontos, retas, segmentos de reta, polígonos e círculos. Também ensinar como manipular os objetos e mover a visualização em 3D do aplicativo.

O objetivo desta atividade é proporcionar aos alunos uma introdução prática ao uso do Geogebra para explorar conceitos iniciais de geometria de posição, permitindo a criação, observação e manipulação de objetos geométricos tridimensionais. Essa ferramenta tecnológica é fundamental para facilitar a visualização e compreensão das relações espaciais e das propriedades geométricas.

Análise a *priori* da expectativa na aprendizagem: Espera-se que os alunos desenvolvam habilidades no uso básico do Geogebra, mobilizando registros tecnológicos e verbais para interpretar e construir representações geométricas. Além disso, é previsto que os alunos realizem tratamentos matemáticos durante a construção dos objetos, desenvolvendo uma percepção mais apurada sobre os sólidos geométricos. Contudo, como apontado por Nadalon (2018) e Hellmann (2021), é provável que os estudantes enfrentem dificuldades iniciais no manuseio do software, especialmente se estiverem utilizando-o pela primeira vez. Um dos desafios esperados será a identificação correta do semicírculo como elemento gerador da esfera na revolução, o que demandará uma orientação detalhada durante a execução da atividade.

Essa abordagem prática, apoiada pelo Geogebra, promove um aprendizado dinâmico e interativo, estimulando o interesse e a compreensão dos conceitos geométricos por meio de ferramentas tecnológicas.

Recursos Utilizados: Aplicativo Geogebra, Smartphones papeis com as atividades.

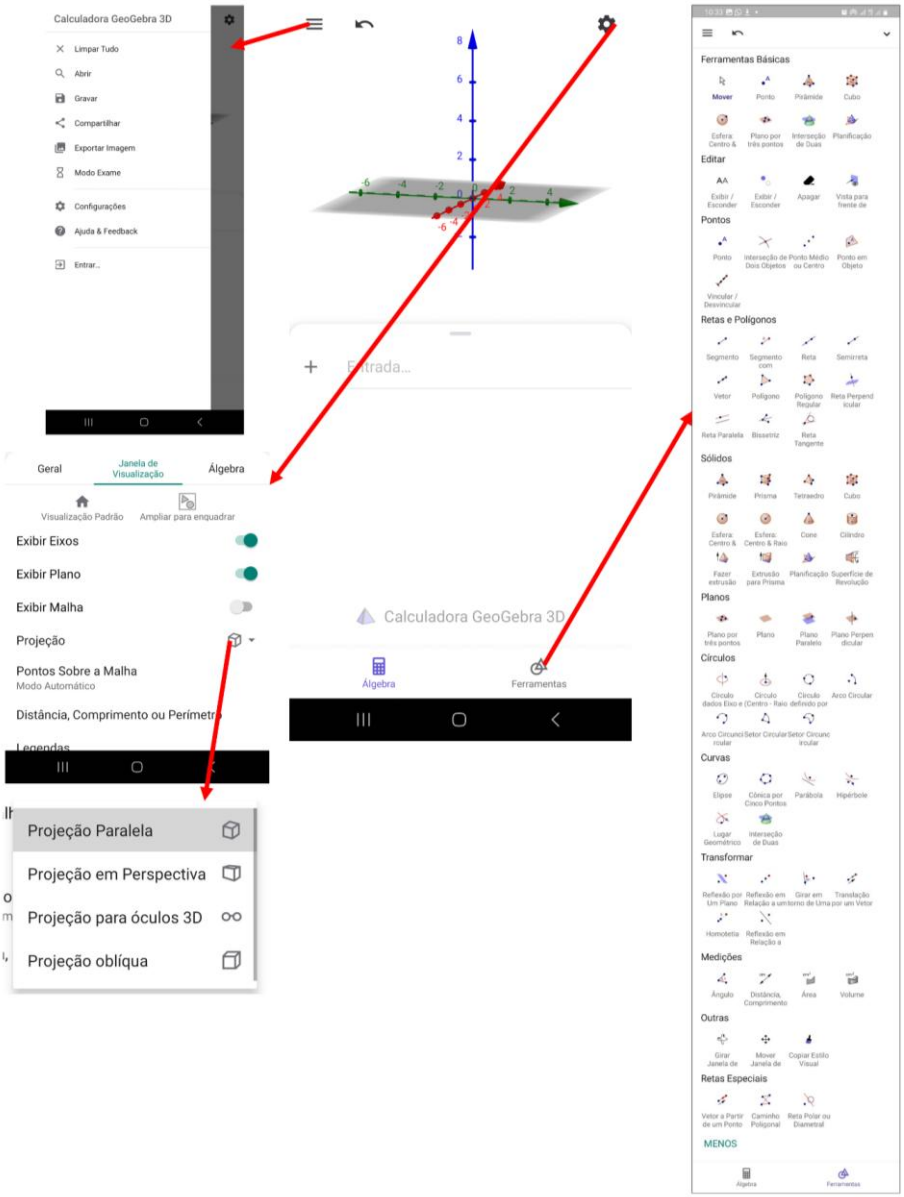
Quadro 9 - Objetivos da atividade 2

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Único	20 minutos	Como momento de ambientação, permitir que os alunos manuseiem livremente o aplicativo no Smartphone; Utilizar as “Ferramentas” básicas para a construção de polígonos, e as “Ferramentas” de medição.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Desta forma, solicitaremos aos alunos que abram o app Geogebra e explorem as “Ferramentas” de construção de sólidos. Depois, pediremos que eles façam um retângulo, triangulo retângulo, um trapézio retângulo e um semicírculo.

Figura 36 - “Ferramentas” do software Geogebra



Fonte: Autor (2024)

1. Construa um triangulo retângulo.

Cada aluno irá seguir esses procedimentos a seguir para realizar essa parte da atividade.

Para fazermos esse objeto geométrico, antes, com seu app aberto, vamos clicar em configurações e ativar o modo “exibir malha”. Em seguida, clique em “Ferramentas”, selecione ponto A e posicione na origem (Eixos x,y,z). Clique em “Ferramentas”, selecione um ponto B, posicionando sobre o Eixo x, e em seguida selecione um outro ponto C sobre o Eixo y. Você sabia que acaba de criar três pontos não colineares? Assim, "três pontos não colineares" é um conceito fundamental na geometria que descreve a posição relativa de pontos que não estão alinhados em uma única linha reta.

Agora vamos criar três segmentos de retas concorrentes e complanares. Clique em “Segmento” selecione os pontos A e B, em seguida os pontos A e C, e depois os pontos C e B. Neste instante, clique novamente em “Ferramentas” e selecione “Polígono” depois os vértices (pontos A, B, C e A) para criarmos, enfim, o triangulo retângulo.

a) Após a construção, vá em “Ferramentas”, ative o modo “Superfície de Revolução”. Qual objeto geométrico foi formado?

_____

2. Construa um retângulo.

Clique em “Ferramentas”, selecione ponto A e posicione na origem (Eixos x,y,z). Clique em “Ferramentas”, selecione um ponto B, posicionando sobre o Eixo x, e em seguida selecione um outro ponto C sobre o Eixo y. Agora, vamos posicionar um outro ponto D que esteja colinear com o ponto B e C

Agora vamos criar quatro segmentos de retas. Clique em “Segmento” selecione os pontos A e B, em seguida os pontos B e C, e depois os pontos C e D, por fim, D e A. Neste instante, clique novamente em “Ferramentas” e selecione “Polígono” depois os vértices (pontos A, B, C, D e A) para criarmos, enfim, o retângulo.

a) Após a construção, vá em “Ferramentas”, ative o modo “Superfície de Revolução”. Qual objeto geométrico foi formado?

_____

3. A partir das construções desses objetos geométricos, crie um trapézio retângulo no aplicativo.

a) Após a construção, vá em “Ferramentas”, ative o modo “Superfície de Revolução” . Qual objeto geométrico foi formado?

_____

4. Qual Objeto gera a Esfera?

_____

Portanto, podemos ver que os objetos estudados podem ser formados através da revolução, giro no próprio eixo, das figuras geométricas conhecidas. Por isso que podemos também chamar esses objetos de “Sólidos de Revolução”.

4.2 BLOCO 2

ATIVIDADE 3: conhecendo o objeto Cilindro.

Objetivo: Representar os conceitos de espaço e forma do Cilindro, e manipular na ferramenta Geogebra a altura e o raio, bem como identificar os elementos.

Análise a *priori* da expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade as representações que conceituam a ideia de um Cilindro por meio dos registros verbal, geométrico, simbólico e tecnológico, observando os Elementos identificáveis do objeto:

- Bases: Dois círculos paralelos e congruentes.
- Altura (h): Distância perpendicular entre as bases.
- Geratriz (g): Segmento que liga dois pontos correspondentes das circunferências das bases.

Acreditamos, de acordo com Sanchez (2018), que os alunos poderão enfrentar dificuldades em compreender os elementos geométricos, como confundir a altura com a geratriz ou não entender a relação entre essas medidas. Também, alunos poderão ter certas dificuldades ao desenharem o cilindro em várias perspectivas e seus elementos.

Recursos Utilizados: Material impresso, lápis, caneta, borracha, computador ou celular para acessar o Geogebra (on-line, off-line ou app).

Quadro 10 - Objetivos da atividade 3

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos

Único	20 minutos	Utilizar o Geogebra para manusear o cilindro, visualizar e identifica seus elementos.

Fonte: Autor (2024)

1. Acesse ao arquivo Geogebra.
2. Manuseia os controles deslizantes r e h e observe como o sólido se comporta. Ao fazer essa série de ações o que você pode dizer sobre o comportamento dos elementos do cilindro?

_____

3. Preencha a tabela abaixo dando uma descrição para o cilindro, dados o raio (r) e a altura (h), em comparação com o cilindro equilátero e depois desenhe cada cilindro visto em duas perspectivas (frontal e acima).

Quadro 11 - Atividade 3, questão 3

RAIO (r)	Altura (h)	Descrição
1	2	Cilindro 1: É um cilindro equilátero reto, normal
1	6	Cilindro 2:
5	2	Cilindro3:

Fonte: Autor (2024)

Quadro 12 - Atividade 3, desenhar

Desenho do Cilindro 1	Desenho do Cilindro 2	Desenho do Cilindro 3
Frontal: Acima:	Frontal: Acima:	Frontal: Acima:

Fonte: Autor (2024)

4. Atividade Contextualizada: Um engenheiro de uma fábrica de peças está projetando um novo eixo para sua máquina, formado por três cilindros (A, B e C) sobrepostos. O eixo precisa ter um total de 70 cm de comprimento e diâmetro máximo de 14 cm. Sabe-se que cilindro A tem o dobro do cilindro B em comprimento e em diâmetro. E o cilindro B tem o dobro do cilindro C em comprimento e em diâmetro. Com essas informações, desenhe a peça mostrando seus elementos.

Desenhe o modelo da peça

ATIVIDADE 4: Definir as áreas e o volume de um Cilindro.

Objetivo: Calcular e interpretar as fórmulas da área lateral, área total e volume do cilindro

Análise a *priori* na expectativa de aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que conceituam as definições das áreas e do volume do cilindro por meio dos registros algébrico, gráfico e verbal.

De acordo com Sanchez (2018), acredita-se que os alunos poderão enfrentar dificuldades em aplicar as fórmulas e em compreender os elementos geométricos, como confundir a altura com a geratriz ou não entender a relação entre essas medidas. Além disso, podem esquecer ou aplicar de forma incorreta as fórmulas da área da base, da área lateral, da área total ou do volume, especialmente ao lidar com unidades de medida.

Recursos utilizados: Aplicativo Geogebra, Smartphone, caneta e papeis com as atividades.

Quadro 13 - Objetivos atividade 4

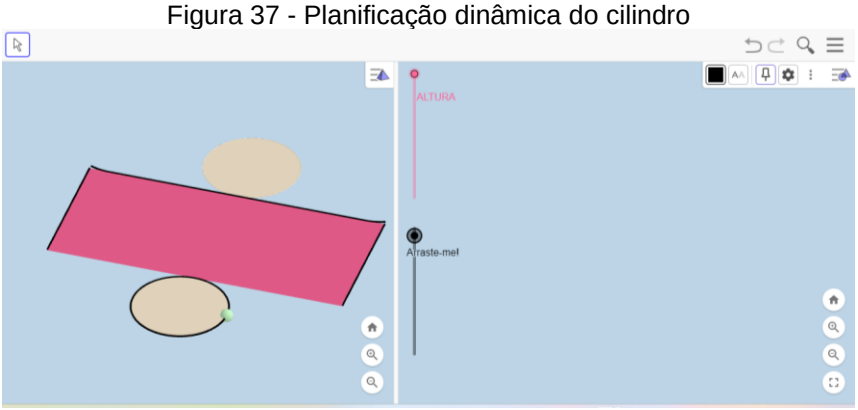
Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Primeiro	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar as superfícies do cilindro. Deduzir e manipular as fórmulas de área do cilindro
Segundo	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar o volume do cilindro. Deduzir e manipular as fórmulas de área e volume do cilindro

Fonte: Autor (2024)

Primeiro momento. Nesta etapa, a proposta de atividade vai iniciar com apresentação da planificação da superfície do cilindro, destacando as bases e a área lateral. Será repassado para os alunos um arquivo[1] do Geogebra (Figura - Planificação dinâmica do cilindro) com a demonstração animado do cilindro, mostrando essas superfícies planas.

[1] Disponível em: disponível em https://www.geogebra.org/m/htuz6gsh

Figura 37 - Planificação dinâmica do cilindro



Fonte: Aplicativo Geogebra 3 D (2024)

1. Observando e manipulando no Geogebra a planificação do cilindro, quais conclusões podemos tirar dessa experiência? Comente.

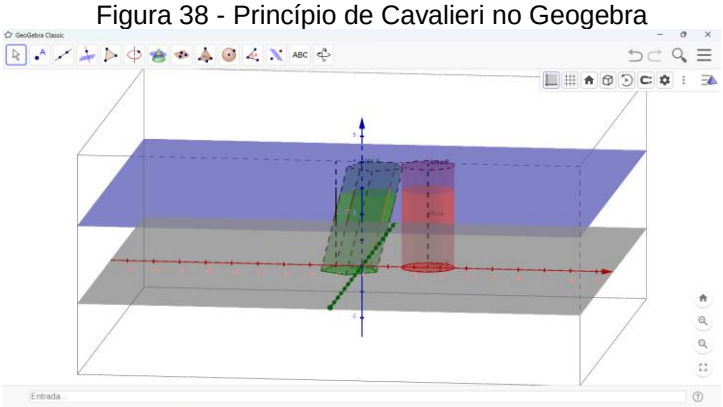
_____

2. Como podemos definir essas as áreas das figuras planificadas?

_____

Depois que os alunos responderem essas duas perguntas acimas, vamos concluir a formulação da área lateral, das bases e a total do cilindro. No próximo momento vamos abordar sobre o volume do cilindro. Primeiramente, vamos novamente dispor para os alunos um outro arquivo[2] do Geogebra que será demostrado o princípio de Cavalieri.

Figura 38 - Princípio de Cavalieri no Geogebra



Fonte: Geogebra 3D (2024)

3. Observando a demonstração dinâmica, como podemos definir a fórmula do volume do cilindro?

_____

Reforçaremos a dedução e a definição da fórmula do volume do cilindro.

4. Atividade contextualizado: Uma empresa de produção de embalagens está desenvolvendo uma nova lata de refrigerante cilíndrica, de alumínio, com altura de 15

[2] Disponível em : Arquivo disponível em: https://www.geogebra.org/m/xc9q9jxf

cm e raio de 2,5 cm. Qual é o volume interno da lata de refrigerante em cm^3? Para produzir uma lata lacrada, a empresa precisará de quantos cm^2 de área de alumínio?

_____

Agora, peça aos alunos para abrirem o app Geogebra e criar o objeto cilíndrico, inserindo os valores de r e h do problema contextualizado. Depois, peça para que o ativem as fórmulas das áreas e do volume do cilindro para responderam a seguinte pergunta.

5. Comparando os resultados obtidos no papel e no Geogebra, quais conclusões você chegou?

_____

4.3 BLOCO 3

ATIVIDADE 5: Conhecendo o sólido Cone.

Objetivo: Representar, visualizar e identificar os elementos do cone.

Análise A *priori* da expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que conceituam os elementos do cone por meio dos registros geométrico, pictórico e verbal.

Segundo Araújo (2015), acreditamos que os alunos podem enfrentar dificuldades ao trabalhar com os tratamentos no registro algébrico, já que isso exige conhecimento básico de geometria plana e cálculos matemáticos simples apreendidos no ensino fundamental. Por outro lado, é esperado que não encontrem muitas dificuldades em identificar os elementos do cone:

- Base: Um círculo.
- Altura (h): Distância perpendicular do vértice ao plano da base.
- Geratriz (g): Segmento de reta do vértice a qualquer ponto da circunferência da base.
- Raio (r): Distância do centro à borda da base.

Recursos utilizados: Smartphone com o aplicativo do Geogebra instalado, Canetas e folhas de atividades.

Quadro 14 - Objetivos da atividade 5

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos

Único	20 minutos	Utilizar o Geogebra para manusear o cone, visualizar e identifica seus elementos.

Fonte: Autor (2024)

1. Manuseia o Cone e identifique seus elementos com o auxílio do Geogebra.
2. Ao manusear os controles, o que você pode dizer sobre o comportamento dos elementos do cone?

_____

3. Preencha a tabela abaixo dando uma descrição para o cone, dados o raio (r) e a altura (h), em comparação com o cone reto e depois desenhe cada cone visto em duas perspectivas (frontal e acima).

Quadro 15 - Atividade 5. questão 3

Raio (r)	Altura (h)	Descrição
1	2	Cone 1:Um cone reto normal
1	5	Cone 2:
5	2	Cone 3:

Fonte: Autor (2024)

Quadro 16 - Atividade 5, desenhar

Desenho do Cone 1	Desenho do Cone 2	Desenho do Cone 3
Perspectiva frontal	Perspectiva frontal	Perspectiva frontal

Vista de cima	Vista de cima	Vista de cima

Fonte: Autor (2024)

4. Atividade contextualizado: Um artista plástico decide fazer uma estrutura em formato de ampulheta, que é uma figura tridimensional composta por dois cones (idênticos) conectados por suas bases e que têm o mesmo vértice. A altura total da ampulheta é de 400 centímetros, sendo que sua base tem uma circunferência de 31,4 centímetros. Qual é a altura de um dos cones? Qual é o valor da geratriz do cone? Expresse o abaixo o cálculo.

Desenhe a ampulheta

ATIVIDADE 6: Determinar as áreas e o volume do Cone.

Objetivo: Calcular e interpretar as fórmulas das áreas e volumes do cone.

Análise a *priori* da expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que definem as fórmulas das áreas e do volume do cone por meio dos registros algébrico, gráfico e verbal.

Segundo Pinheiro (2022), os alunos podem enfrentar dificuldades para identificar os objetos na planificação da superfície do cone, especialmente ao visualizar a superfície lateral como um setor circular. Também é comum que tenham dificuldade em identificar ou calcular corretamente a geratriz utilizando o Teorema de Pitágoras. Além disso, de acordo com Araújo (2017), os alunos podem encontrar obstáculos ao trabalhar com tratamentos no registro algébrico.

Recursos utilizados: Aplicativo Geogebra, Smartphones, papéis com as atividades e caneta.

Quadro 17 - Objetivos da atividade 6

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Primeiro	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar as superfícies planas do cone. Deduzir e manipular as fórmulas da área do cone.
Segundo	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar o volume do cone. Deduzir e manipular as fórmulas de volume do cone.

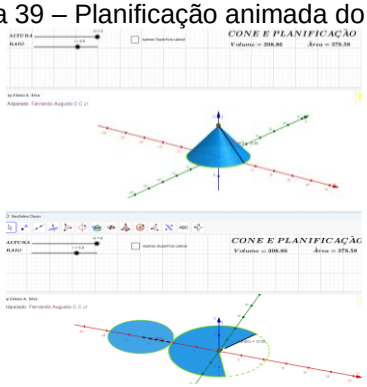
Fonte: Autor

Primeiro momento. Neste próximo exercício vamos estudar e determinar as áreas e o volume do cone. Com o auxílio do Geogebra, será repassado para os alunos um arquivo[3] do Geogebra onde eles vão manipular de forma dinâmica a planificação do cone (Figura 9 - Planificação do Cone). Neste momento os alunos poderão mover pelo vértice do cone a planificação de sua superfície. Também ajustar a altura e o raio.

1. Manipule a planificação do Cone, acessando o Geogebra.

[3] Disponível em : https://www.geogebra.org/m/nkbnw8zx

Figura 39 – Planificação animada do Cone



Fonte: Geogebra (2024)

2. Após manipular a dinâmica da planificação do cone, quais figuras planas são formadas?

_____

3. Como podemos chegar ao valor da área total do cone? Demostre o cálculo.

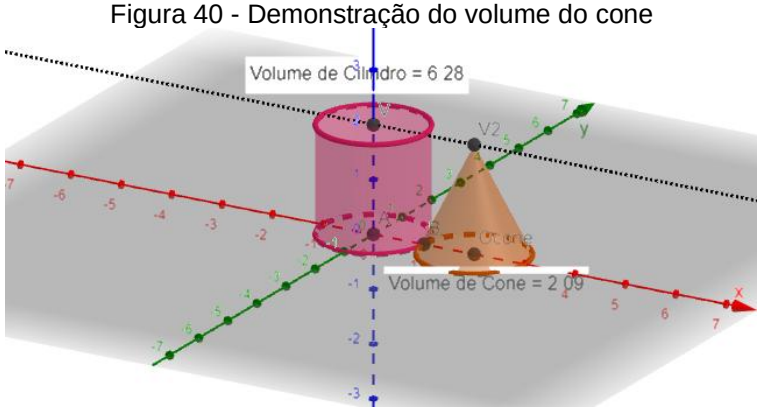
_____

4. Atividade Contextualizada: Júlia está criando um modelo de um cone para um projeto escolar e precisa calcular a área total da superfície do cone. O cone terá uma altura de 12 cm e um raio da base de 5 cm. Para completar seu projeto, Júlia deseja saber a quantidade de papel necessária para cobrir a superfície externa do cone, incluindo a base.

_____

Segundo momento. Neste ponto, abordaremos o volume do cone. Será disponibilizado aos alunos um novo arquivo[4] do Geogebra, no qual será demonstrada de forma dinâmica a dedução da fórmula do volume do cone por comparação de volumes. Na atividade dinâmica, os alunos manipularão os controles do raio e da altura dos objetos geométricos, que são um cilindro e um cone, ambos com a mesma altura e a mesma base.

Figura 40 - Demonstração do volume do cone



[4] Disponível em : https://www.geogebra.org/m/aygn5bfw

Fonte: Geogebra 3d (2024)

5. Observando os volumes do cone e do cilindro, o que podemos concluir sobre o volume do cone? Demostre o cálculo.

_____

6. Atividade contextualizada: Maria decidiu organizar uma festa de aniversário para sua filha e quer preparar uma grande quantidade de suco. Ela comprou um recipiente em formato de cone para servir o suco. O recipiente tem uma Geratriz de $10\sqrt{10}$ cm e um raio da base de 10 cm. Maria precisa saber quantos litros de suco o recipiente pode comportar para garantir que haja o suficiente para todos os convidados. Para isso, ela decide calcular o volume do cone em cm^3.

_____

4.4 BLOCO 4

ATIVIDADE 7: Conhecendo o sólido tronco de cone.

Objetivo: Representar, visualizar e identificar os elementos do tronco de cone.

Análise A *priori* da expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que conceituam os elementos do tronco de cone por meio dos registros Geométrico, Símbolo e Verbal. Mas, de acordo com Santos (2021) acreditamos que os alunos terão um pouco de dificuldade em identificar elementos dos objetos, cone menor e maior:

- Bases: Círculos de raios r_1 e r_2.
- Altura (h): Distância perpendicular entre as bases.
- Geratriz (g): Segmento que une os pontos correspondentes das bordas das bases.

Recursos utilizados: Smartphone com o aplicativo do Geogebra instalado, canetas e folhas de atividades.

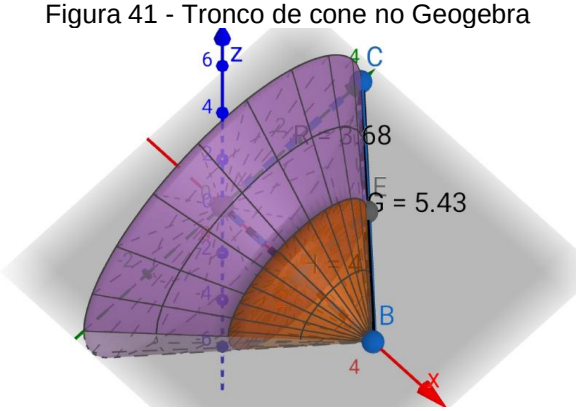
Quadro 18 - Objetivos da atividade 7

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Único	15 minutos	Utilizar o Geogebra para construir o tronco de cone por revolução, visualizar e identificar seus elementos.

Fonte: Autor

1. Manipule e identifique os elementos do Tronco de Cone.

Figura 41 - Tronco de cone no Geogebra



Fonte: Geogebra 3D (2024)

2. Observando e manipulando o objeto geométrico que você construiu, quais os elementos são particulares do tronco de cone?

_____

3. Agora, desenhe o tronco de cone visto de frente e identifique seus elementos.

_____

4. Maria é uma confeiteira e está planejando fazer um bolo, para um aluno de ciências, parecido com um vulcão de formato de tronco de cone mais um bolo “fake” de formato de cone sobre o bolo. A confeiteira tem as seguintes medidas: Altura do tronco de cone é igual a 30cm, raio da base maior é de 20 cm, raio da base menor é de 10 cm. Quando o bolo estiver completo no formato de um cone maior, qual será altura total dele? Esboce o cálculo.

_____

ATIVIDADE 8: As Áreas e o Volume do Tronco de Cone.

Objetivo: Calcular e interpretar as fórmulas das áreas e volume do tronco de cone. Análise a *priori* da expectativa na aprendizagem: Esperamos que o aluno, com o auxílio do Geogebra, mobilize, durante a realização dessa atividade, as representações que definem as fórmulas das áreas e do volume do tronco de cone por meio dos registros algébricos, gráficos e verbais.

Conforme afirmado por Santos (2021, p. 113), é esperado que os alunos apresentem dificuldades ao visualizarem figuras espaciais em suas representações no plano. Essa dificuldade se estende, especialmente, à visualização do tronco de cone, que precisa ser entendido como uma parte de um cone maior, e ao entendimento das relações geométricas entre as bases e a altura do objeto. Neitzel (2023) destaca que cálculos que envolvem a geratriz, especialmente em troncos de

cone, podem ser particularmente desafiadores, sobretudo para alunos que não têm uma base sólida em geometria plana e espacial.

Além disso, a complexidade das fórmulas que envolvem a soma dos raios das bases pode ser um obstáculo para estudantes que ainda não compreendem completamente as relações geométricas entre essas bases. Isso dificulta a aplicação das fórmulas de forma eficiente e precisa, visto que exige um nível maior de abstração e raciocínio matemático. Neste contexto, o cálculo do volume de um tronco de cone, que exige o domínio da álgebra e uma sólida compreensão das propriedades geométricas do sólido, é uma tarefa que, sem a prática contínua e a devida orientação, se torna um grande desafio para muitos alunos. Dessa forma, a falta de domínio sobre essas habilidades geométricas e algébricas pode prejudicar a compreensão do conteúdo, dificultando a aprendizagem efetiva.

Recursos utilizados: Smartphone com o aplicativo do Geogebra instalado, Canetas e folhas de atividades.

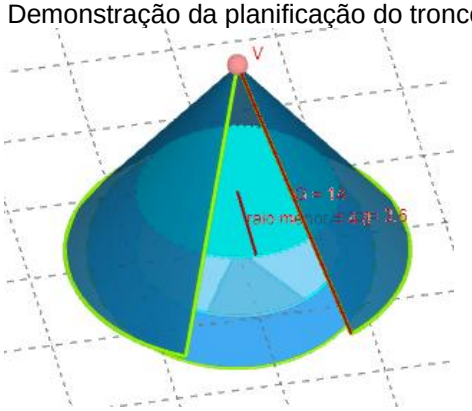
Quadro 19 - Objetivos atividade 8

Momento	Tempo Previsto	Objetivos Específicos
Primeiro	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar as superfícies planas do cone. Deduzir e manipular as fórmulas da área do tronco de cone.
Segundo	30 minutos	Utilizar o Geogebra para visualizar o volume do tronco de cone. Deduzir e manipular as fórmulas de volume do tronco de cone.

Fonte: Autor (2024)

Primeiro momento. Será disponibilizado para os alunos um arquivo[5] do Geogebra mostrando de forma dinâmica a planificação da superfície do tronco e cone.

Figura 42 - Demonstração da planificação do tronco de cone



Fonte: Geogebra 3D (2024)

1. Manipulando a planificação do tronco de cone, quais superfícies você observa?

[5] Disponível em : https://www.geogebra.org/m/r54xstxv

---

2. Como podemos calcular as áreas da superfície do tronco de cone?

Segundo momento. Neste momento, vamos iniciar o estudo sobre o volume do tronco de cone. O tronco de cone é um sólido tridimensional que resulta do corte de um cone por um plano paralelo à sua base. Em outras palavras, é a parte do cone que fica entre duas bases circulares paralelas, sendo uma de raio maior e a outra de raio menor.

Para facilitar a compreensão desse conceito, será fornecido aos alunos um arquivo do Geogebra. Este arquivo permite explorar de forma dinâmica e intuitiva o volume do tronco de cone, visualizando suas propriedades e variáveis de maneira interativa.

Cada aluno deverá interagir com o aplicativo, manipulando os parâmetros, como a altura e os raios das bases, para observar como essas mudanças afetam o volume do tronco de cone. Durante esse processo, o professor fornecerá orientações, explicando como as dimensões do tronco de cone influenciam o cálculo de seu volume. O objetivo é que os alunos compreendam o comportamento do tronco de cone, além de visualizar como ele se ajusta às variações dos seus elementos.

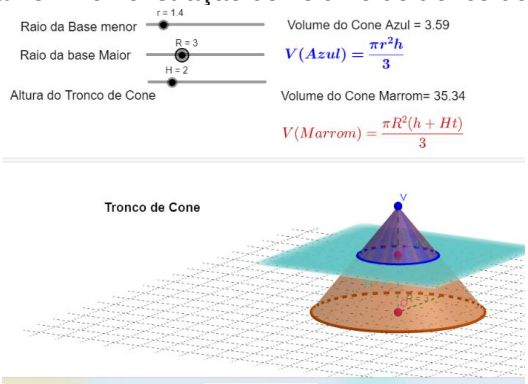
Ao utilizar o Geogebra, os alunos terão uma experiência mais rica e concreta, o que facilita o aprendizado e a internalização dos conceitos geométricos. A interatividade com o aplicativo tornará o estudo mais envolvente, permitindo aos alunos entenderem de forma prática as relações geométricas envolvidas no cálculo do volume do tronco de cone.

O principal objetivo desta atividade é permitir que os alunos representem os conceitos de espaço e forma da esfera e identifiquem seus elementos. Será uma introdução ao estudo da esfera, focando em suas propriedades geométricas, como a identificação do centro, raio e superfície esférica, além de abordar suas fórmulas para área e volume.

A expectativa é que os alunos, com o auxílio do Geogebra, mobilizem representações geométricas, algébricas e simbólicas durante a realização dessa atividade, o que permitirá que eles compreendam a relação entre a esfera e suas fórmulas matemáticas. Espera-se que, ao manipular o software, os alunos visualizem de forma mais clara os conceitos que envolvem a esfera, incluindo o raio, o diâmetro e o centro da esfera, além de aplicarem as fórmulas de área e volume de maneira

mais intuitiva. Acredita-se que, apesar do potencial de interatividade do Geogebra, muitos alunos terão dificuldades para associar os elementos geométricos às representações algébricas e simbólicas, conforme observado por Silva Filho (2015, p. 117), que aponta que os alunos enfrentam dificuldades no entendimento dos conceitos relacionados aos corpos redondos, especialmente à esfera.

Figura 43 - Demonstração do volume do tronco de cone



Fonte: Geogebra 3 D (2024)

3. Preencha a tabela abaixo usando o App Geogebra e o arquivo da demonstração do volume do tronco de cone.

Tabela 3 - Atividade 8

Raio Maior	Raio menor	Altura do Tronco	Volume Cone Maior	Volume Cone Menor	Volume do Tronco de Cone
2	1	3			
3	2		56,55		
	3	2		28,27	
4		3			87,96

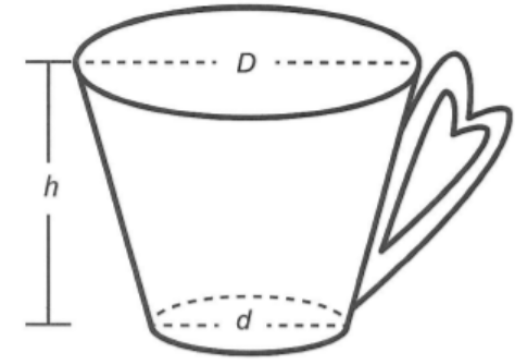
Fonte: Autor (2024)

4. Qual a fórmula do volume do tronco de cone, observando o comportamento do objeto no Geogebra? Explique os procedimentos adotados para encontrar o resultado

_____

5. Atividade contextualizada: Uma pessoa comprou uma caneca para tomar chá, conforme a ilustração. A abertura superior da caneca é uma circunferência com diâmetro (D) medindo 14 cm, e a base inferior é uma circunferência com diâmetro (d) medindo 10 cm. A altura (h) da caneca, que é a distância entre os centros das duas bases, é de 20 cm.

Figura 44 - Caneca



Fonte: Internet (2024)

Sabendo que 1 cm³ = 1 mL e utilizando 3 como aproximação para π, qual é a capacidade volumétrica, em mililitros, dessa lata? Expresse o cálculo.

_____

4.5 BLOCO 5

ATIVIDADE 9: Conhecendo o sólido Esfera.

O objetivo dessa atividade é possibilitar aos alunos a compreensão dos conceitos de espaço e forma associados à esfera, além de permitir a identificação dos elementos que a compõem, como o centro, o raio e a superfície esférica. A atividade também visa apresentar e trabalhar com as fórmulas da área da superfície e do volume da esfera, relacionando-as com as representações algébricas, geométricas e simbólicas.

Espera-se que os alunos, ao utilizarem o Geogebra durante a realização da atividade, sejam capazes de mobilizar representações geométricas e algébricas que conceituam a esfera e seus elementos. O uso da tecnologia permitirá que os alunos visualizem a esfera de diferentes ângulos e manipulem suas características. Espera-se que, através dessa interação, os estudantes compreendam a relação entre a forma geométrica e as representações simbólicas das fórmulas para calcular a área da superfície e o volume da esfera.

Segundo Silva Filho (2015, p. 117), “percebe-se que os alunos têm certas dificuldades em conceitos e propriedades dos corpos redondos, em particular relacionados à esfera”. Muitas vezes, os alunos enfrentam dificuldades em compreender o significado das fórmulas da área e volume da esfera, principalmente quando precisam associar os elementos geométricos às suas representações algébricas e simbólicas. Essas dificuldades podem ser especialmente notáveis

quando os estudantes não têm uma base sólida em geometria espacial, ou quando a transição entre representações gráficas e algébricas não é completamente clara. Além disso, o fato de a esfera ser uma figura tridimensional pode representar um desafio adicional na sua visualização e compreensão.

Durante a atividade, os alunos utilizarão o Geogebra para criar e manipular uma esfera, observando e identificando seus elementos principais, como o centro, o raio e a superfície. O professor guiará os alunos, explicando como a esfera pode ser representada e manipulada no software e como as fórmulas para o volume ($V = 4/3\ \pi\ r^3$) e a área da superfície ($A = 4\ \pi\ r^2$) podem ser visualizadas graficamente. Ao final da atividade, espera-se que os alunos sejam capazes de reconhecer a esfera como um sólido geométrico, identificar seus elementos e associar corretamente as fórmulas à representação simbólica, algébrica e geométrica. A compreensão de como a esfera é representada no plano e no espaço, bem como a aplicação das fórmulas em situações práticas, deve ser um dos principais resultados dessa atividade.

Recursos Utilizados: Smartphone, Caneta e papéis com as atividades.

Quadro 20 - Objetivos da atividade 9

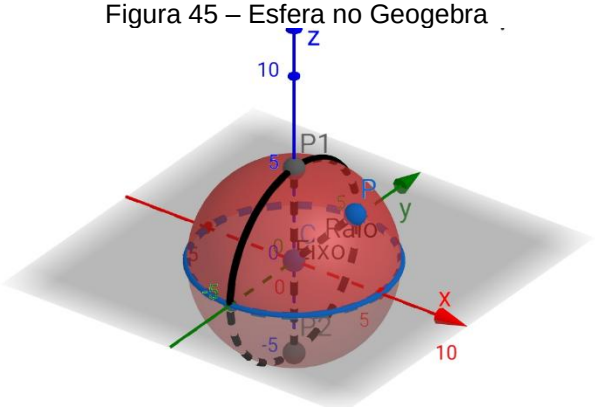
Momento	Tempo	Objetivo Específico
Primeiro	5 minutos	Identificar elementos como raio, diâmetro e superfície.
Segundo	45 minutos	Determinar a área e o volume de uma Esfera pelo Geogebra

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Primeiro momento.

1. Manuseia a esfera no Geogebra, disponível pelo QR-CODE

Figura 45 – Esfera no Geogebra

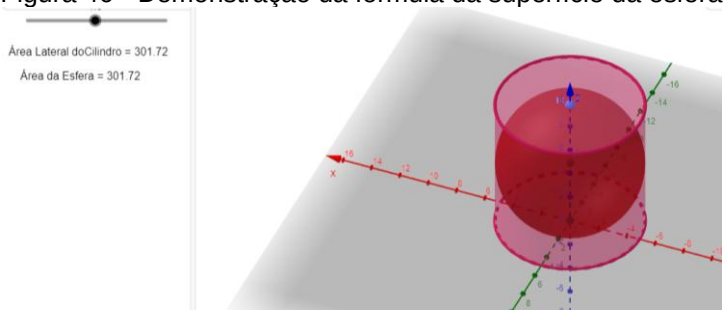


Fonte: Geogebra 3D (2024)

Quais são as principais características que você observa na esfera ao movimentar o objeto no app?

Segundo momento. Nesta etapa, será fornecido aos alunos um arquivo do Geogebra, que demonstra de forma dedutiva a relação entre a superfície de uma esfera e o espaço contido dentro de um cilindro equilátero, utilizando o método de Projeção Cilíndrica.

Figura 46 - Demonstração da fórmula da superfície da esfera



Fonte: Geogebra 3D (2024)

2. De acordo com a demonstração no aplicativo Geogebra, qual é a conclusão que você pode tirar ao comparar a superfície lateral do cilindro equilátero com a superfície da esfera?

3. Conforme sua resposta anterior, expresse a fórmula que calcula a superfície da esfera:

4. Atividade Contextualizada: Eratóstenes, um matemático e geógrafo grego do século III a.C., foi o primeiro a calcular a circunferência da Terra com notável precisão. Ele fez isso ao observar a diferença na posição do Sol em duas cidades egípcias, Alexandria e Siena (atual Assuã), no solstício de verão.

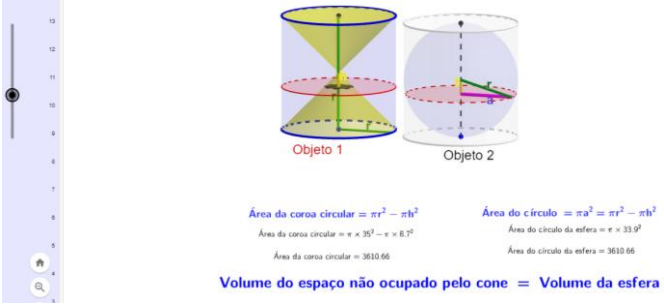
Imagine que você é um estudante de cartografia e está aprendendo sobre como a superfície esférica da Terra pode ser representada em diferentes tipos de mapas. Você aprende que, devido à curvatura da Terra, é necessário usar projeções para representar sua superfície em mapas planos, mas essas projeções sempre introduzem alguma forma de distorção. Eratóstenes estimou a circunferência da Terra como aproximadamente 40.000 km. Com base nisso, calcule o raio da Terra. (Use $\pi \approx 3{,}14$).

Neste momento, será entregue aos alunos um arquivo[6] do Geogebra que demonstra de forma dinâmica a fórmula do volume da esfera. Na demonstração, temos dois cilindros equiláteros: em um deles, há dois cones com a mesma base do cilindro, e no outro, há uma esfera com a mesma circunferência da base do cilindro.

[6] Disponível em : https://www.geogebra.org/m/wfebgrwn

Os alunos vão mover o controle deslizante que mostra as áreas de coroa circular e do círculo.

Figura 47 - Demonstração do Volume da esfera



Fonte: Geogebra (2024)

5. Ao manusear de forma dinâmica e observar a demonstração do volume da esfera, o que lhe chamou atenção?

6. Expresse aqui a fórmula do volume da esfera de acordo com a demonstração.

7. Atividade contextualizada: No ano de 2024, acontecem os Jogos Olímpicos de Paris, sediados na França. Na abertura do evento, os franceses foram criativos ao criarem um balão esférico para sustentar a pira olímpica, que sobrevoa a Cidade Luz. O balão suporta 392,5 m³ de gás hélio. Qual é o raio do balão?

Figura 48 - Pira Olímpica da França

Fonte: Imagem da Internet (2024)

5 EXPERIMENTAÇÃO

A experimentação deste trabalho foi realizada em cinco blocos, conforme apresentado no quadro 1 abaixo, com a descrição dos objetivos, dos dias e do tempo de duração de cada atividade. Em relação aos dias de aplicação em cada bloco, as atividades foram realizadas em duas ocasiões: A primeira, com alunos do 2º ano do ensino médio e outra com alunos do 3º ano do ensino médio, por isso temos duas datas distintas em cada Bloco.

Quadro 21 - Cronograma da Experimentação

Bloco	Atividade - Objetivo	Cronograma	Tempo/ Duração Média
1º	1 - Introdução ao estudo dos corpos redondos.	Dias 8 e 17 de outubro	10 min
	2 - Conhecer o artefato Geogebra e suas funcionalidades. Criar pontos, retas e planos (polígonos) com auxílio do Geogebra.	Dias 8 e 17 de outubro	20 min
2º	3 - Representar os conceitos de espaço e forma do Cilindro e identificar os seus elementos.	Dias 8 e 17 de outubro	20 min
	4 - Definir as áreas e o volume de um Cilindro.	Dias 8 e 17 de outubro	60 min
3º	5 - Representar os conceitos de espaço e forma do Cone e identificar os seus elementos.	Dias 10 e 22 de outubro	20 min
	6 - Determinar as áreas e o volume de um Cone.	Dias 10 e 22 de outubro	60 minutos
4º	7 - Representar os conceitos de espaço e forma do tronco de Cone e identificar os seus elementos.	Dias 15 e 24 de outubro	15 minutos
	8 - Determinar as áreas e o volume de um tronco de cone.	Dias 15 e 24 de outubro	60 minutos
5º	9 - Representar os conceitos de espaço e forma da Esfera e identificar os seus elementos. Determinar a área e o volume de uma Esfera.	Dias 15 e 24 de outubro	50 minutos

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A implementação da sequência didática enfrentou desafios significativos devido às controvérsias surgidas no segundo semestre de 2024 em torno do uso de dispositivos móveis (smartphones) nas escolas públicas. Essas controvérsias, associadas a uma má interpretação do projeto de lei sobre o tema, dificultaram a aplicação da proposta com o uso do aplicativo Geogebra. Foram realizadas visitas não formais a três escolas públicas localizadas nos distritos de Outeiro e Icoaraci, no

município de Belém do Pará. Contudo, o tempo limitado impossibilitou a ampliação das visitas a outras instituições.

Pois, os gestores escolares consultados indicaram que a aplicação da sequência didática não seria viável devido à proibição do uso de dispositivos móveis, elemento central para a execução da proposta. Questionados sobre a disponibilidade de laboratórios de informática com computadores, para fins pedagógicos, foi informado que, embora existissem em algumas unidades, os equipamentos não estavam operacionais.

Diante dessa limitação, foi necessário buscar apoio de alguns professores de Matemática da região Belém, no distrito de Outeiro, para facilitar o contato com os alunos. Esses docentes enviaram convites online aos estudantes do ensino médio da comunidade de Outeiro, explicando os objetivos da sequência didática. O processo resultou no retorno de 18 alunos, todos provenientes de escolas públicas, dos quais 10 obtiveram o consentimento dos pais por meio da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexo I, TCLE). Assim, o grupo amostral da pesquisa foi composto por esses 10 estudantes.

No primeiro contato com os alunos do 2º ano do ensino médio, realizado no dia 8 de outubro, foram apresentados a eles o material da sequência didática e a dinâmica das atividades. Conforme o quadro supracitado, no primeiro encontro foram realizadas as atividades dos blocos 1 e 2, com uma duração de 110 minutos. Antes da execução dessas atividades, é importante destacar que foi feita uma análise do perfil dos alunos. Esses estudantes são oriundos de escolas públicas do bairro de Outeiro e têm idades entre 16 e 18 anos.

Ainda nesse contexto, os alunos tiveram seu primeiro contato com o software GeoGebra, que conseguiram manipular de forma satisfatória. Por se tratar de uma tecnologia, era provável que não enfrentassem muitas dificuldades. No entanto, algumas dificuldades observadas foram relacionadas aos próprios dispositivos móveis, uma vez que alguns celulares apresentavam limitações devido a sistemas operacionais desatualizados (Android). Além disso, nessa faixa etária, é comum encontrar dificuldades relacionadas à organização e à gestão do tempo durante a execução das atividades, bem como à concentração, sobretudo quando expostos a tarefas mais complexas ou que exigem raciocínio abstrato. Fora isso, as atividades transcorreram bem.

No segundo encontro, realizado no dia 10 de outubro, foram aplicadas as atividades do bloco 3, com duração de 80 minutos. Não houve dificuldades significativas na execução dessas tarefas. Já no último encontro, ocorrido no dia 15 de outubro, desenvolvemos as atividades referentes ao objeto matemático tronco de cone. Houve certa demora na realização das tarefas devido à complexidade do tema, que é um dos mais desafiadores da geometria espacial do ensino médio. A duração total das atividades foi de 215 minutos. É importante ressaltar que, nesse nível de ensino, muitos alunos enfrentam dificuldades em visualizar figuras tridimensionais, o que pode impactar diretamente a compreensão dos conceitos de geometria espacial.

Com relação aos alunos do 3º ano do ensino médio, provenientes de escolas públicas de Icoaraci e Outeiro, tivemos nosso primeiro encontro no dia 17 de outubro, no qual foram realizadas as atividades dos blocos 1 e 2. Esses alunos, com idades entre 17 e 19 anos, demonstraram inicialmente dificuldades relacionadas ao conhecimento prévio de geometria plana e ao conteúdo já ministrado no ano anterior. Essa dificuldade é comum nessa etapa de formação, devido à fragmentação do aprendizado, a lacunas de conteúdos anteriores e à falta de prática recorrente. Além disso, muitos alunos nessa faixa etária tendem a ter maior resistência em retomar conteúdos já vistos, acreditando que já dominam o básico, o que pode dificultar a construção de novos conhecimentos. A realização das atividades teve duração de 110 minutos, assim como na turma do 2º ano.

No segundo encontro, realizado no dia 22 de outubro, foram aplicadas as atividades do bloco 3, com duração de 80 minutos, e não houve dificuldades significativas na execução das tarefas. No último encontro, realizado no dia 24 de outubro, foram desenvolvidas as atividades relacionadas ao tronco de cone. Assim como na turma anterior, houve certa demora na realização das tarefas, devido à complexidade do tema. Além disso, muitos alunos apresentaram dificuldades em relacionar os elementos geométricos do tronco de cone, como altura, geratriz e bases, à fórmula de volume e área total. Essa dificuldade é potencializada pela falta de domínio das operações matemáticas envolvidas e pela necessidade de transitar entre os registros geométrico e algébrico. A duração total das atividades nesse encontro foi de 215 minutos.

Portanto, esses são os sujeitos de amostra de nossa pesquisa. No relato desta pesquisa identificaremos os 6 alunos do 2º ano do ensino médio (respectivamente de 2M1, 2M2, 2M3, 2M4, 2M5 e 2M6) e os 4 alunos do 3º do ensino médio (ao mesmo

tempo de 3M1, 3M2, 3M3 e 3M4), ambos os grupos de escolas públicas do distrito de Outeiro, situado no município de Belém-PA.

Sobre o nivelamento de conhecimentos dos alunos participantes, é importante destacar a importância desse pré-conhecimento de geometria espacial que foi perguntado a cada um deles, se eles lembravam ou que já tinha estudado os seguintes assuntos da geometria plana: semelhança de triângulos; Relações métricas de triângulos retângulos; áreas de figuras elementares; fórmulas de áreas de triângulos, paralelogramos e trapézio; e área do círculo e suas partes.

Os alunos do 2º ano do ensino médio 2M1, 2M2, 2M3 e 2M4 recordam das aulas desses assuntos acima, mas os alunos 2M5 e 2M6 não lembravam dos assuntos. Já os alunos do 3º ano do ensino médio 3M1 e 3M2 recordavam dos assuntos enquanto os alunos 3M3 e 3M4 não relembravam.

6 ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

A análise se deu por meio de recordes das produções dos sujeitos da sequência didática onde evidenciamos indícios de aprendizado de acordo com análise a *priori* (Consistiu na descrição das expectativas relacionadas às atividades propostas) e a *posteriori* e validação (Centrou-se na avaliação detalhada de cada atividade, confrontando os resultados obtidos com as hipóteses iniciais), começando por descrição e depois a análise propriamente de cada atividade.

Descrição e análise da atividade 1.

A aplicação da Atividade 1, voltada para a introdução de conceitos iniciais sobre corpos redondos, seguiu o planejamento estabelecido para os alunos do ensino médio. O foco foi a contextualização e o reconhecimento das características geométricas desses corpos, com ênfase no desenvolvimento dos registros semióticos (verbal, visual e algébrico). A análise das respostas dos alunos revelou níveis variados de compreensão e envolvimento, alinhando-se, em sua maioria, às expectativas formuladas na análise a *priori*.

A atividade buscou explorar, principalmente, os registros verbal e visual, aproveitando a familiaridade intuitiva dos alunos com objetos do cotidiano. Essa abordagem permitiu que os estudantes começassem a perceber as formas geométricas presentes no ambiente e as associaram aos corpos redondos, iniciando a abstração dos conceitos geométricos a partir de uma base concreta.

Na Figura 49, observamos a resposta do aluno 2M1, que descreve os corpos geométricos utilizando o registro verbal, convertendo as representações visuais das figuras em descrições linguísticas. O aluno se refere à esfera como “esfera circular com lados iguais”, ao cone como “cone, base redonda e com bico” e ao tronco de cone como “tronco de cone, base redonda com ponta oposta circular”. Essas descrições, embora simples, demonstram um processo de mobilização do registro verbal, evidenciando a conversão das representações visuais em uma linguagem descritiva e interpretativa.

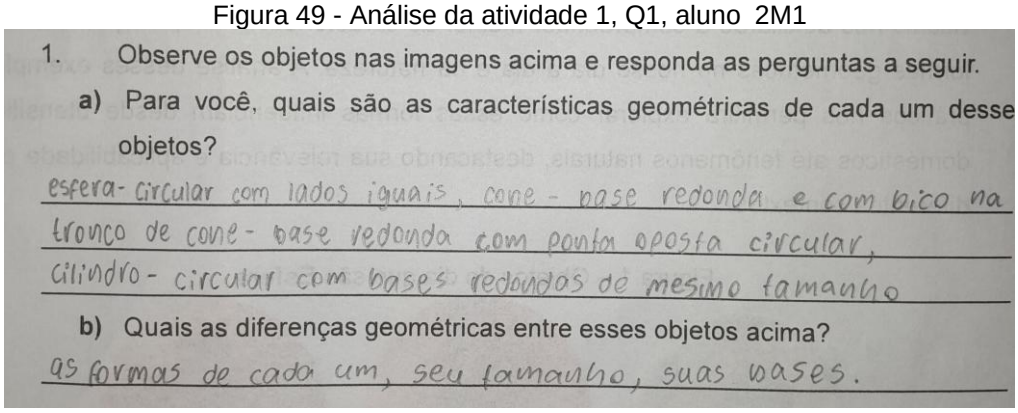
Esse tipo de resposta reflete o processo de apreensão operatória de posição, conforme descrito por Duval (2012). O autor explica que, nesse processo, o aluno reorganiza a informação visual que recebe (como figuras ou imagens) e a traduz em termos verbais, criando uma representação mental do objeto. Essa é uma habilidade inicial no desenvolvimento da compreensão de formas geométricas, uma vez que o

aluno deve associar propriedades visuais e características dos corpos redondos às palavras adequadas para descrever essas formas.

No contexto da atividade, a descrição do aluno 2M1 mostra que ele é capaz de identificar as características essenciais dos corpos redondos, como a circularidade da base do cone e do tronco de cone, e a uniformidade da esfera, embora a expressão "lados iguais" seja uma simplificação. Essa simplificação pode ser vista como uma etapa natural do processo de aprendizagem, em que o aluno ainda está ajustando seu vocabulário e a precisão na descrição das propriedades geométricas.

A análise das respostas dos alunos revela que a atividade alcançou parcialmente os objetivos propostos. A utilização de objetos do cotidiano como ponto de partida para a identificação dos corpos redondos permitiu que os alunos fizessem uma primeira aproximação das formas geométricas. A mobilização dos registros semióticos (verbal e visual) evidenciou a tentativa de tradução das representações visuais para uma linguagem mais acessível, refletindo uma construção inicial do conhecimento geométrico. A atividade foi eficaz em introduzir conceitos iniciais, e as dificuldades observadas nas respostas indicam áreas de aprofundamento para atividades subsequentes, como a necessidade de melhorar a precisão no uso da terminologia geométrica.

Figura 49 - Análise da atividade 1, Q1, aluno 2M1


1. Observe os objetos nas imagens acima e responda as perguntas a seguir.

a) Para você, quais são as características geométricas de cada um desse objetos?

esfera- circular com lados iguais, cone - base redonda e com bico na
tronco de cone- base redonda com ponta oposta circular,
cilindro- circular com bases redondas de mesmo tamanho

b) Quais as diferenças geométricas entre esses objetos acima?

as formas de cada um, seu tamanho, suas bases.

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Na Figura 50, a resposta do aluno 2M6, que se limitou a afirmar que "todos eles têm uma parte circular", revela uma dificuldade significativa na conversão entre os registros verbal e visual, e na exploração mais profunda dos atributos geométricos dos corpos redondos. Embora o aluno tenha identificado corretamente a característica comum entre os objetos (a presença de uma base circular), a resposta carece de uma compreensão mais ampla das propriedades desses corpos e da capacidade de diferenciação entre eles.

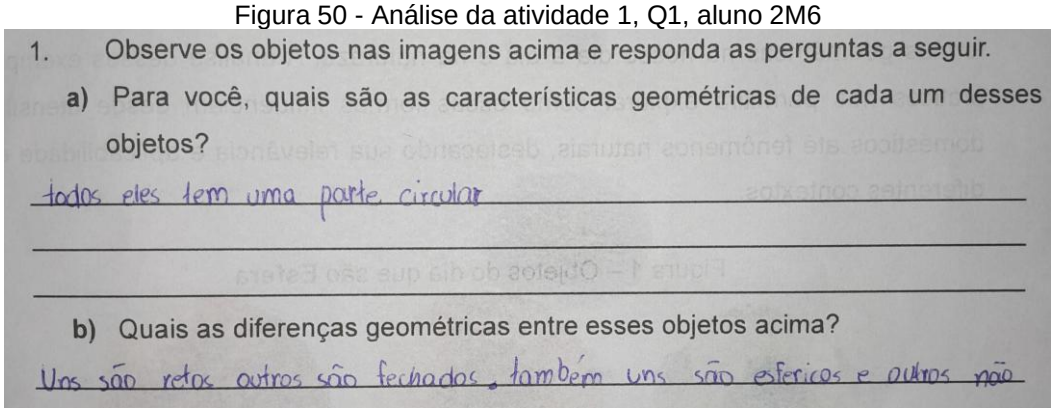
Esse tipo de limitação evidencia que o aluno não conseguiu avançar no raciocínio geométrico para reconhecer as particularidades de cada corpo redondo, como a esfera, o cone ou o cilindro. Em vez disso, o aluno focou em um atributo geral, porém superficial, que não permite uma análise mais aprofundada das figuras. Tal dificuldade reforça a necessidade de intervenções didáticas específicas, que incentivem os alunos a realizarem uma análise mais detalhada dos corpos geométricos, promovendo, assim, uma maior articulação entre os registros verbal e visual.

A análise a *priori* já havia sinalizado a possibilidade de dificuldades na conversão de registros, principalmente no que se refere à transição do visual para o verbal. Essa dificuldade de conversão, como observada na resposta de 2M6, destaca a importância de atividades didáticas que não apenas incentivem o reconhecimento de características geométricas, mas que também desafiem os alunos a articular essas características de forma precisa e diferenciada em registros verbais.

As intervenções didáticas necessárias devem se concentrar em estratégias que ampliem a exploração dos atributos geométricos, por meio de atividades que envolvam mais diretamente os conceitos de volume, área da superfície e relacionamento entre as bases e as geratrizes dos corpos redondos. Além disso, é fundamental incentivar o uso de representações visuais mais detalhadas, como o uso do Geogebra ou outras ferramentas, que ajudem os alunos a visualizarem as diferentes formas tridimensionais em várias perspectivas e a compreender suas propriedades específicas.

A limitação observada na resposta do aluno 2M6 evidencia uma necessidade clara de aprofundamento nas atividades que promovam o desenvolvimento da habilidade de conversão entre os registros, especialmente o verbal e o visual. Isso permitirá que os alunos consigam ir além de uma descrição superficial, reconhecendo e articulando melhor os atributos geométricos dos corpos redondos. A próxima fase do ensino deve enfatizar atividades que estimulem a observação detalhada das propriedades geométricas, com foco no fortalecimento da precisão nas descrições e na exploração dos conceitos matemáticos de forma mais formal.

Figura 50 - Análise da atividade 1, Q1, aluno 2M6



1. Observe os objetos nas imagens acima e responda as perguntas a seguir.

a) Para você, quais são as características geométricas de cada um desses objetos?

todos eles tem uma parte circular

b) Quais as diferenças geométricas entre esses objetos acima?

Uns são retos outros são fechados, também uns são esfericos e outros não

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

A aplicação da Atividade 1, voltada para a introdução de conceitos iniciais sobre corpos redondos, seguiu o planejamento estabelecido para os alunos do ensino médio. O foco foi a contextualização e o reconhecimento das características geométricas desses corpos, com ênfase no desenvolvimento dos registros semióticos (verbal, visual e algébrico). A análise das respostas dos alunos revelou níveis variados de compreensão e envolvimento, alinhando-se, em sua maioria, às expectativas formuladas na análise a *priori*.

A atividade buscou explorar, principalmente, os registros verbal e visual, aproveitando a familiaridade intuitiva dos alunos com objetos do cotidiano. Essa abordagem permitiu que os estudantes começassem a perceber as formas geométricas presentes no ambiente e as associaram aos corpos redondos, iniciando a abstração dos conceitos geométricos a partir de uma base concreta.

Na Figura 49, observamos a resposta do aluno 2M1, que descreve os corpos geométricos utilizando o registro verbal, convertendo as representações visuais das figuras em descrições linguísticas. O aluno se refere à esfera como “esfera circular com lados iguais”, ao cone como “cone, base redonda e com bico” e ao tronco de cone como “tronco de cone, base redonda com ponta oposta circular”. Essas descrições, embora simples, demonstram um processo de mobilização do registro verbal, evidenciando a conversão das representações visuais em uma linguagem descritiva e interpretativa.

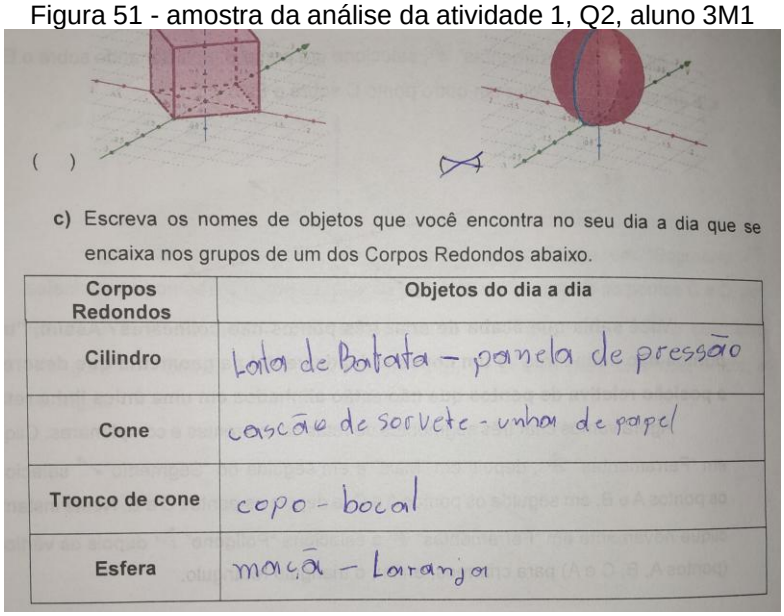
Esse tipo de resposta reflete o processo de apreensão operatória de posição, conforme descrito por Duval (2012). O autor explica que, nesse processo, o aluno reorganiza a informação visual que recebe (como figuras ou imagens) e a traduz em termos verbais, criando uma representação mental do objeto. Essa é uma habilidade inicial no desenvolvimento da compreensão de formas geométricas, uma vez que o

aluno deve associar propriedades visuais e características dos corpos redondos às palavras adequadas para descrever essas formas.

No contexto da atividade, a descrição do aluno 2M1 mostra que ele é capaz de identificar as características essenciais dos corpos redondos, como a circularidade da base do cone e do tronco de cone, e a uniformidade da esfera, embora a expressão "lados iguais" seja uma simplificação. Essa simplificação pode ser vista como uma etapa natural do processo de aprendizagem, em que o aluno ainda está ajustando seu vocabulário e a precisão na descrição das propriedades geométricas.

A análise das respostas dos alunos revela que a atividade alcançou parcialmente os objetivos propostos. A utilização de objetos do cotidiano como ponto de partida para a identificação dos corpos redondos permitiu que os alunos fizessem uma primeira aproximação das formas geométricas. A mobilização dos registros semióticos (verbal e visual) evidenciou a tentativa de tradução das representações visuais para uma linguagem mais acessível, refletindo uma construção inicial do conhecimento geométrico. A atividade foi eficaz em introduzir conceitos iniciais, e as dificuldades observadas nas respostas indicam áreas de aprofundamento para atividades subsequentes, como a necessidade de melhorar a precisão no uso da terminologia geométrica.

Figura 51 - amostra da análise da atividade 1, Q2, aluno 3M1



( )

c) Escreva os nomes de objetos que você encontra no seu dia a dia que se encaixa nos grupos de um dos Corpos Redondos abaixo.

Corpos Redondos	Objetos do dia a dia
Cilindro	Lata de Batata – panela de pressão
Cone	casca de sorvete - unha de papel
Tronco de cone	copo - bocal
Esfera	maçã – Laranja

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Portanto, esse momento inicial da atividade 1 cumpre o objetivo previsto na análise a *priori*, que era introduzir os corpos redondos e suas características de maneira intuitiva, ancorada em objetos cotidianos, como de acordo a tabela 4, os alunos mobilizaram esses objetivos. O uso de descrições linguísticas e interpretações

visuais pelos alunos reflete um estágio inicial de conceitualização, que, conforme Duval (1993), é um passo necessário para a consolidação do aprendizado geométrico. Além disso, a abordagem multifuncional citada na análise a *priori* abre caminho para que os alunos avancem no entendimento desses conceitos ao longo das atividades subsequentes.

Tabela 4 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 1

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).										

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Descrição e análise da atividade 2.

Na Atividade 2, os alunos tiveram seu primeiro contato com o Geogebra, um artefato tecnológico, conforme definido por Rabardel (1995). Nesse contexto, os alunos foram desafiados a construir três das quatro figuras planas que resultariam em corpos redondos, aplicando conceitos fundamentais da geometria euclidiana, frequentemente abordados no ensino médio. O principal objetivo desta experiência inicial foi familiarizar os alunos com o manuseio do software, proporcionando uma aproximação entre a teoria geométrica e o uso de ferramentas tecnológicas. Ao permitir que os alunos construíssem figuras geométricas de forma interativa, a atividade buscou conectar o conhecimento abstrato da geometria à visualização prática por meio do Geogebra.

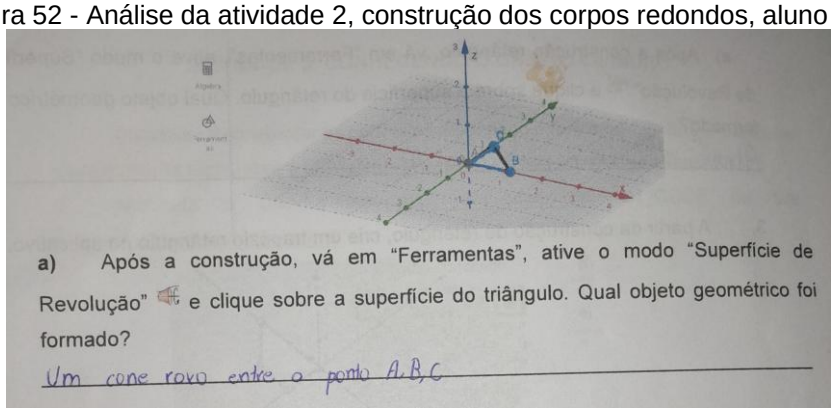
Durante a atividade, a partir da segunda construção (Figura 52), os alunos começaram a apresentar esquemas de indícios elementares que diferiam dos comandos fornecidos nas questões, mas ainda resultavam nas figuras planas esperadas. Este comportamento evidencia a análise a *priori*, que apontava a expectativa de que os alunos mobilizassem esquemas de uso com o auxílio do Geogebra, e utilizassem registros verbais e tecnológicos, incorporando os conceitos introdutórios de geometria de posição e a habilidade de realizar tratamentos nas construções dos objetos geométricos.

Esse desenvolvimento está em linha com as observações de Abar e Alencar (2013) e Henriques (2021), que descrevem esse momento como o início do processo de instrumentalização. Nessa fase, os alunos começam a criar seus próprios

esquemas de utilização do Geogebra, indo além dos comandos iniciais e explorando as ferramentas do software de maneira mais autônoma. Esses esquemas podem ser acomodados, generalizados ou até recriados, o que indica o desenvolvimento de competências instrumentais. Em outras palavras, os alunos passam a usar o Geogebra não mais como um simples artefato, mas como um instrumento de aprendizagem significativo, essencial para a construção e compreensão dos conceitos geométricos de forma mais interativa e exploratória.

Esse processo é fundamental, pois implica na transição do Geogebra de uma ferramenta apenas funcional para um instrumento cognitivo que facilita o aprendizado e a compreensão da geometria, potencializando as habilidades dos alunos na manipulação e representação visual dos objetos geométricos.

Figura 52 - Análise da atividade 2, construção dos corpos redondos, aluno 3M2



Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Ao final da Atividade 2, conforme ilustrado na Figura 53, os alunos foram desafiados a identificar a figura plana que gera a esfera. Todos responderam "círculo", embora o correto fosse o semicírculo. Essa escolha evidencia que, embora os alunos apresentem uma compreensão inicial do conceito de sólidos de revolução, ainda enfrentam dificuldades em estabelecer a relação exata entre as figuras planas e os sólidos tridimensionais gerados por sua rotação.

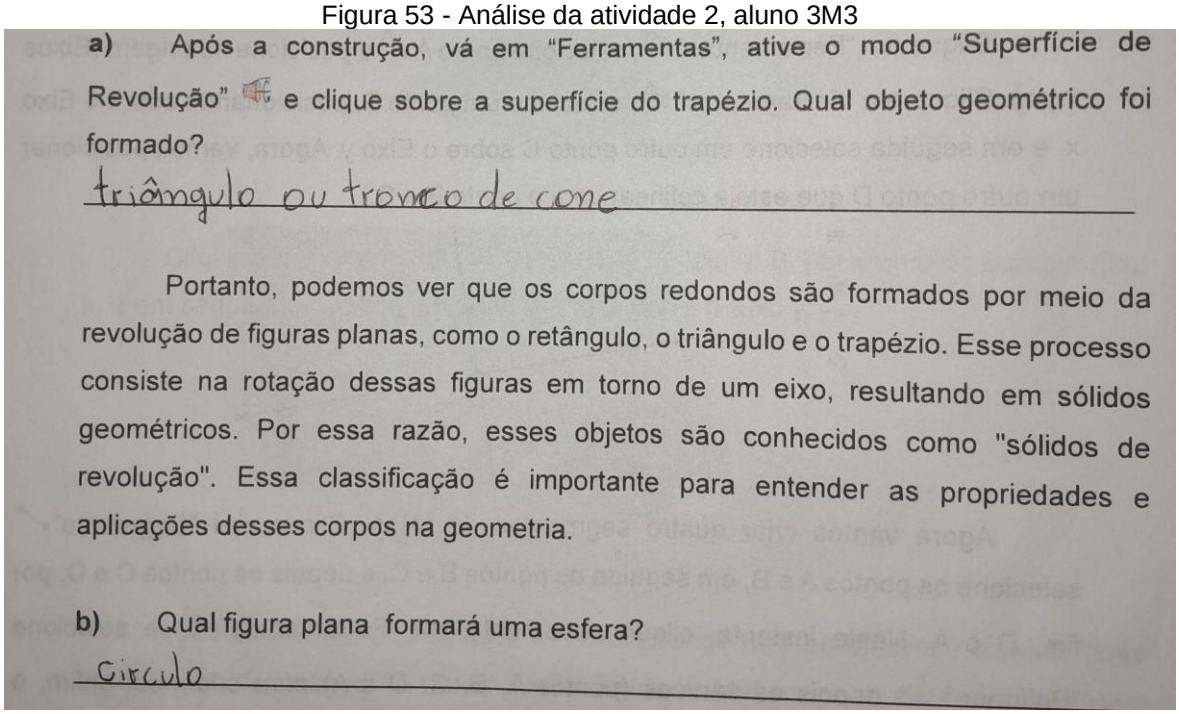
Como apontado por Nadalon (2018) e Hellmann (2021), essa dificuldade é recorrente nos estágios iniciais do aprendizado geométrico, especialmente ao lidar com abstrações que envolvem movimentos de rotação. A ideia de que a esfera é gerada pelo semicírculo rotacionado ao redor de seu diâmetro exige dos alunos a habilidade de visualizar mentalmente o processo dinâmico, o que representa um desafio significativo, particularmente em contextos introdutórios.

Essa resposta incorreta, porém, demonstra um progresso inicial no desenvolvimento da habilidade de associar figuras planas a sólidos, indicando que os

alunos já reconhecem o círculo como uma figura chave associada à geometria da esfera. Esse avanço, ainda que parcial, é um indicativo positivo de que a sequência didática está fomentando a construção de conceitos geométricos fundamentais, mesmo que a precisão ainda precise ser aprimorada.

Para superar essas limitações, os próximos blocos da sequência didática devem reforçar o conceito de sólidos de revolução, com atividades que combinem visualizações dinâmicas, manipulação de software (como o Geogebra) e representações concretas. Esses recursos poderão auxiliar o aluno a interpretar corretamente as relações entre as figuras planas e os sólidos correspondentes, promovendo uma compreensão mais sólida e detalhada do tema.

Figura 53 - Análise da atividade 2, aluno 3M3



a) Após a construção, vá em "Ferramentas", ative o modo "Superfície de Revolução" e clique sobre a superfície do trapézio. Qual objeto geométrico foi formado?

triângulo ou tronco de cone

Portanto, podemos ver que os corpos redondos são formados por meio da revolução de figuras planas, como o retângulo, o triângulo e o trapézio. Esse processo consiste na rotação dessas figuras em torno de um eixo, resultando em sólidos geométricos. Por essa razão, esses objetos são conhecidos como "sólidos de revolução". Essa classificação é importante para entender as propriedades e aplicações desses corpos na geometria.

b) Qual figura plana formará uma esfera?

Circulo

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Sob a perspectiva da teoria instrumental de Rabardel (1995), esse momento pode ser compreendido como a fase inicial dos Esquemas de Uso, em que os alunos começam a explorar as características, estrutura e propriedades do Geogebra de forma prática e contextualizada. Nesse estágio, os estudantes ainda estão se familiarizando com as funcionalidades do software, enquanto constroem a base necessária para desenvolver esquemas mais avançados de manipulação e uso. Essa etapa desempenha um papel crucial no processo de transformação do artefato em um instrumento efetivo de interação com objetos geométricos, como as figuras planas e os sólidos de revolução em estudo.

De acordo com a Tabela 5, os registros dos alunos demonstram a mobilização de esquemas de uso com o auxílio do Geogebra. Essa mobilização ocorre à medida que os estudantes utilizam registros verbais e tecnológicos para descrever os objetos gerados pelas revoluções das figuras planas, integrando os conceitos introdutórios de geometria de posição. A análise *posteriori* reforça os pressupostos apresentados na análise a *priori*, validando a expectativa de que os alunos iriam articular esses registros com as funcionalidades do software para consolidar o aprendizado geométrico.

De acordo com a tabela 5, observamos nos registros dos alunos, que eles mobilizaram esquemas de uso com auxílio do Geogebra, quando descrevem registros verbal e tecnológico os objetos geradas pelas revoluções das figuras planas e por meio dos conceitos introdutória de geometria de posição. Também essa análise *posteriori* confirma nossa análise a *priori*.

Tabela 5 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 2

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).										

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Portanto, essa atividade inicial não só introduziu os alunos ao uso do Geogebra, mas também permitiu que eles começassem a instrumentalizar o artefato, explorando conceitos geométricos em um ambiente interativo. Como resultado, ela preparou o terreno para um aprendizado mais profundo e integrado, no decorrer da sequência didática, em que a construção de sólidos e a visualização de revoluções geométricas poderão ser abordadas com maior compreensão.

Descrição e análise da atividade 3.

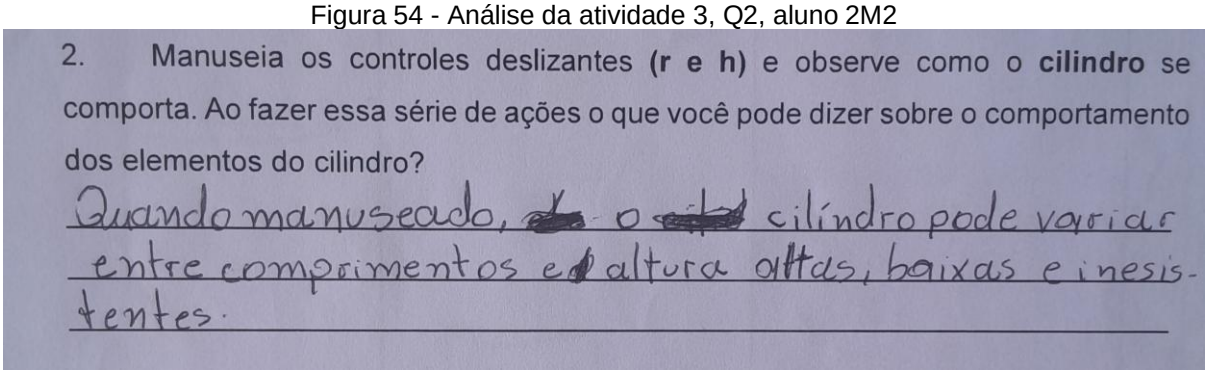
Primeiramente, após a interação inicial com o artefato no bloco anterior, o Geogebra começou a assumir efetivamente o papel de instrumento, conforme descrito por Rabardel (1995). Esse avanço ocorre à medida que os alunos desenvolvem esquemas de uso, permitindo-lhes explorar e interagir com o software de forma funcional e significativa. Na atividade 3, foi possível observar esse processo de instrumentação enquanto os alunos investigavam o conceito de cilindro, utilizando o Geogebra como mediador no aprendizado geométrico.

O objetivo central dessa atividade foi familiarizar os alunos com as características do cilindro, possibilitando a manipulação de elementos como altura, raio das bases e estrutura tridimensional. Conforme previsto na análise a *priori*, esperava-se que os alunos mobilizassem registros verbal, geométrico, simbólico e tecnológico ao longo da atividade, enfrentando eventuais dificuldades, como a confusão entre altura e geratriz ou a interpretação de perspectivas geométricas variadas. Tais dificuldades, como apontado por Sanchez (2018), foram mitigadas pelo uso do Geogebra, que atuou como recurso visual e dinâmico, facilitando a identificação dos elementos geométricos.

Nesse contexto, ao responderem às questões 1 a 3 da atividade, apresentadas nas figuras 54 a 56, os alunos manipularam diferentes tipos de cilindros retos, ajustando variáveis no Geogebra para observar alterações nas dimensões e proporções dos sólidos. Um exemplo relevante pode ser observado na figura 54, em que um aluno destacou: "O cilindro pode variar entre comprimento e altura altas, baixas e inexistentes". Essa reflexão, realizada após a manipulação no Geogebra, demonstra uma interessante conversão do registro gráfico para o registro verbal, evidenciando a percepção das características do cilindro e a inexistência do objeto em casos em que o raio (r) ou a altura (h) são iguais a zero.

Os demais alunos também apresentaram respostas categóricas sobre a forma física do objeto, reforçando o papel do Geogebra na construção de conceitos geométricos de forma concreta e interativa.

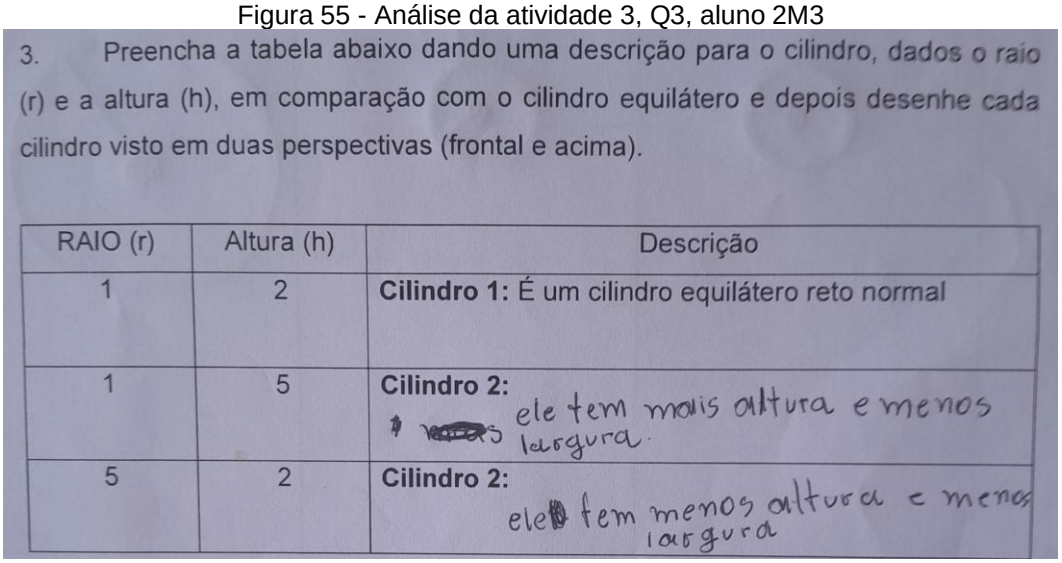
Figura 54 - Análise da atividade 3, Q2, aluno 2M2


2. Manuseia os controles deslizantes **(r e h)** e observe como o **cilindro** se comporta. Ao fazer essa série de ações o que você pode dizer sobre o comportamento dos elementos do cilindro?

Quando manuseado, o cilíndro pode variar entre comprimentos e altura altas, baixas e inesistentes.

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Figura 55 - Análise da atividade 3, Q3, aluno 2M3



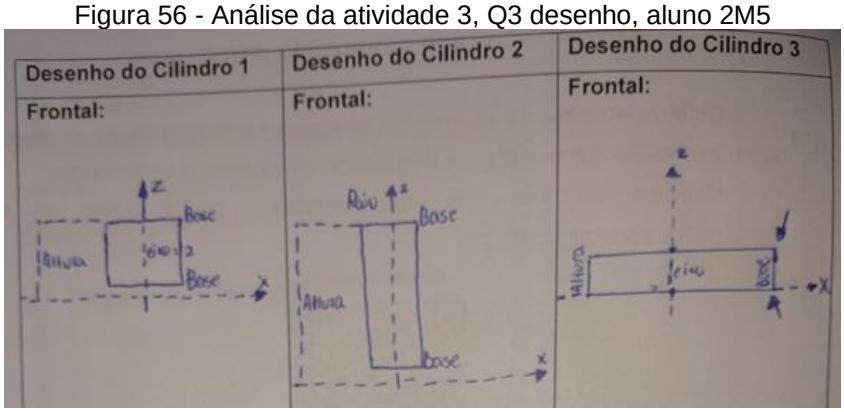
3. Preencha a tabela abaixo dando uma descrição para o cilindro, dados o raio (r) e a altura (h), em comparação com o cilindro equilátero e depois desenhe cada cilindro visto em duas perspectivas (frontal e acima).

RAIO (r)	Altura (h)	Descrição
1	2	**Cilindro 1:** É um cilindro equilátero reto normal
1	5	**Cilindro 2:** ele tem mais altura e menos largura.
5	2	**Cilindro 2:** ele tem menos altura e menos largura

Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Conforme observado na figura 56, todos os alunos apresentaram uma percepção semelhante à do aluno 2M5 ao representarem seus desenhos a partir de seus pontos de vista. Especificamente, o aluno 2M5 destacou-se por nomear e indicar com precisão a localização de cada elemento do cilindro. Embora outros alunos tenham sido menos detalhistas em suas representações, o desempenho geral reforça a consistência entre nossa análise a *priori* e os resultados obtidos, evidenciando que os objetivos de reconhecimento e identificação dos elementos geométricos estão sendo alcançados.

Figura 56 - Análise da atividade 3, Q3 desenho, aluno 2M5



Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Ainda nesse contexto, de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1993), os alunos mobilizaram, nas questões de 1 a 3, principalmente o registro gráfico ao manipularem as perspectivas dos cilindros no software Geogebra. Essa manipulação envolveu tratamentos no registro gráfico, como a alteração de variáveis (altura e raio), para organizar e compreender as características internas dos cilindros. Esse processo de interação com o artefato

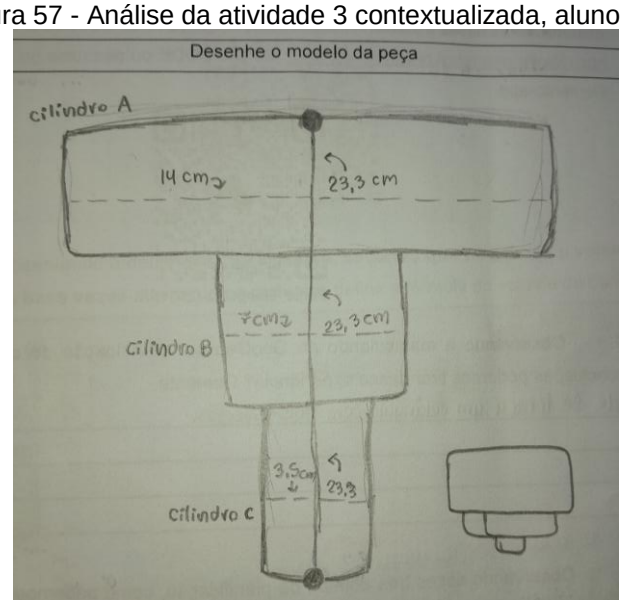
digital, à luz da Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), representa uma etapa essencial da gênese instrumental, em que o artefato (Geogebra) se transforma em instrumento de aprendizagem por meio da criação de esquemas de uso.

Segundo Rabardel (1995), a interação com um artefato, como o Geogebra, possibilita que os alunos desenvolvam esquemas de ação instrumental que, além de facilitar a realização de tarefas primárias, promovem a internalização de conceitos matemáticos. No caso analisado, o uso do software permitiu uma exploração dinâmica dos cilindros, ampliando a compreensão de suas propriedades. Essa instrumentação potencializou a transição semiótica entre os registros gráfico (visual) e escritos (verbal e pictórico). Além disso, a transição dos alunos do registro gráfico para os registros escritos e pictóricos, ao representarem os cilindros por meio de desenhos manuais e descrições textuais, exemplifica o processo de conversão semiótica descrito por Duval (1993). Complementando essa análise, Bittar (2015) e Valletta (2020) destacam que o sucesso dessa conversão está diretamente relacionado à forma como o artefato é instrumentalizado. Nesse contexto, o Geogebra, ao oferecer representações dinâmicas e interativas, atuou como mediador cognitivo, permitindo que os alunos estabelecessem conexões entre diferentes representações e aprofundassem sua compreensão de sólidos tridimensionais.

Essa integração entre registros e o uso do artefato digital reflete o que Rabardel (1995) denomina "mediação epistêmica". Por meio da articulação de perspectivas tridimensionais com descrições textuais e pictóricas, os alunos conseguiram superar barreiras cognitivas, alcançando uma compreensão mais integrada e sistêmica dos corpos redondos.

Ademais, na questão contextualizada (questão 4), os alunos avançaram na exploração do conceito de cilindro ao representarem graficamente uma peça industrial descrita em linguagem natural. Durante esse exercício, mobilizaram uma conversão do registro linguístico para o pictórico, conforme destacado por Duval (1993), exigindo a interpretação de informações textuais para a construção de uma representação geométrica precisa. Nesse processo, ajustaram sobreposições de cilindros de diferentes tamanhos, respeitando as proporções e dimensões indicadas no enunciado, como ilustrado na figura 57.

Figura 57 - Análise da atividade 3 contextualizada, aluno 2M1



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Ainda nesse contexto, de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1993), os alunos mobilizaram, nas questões de 1 a 3, principalmente o registro gráfico ao manipularem as perspectivas dos cilindros no software Geogebra. Essa manipulação envolveu tratamentos no registro gráfico, como a alteração de variáveis (altura e raio), para organizar e compreender as características internas dos cilindros. Esse processo de interação com o artefato digital, à luz da Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), representa uma etapa essencial da gênese instrumental, em que o artefato (Geogebra) se transforma em instrumento de aprendizagem por meio da criação de esquemas de uso.

Segundo Rabardel (1995), a interação com um artefato, como o Geogebra, possibilita que os alunos desenvolvam esquemas de ação instrumental que, além de facilitar a realização de tarefas primárias, promovem a internalização de conceitos matemáticos. No caso analisado, o uso do software permitiu uma exploração dinâmica dos cilindros, ampliando a compreensão de suas propriedades. Essa instrumentação potencializou a transição semiótica entre os registros gráfico (visual) e escritos (verbal e pictórico).

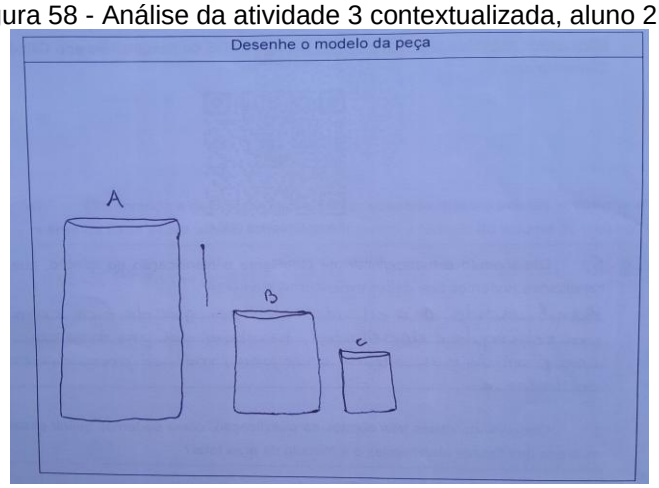
Além disso, a transição dos alunos do registro gráfico para os registros escritos e pictóricos, ao representarem os cilindros por meio de desenhos manuais e descrições textuais, exemplifica o processo de conversão semiótica descrito por Duval (1993). Complementando essa análise, Bittar (2015) e Valletta (2020) destacam que o sucesso dessa conversão está diretamente relacionado à forma como o artefato é instrumentalizado. Nesse contexto, o Geogebra, ao oferecer representações

dinâmicas e interativas, atuou como mediador cognitivo, permitindo que os alunos estabelecessem conexões entre diferentes representações e aprofundassem sua compreensão de sólidos tridimensionais.

Essa integração entre registros e o uso do artefato digital reflete o que Rabardel (1995) denomina "mediação epistêmica". Por meio da articulação de perspectivas tridimensionais com descrições textuais e pictóricas, os alunos conseguiram superar barreiras cognitivas, alcançando uma compreensão mais integrada e sistêmica dos corpos redondos.

Ademais, na questão contextualizada (questão 4), os alunos avançaram na exploração do conceito de cilindro ao representarem graficamente uma peça industrial descrita em linguagem natural. Durante esse exercício, mobilizaram uma conversão do registro linguístico para o pictórico, conforme destacado por Duval (1993), exigindo a interpretação de informações textuais para a construção de uma representação geométrica precisa. Nesse processo, ajustaram sobreposições de cilindros de diferentes tamanhos, respeitando as proporções e dimensões indicadas no enunciado, como ilustrado na figura 57.

Figura 58 - Análise da atividade 3 contextualizada, aluno 2M5



Fonte: Coleta de dados do autor (2024)

Consequentemente, à luz da TRRS, nessa atividade contextualizada os alunos que conseguiram fazer corretamente a peça pedida no comando da tarefa, tiveram que usar de certo tratamento, segundo Duval (2012), apreensão operatória, no registro da geometria de posição, pois os alunos organizaram e ajustaram as posições relativas de cada cilindros da peça para garantir que sua representação fosse fiel à descrição, chegando ao registro pictórico. Esse processo de tratamento e conversão não apenas fortaleceu a compreensão geométrica dos alunos, mas também evidenciou sua capacidade de articular diferentes registros de representação.

Neste contexto, ao longo de toda a atividade 3 (tabela 6), ficou claro que os alunos começaram a internalizar o Geogebra como um instrumento de aprendizagem, desenvolvendo esquemas ação instrumental que lhes permitiram explorar o conceito de cilindro de forma significativa. A articulação entre registros gráficos, simbólico (elementos da geometria de posição), geométrico e verbal possibilitou a construção de um entendimento mais profundo sobre as propriedades espaciais do sólido. Essa integração de registros e a capacidade de transitar entre eles são fundamentais para a conceitualização geométrica, como destacado na "Hipótese Fundamental de Aprendizagem" de Duval (1993), validaram, assim, a nossa análise a *priori*.

Tabela 6 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 3

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P/x	P/x	P	P	P	P/x
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).										

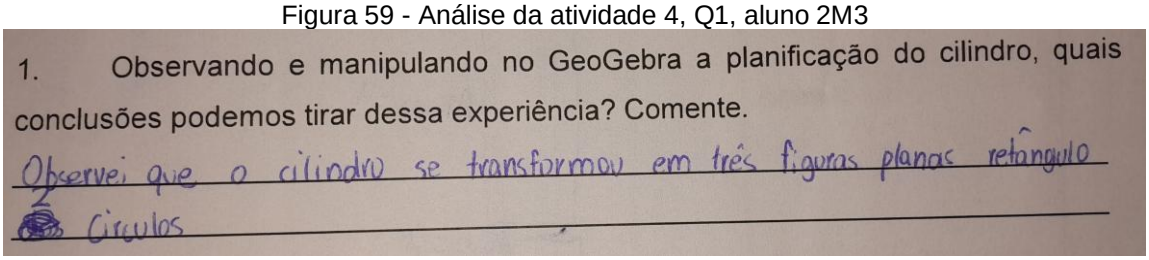
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Dessa forma, a atividade não apenas facilitou a exploração prática dos conceitos geométricos, mas também promoveu um avanço nos esquemas de usos descritos por Rabardel (1995), transformando o Geogebra em um recurso eficaz para o ensino e aprendizado da geometria espacial, também validando nossa análise a *priori*.

Descrição e análise da atividade 4.

Na Atividade 4, após disponibilizar aos alunos um QR code com a planificação dinâmica do cilindro no Geogebra, os estudantes foram desafiados a responder a duas perguntas. Na primeira questão, conforme ilustrado na figura 59, os alunos deveriam identificar os objetos geométricos planos resultantes da planificação. O aluno 2M3, assim como os demais participantes, identificou corretamente os três objetos geométricos envolvidos: um retângulo e dois círculos. Esse reconhecimento inicial dos elementos geométricos foi fundamental para o avanço para a segunda questão, que envolvia a definição das áreas desses objetos, seguido do cálculo da área total do cilindro. Ao realizar os cálculos das áreas das figuras planas (o retângulo e os círculos), os alunos aplicaram conceitos de geometria analítica para determinar a área lateral do cilindro e as áreas das suas bases, chegando à fórmula para a área total do cilindro ($A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$), considerando o raio da base e a altura do cilindro.

Figura 59 - Análise da atividade 4, Q1, aluno 2M3


1. Observando e manipulando no GeoGebra a planificação do cilindro, quais conclusões podemos tirar dessa experiência? Comente.

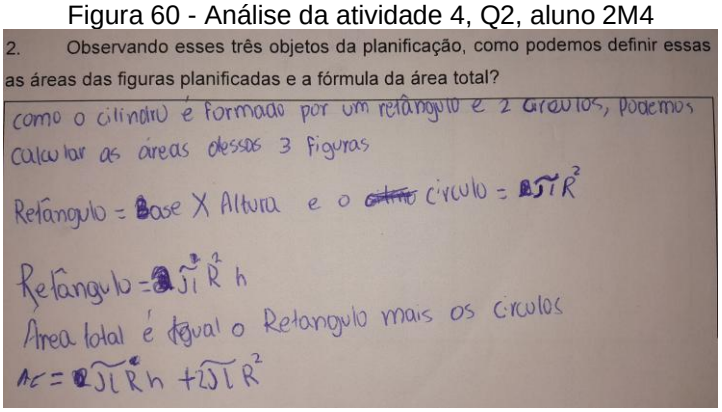
Observei que o cilindro se transformou em três figuras planas retângulo Círculos

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Assim, essa atividade reflete uma aplicação prática e significativa do Geogebra como ferramenta de aprendizagem, alinhada à perspectiva da teoria instrumental de Rabardel (1995). Nesse contexto, os alunos transformaram o artefato Geogebra em um instrumento, desenvolvendo esquemas de uso que permitiram a exploração e a compreensão da planificação do cilindro. Esses esquemas possibilitaram a identificação das superfícies do cilindro e a manipulação do software para resolver a questão proposta. Como destacado na análise a *priori*, os alunos não apresentaram grandes dificuldades para identificar as figuras planas da superfície do cilindro.

Na sequência, conforme ilustrado na figura 60, o aluno 2M4, ao observar a planificação do cilindro, descreve sua observação da seguinte forma: "como o cilindro é formado por um retângulo e 2 círculos, podemos calcular as áreas dessas 3 figuras". Em seguida, o aluno expressa as fórmulas das superfícies de cada figura planificada e, finalmente, a área total do cilindro. Esse processo exemplifica a conversão do registro visual (a planificação dinâmica) para o registro linguístico, conforme a TRRS de Duval (1995), onde o aluno realiza uma transição do conteúdo representado visualmente para uma expressão verbal, traduzindo a geometria visual para a linguagem matemática de forma precisa. Essa conversão é um reflexo da internalização dos conceitos e da capacidade de manipulação dos diferentes registros semânticos, o que evidencia a eficácia do Geogebra como ferramenta pedagógica.

Figura 60 - Análise da atividade 4, Q2, aluno 2M4


2. Observando esses três objetos da planificação, como podemos definir essas as áreas das figuras planificadas e a fórmula da área total?

como o cilindro é formado por um retângulo e 2 círculos, podemos calcular as áreas dessas 3 figuras

Retângulo = Base X Altura e o círculo = πR^2

Retângulo = $\pi R^2 h$

Área total é igual o Retangulo mais os circulos

$A_t = \pi R h + 2\pi R^2$

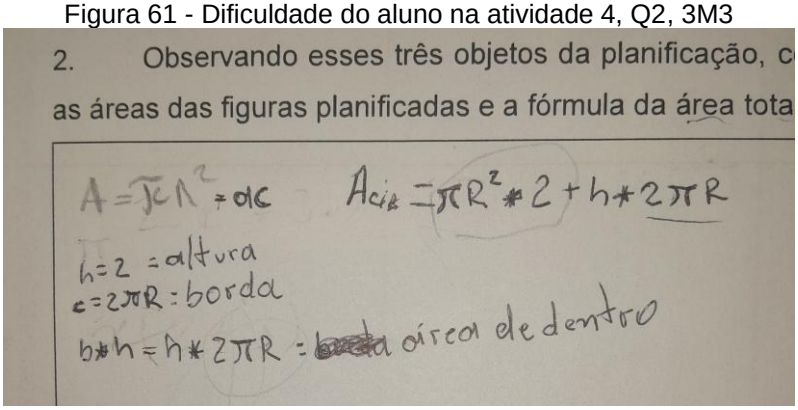
Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Posteriormente, os alunos realizaram a conversão para o registro algébrico, uma vez que as áreas das figuras planas (círculos e retângulo) foram definidas e, posteriormente, a área total do cilindro foi composta. De acordo com Duval (1995), esse processo de coordenação entre registros é essencial para consolidar o conhecimento geométrico e algébrico dos conceitos envolvidos, corroborando com nossa análise a *priori*. A capacidade de transitar entre registros visuais, linguísticos e algébricos é fundamental para o entendimento e a internalização dos conceitos matemáticos, permitindo que os alunos articulem diferentes formas de representação do conhecimento.

No entanto, como previsto na análise a *priori*, alguns alunos apresentaram dificuldades (Figura 62 - dificuldade do aluno na atividade 4, Q2) ao compor a fórmula completa da área total do cilindro. Esses obstáculos evidenciam dificuldades epistemológicas, conforme descrito por Duval (2011), que envolvem a complexidade das conversões entre os registros e a dificuldade em integrar os diferentes componentes da fórmula.

Esses obstáculos podem ser atribuídos à necessidade de uma compreensão mais profunda das relações geométricas e algébricas que compõem o conceito de área total, uma vez que os alunos precisam não apenas identificar as figuras, mas também realizar a coordenação precisa entre os diferentes registros semânticos para compor a expressão algébrica de forma correta. Isso ressalta a importância de se proporcionar um acompanhamento cuidadoso, oferecendo oportunidades para que os alunos enfrentem e superem esses desafios, consolidando o entendimento dos conceitos envolvidos.

Figura 61 - Dificuldade do aluno na atividade 4, Q2, 3M3



Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Ainda no contexto do registro algébrico, foi observado que, ao desenvolverem as fórmulas das áreas e da área total, os alunos realizaram tratamentos das

expressões algébricas, o que requer um conhecimento prévio sobre as áreas das figuras geométricas, adquirido em etapas anteriores de ensino. Esse conhecimento prévio é essencial para que os alunos possam organizar, substituir e simplificar as expressões, a fim de determinar corretamente a área total do cilindro.

Assim, alguns alunos, como os identificados como 2M5, 2M6 e 3M4, enfrentaram dificuldades ao trabalhar com o registro algébrico e não conseguiram concluir as fórmulas. Esses alunos apresentaram lacunas no conhecimento de geometria plana, especialmente em relação às áreas das figuras, o que dificultou sua capacidade de realizar os tratamentos necessários. Exceção feita ao aluno 3M3, que fazia parte desse grupo, mas conseguiu concluir e chegar à fórmula correta.

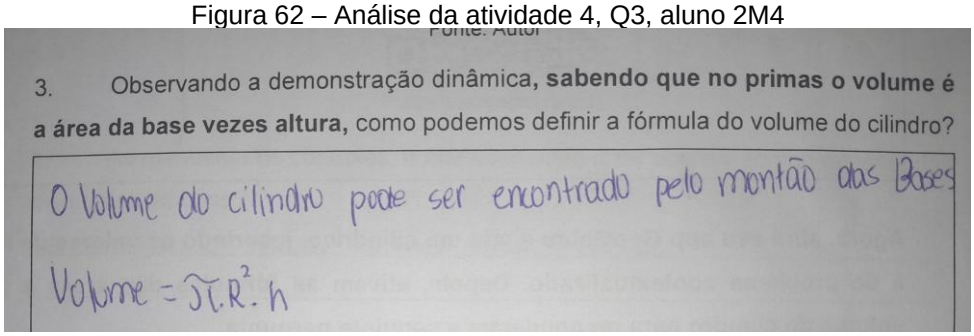
A dificuldade apresentada por esses alunos em realizar os tratamentos finais nas expressões algébricas evidencia uma lacuna no conhecimento adquirido nas etapas anteriores de ensino, especialmente no que diz respeito à composição das áreas. Essa carência reforça a necessidade de atividades pedagógicas que reforcem habilidades de manipulação de expressões algébricas, fundamentais para o domínio de conceitos geométricos mais avançados. Nesse contexto, a teoria da TRRS de Duval (1995) se revela pertinente, pois a atividade permitiu que os alunos integrassem múltiplos registros — visual, linguístico e algébrico — o que favoreceu uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas e algébricas relacionadas ao conceito de área total do cilindro, corroborando com a análise a *priori*.

A transição entre esses registros e a manipulação interna dos registros algébricos evidenciam a complexidade do raciocínio matemático envolvido. Esse processo exige dos alunos não apenas a compreensão dos conceitos geométricos, mas também a capacidade de transitar entre diferentes formas de representação. À luz da teoria instrumental de Rabardel (1995), torna-se evidente a importância do desenvolvimento de esquemas instrumentais. Estes esquemas são essenciais para que o Geogebra se configure como um instrumento pedagógico eficaz no estudo de sólidos geométricos, facilitando a compreensão e aplicabilidade dos conceitos abordados.

Avançando na sequência didática, na questão 3 (Figura 63), os alunos utilizaram o Geogebra online para observar uma demonstração dinâmica do Princípio de Cavalieri, utilizando um prisma e um cilindro como ferramentas visuais. Essa abordagem facilitou a visualização da equivalência de volumes entre sólidos com seções transversais congruentes e altura igual, proporcionando aos alunos uma

experiência mais concreta e visual dos conceitos envolvidos. Após a demonstração e a explicação do professor/pesquisador, os alunos foram capazes de definir a fórmula do volume do cilindro, consolidando seu entendimento sobre o conceito de volume e sua relação com a área da base e a altura do sólido. Essa atividade foi significativa para consolidar os conhecimentos geométricos dos alunos, permitindo-lhes compreender de maneira mais intuitiva a relação entre a área da base e a altura na determinação do volume de sólidos geométricos.

Figura 62 – Análise da atividade 4, Q3, aluno 2M4


3. Observando a demonstração dinâmica, **sabendo que no primas o volume é a área da base vezes altura,** como podemos definir a fórmula do volume do cilindro?

O Volume do cilindro pode ser encontrado pelo montão das Bases

Volume = $\pi . R^2 . h$

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Conforme ilustrado na imagem acima, destaca-se a observação do aluno que descreveu o volume do cilindro como o resultado do "montão das bases". Essa expressão reflete diretamente a compreensão intuitiva do Princípio de Cavalieri, demonstrado no Geogebra, que evidencia que sólidos com seções transversais equivalentes e alturas iguais possuem volumes iguais. Assim, esse aluno concluiu que o volume do cilindro é obtido pela multiplicação da área da base pela altura. Por outro lado, outros alunos chegaram à fórmula diretamente, sem explicitar o raciocínio intuitivo do "empilhamento", mas utilizando abordagens algébricas que levaram ao mesmo resultado.

Nesse contexto, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1993) é fundamental para analisar o processo de aprendizagem desses alunos. A demonstração dinâmica do Princípio de Cavalieri no Geogebra corresponde ao registro gráfico dinâmico, permitindo que os alunos observassem visualmente a equivalência entre sólidos. Essa visualização inicial facilitou a compreensão do volume como medida de preenchimento espacial, sendo uma ponte essencial para a transição ao registro algébrico, como evidenciado pelo aluno (2M4). A capacidade de transitar entre diferentes registros demonstra o domínio conceitual dos alunos e a construção de significado em torno do conceito de volume.

Com base na Teoria Instrumental de Rabardel (1995), essa atividade também representa um progresso no desenvolvimento de esquemas de utilização do

Geogebra pelos alunos. O processo de instrumentalização é evidente, já que a ferramenta foi transformada em um instrumento de aprendizagem ativo. À medida que os alunos manipularam o software para visualizar a equivalência entre sólidos, desenvolveram esquemas que promoveram interações significativas e dinâmicas com o conceito de volume. Esse processo, que alia visualização e manipulação, é essencial para consolidar o conhecimento matemático de maneira efetiva.

O aluno que utilizou a expressão "montão das bases" exemplifica um caso de conversão entre registros, conforme descrito por Duval (1993). Inicialmente, o conceito foi percebido no registro gráfico dinâmico (a demonstração no Geogebra) e, posteriormente, traduzido para o registro linguístico (descrição em língua natural). Em seguida, esse raciocínio foi formalizado no registro algébrico por meio da fórmula do volume do cilindro. Essa coordenação de diferentes registros demonstra o aprendizado efetivo, corroborando tanto com a análise a *priori* quanto com a teoria de Rabardel, ao refletir a construção de esquemas instrumentais necessários para o uso funcional do Geogebra.

Além disso, a conversão entre registros não apenas indica a internalização do conceito visual, mas também sua articulação verbal e formal, o que é um passo essencial para o aprendizado profundo. O domínio do "montão das bases", descrito linguística e matematicamente, demonstra a eficácia da sequência didática na integração de múltiplos registros e no fortalecimento da compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

Tabela 7 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 4

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P/x	P/x	P	P	P	P/x
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).										

Fonte: Elaborado pelo autor

Por outro lado, os alunos que desenvolveram diretamente a fórmula do volume do cilindro realizaram um tratamento no âmbito do registro algébrico, aplicando a fórmula sem necessariamente explicitar o raciocínio subjacente que fundamenta o Princípio de Cavalieri. Embora esse tratamento demonstre competência no uso do registro algébrico, a ausência de uma conversão explícita entre registros sugere que, para alguns alunos, o entendimento pode estar restrito a uma aplicação mecânica da

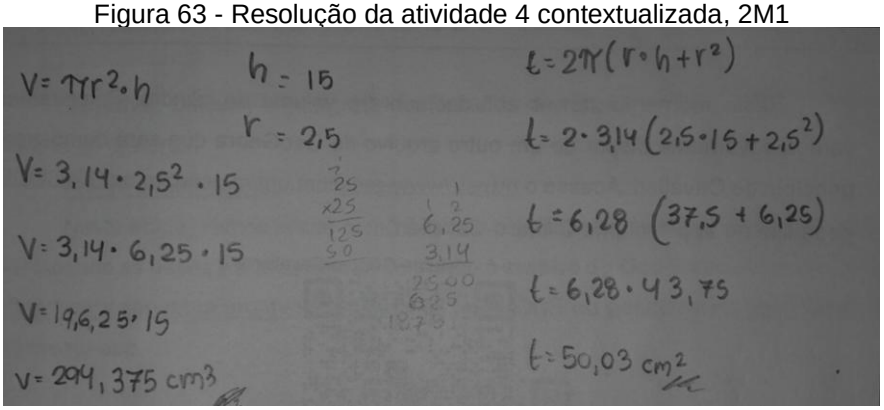
fórmula. Isso evidencia uma lacuna na integração dos significados visuais e conceituais com os procedimentos matemáticos.

Além disso, é importante destacar que outros alunos, os mesmos que enfrentaram dificuldades nas questões anteriores, não conseguiram desenvolver a fórmula do volume devido à falta de conhecimento sobre a área do círculo. Essa limitação reforça a necessidade de atividades que revisem e consolidem conceitos básicos de geometria plana, fundamentais para a compreensão de sólidos geométricos.

Na sequência da atividade, conforme ilustrado na Figura 64, os alunos foram desafiados a calcular a área e o volume de uma latinha de alumínio, com base em um enunciado apresentado no registro linguístico. Nesse contexto, a aplicação correta da fórmula do volume pelos alunos 2M1, 2M2, 2M3, 2M4, 3M1, 3M2 e 3M3, conforme registrado na tabela correspondente, demonstra sucesso no tratamento dentro do registro algébrico. Entretanto, o esquecimento de alguns alunos em calcular a área da latinha evidencia dificuldades na conversão completa entre registros, o que foi previsto em nossa análise a *priori*.

Essas dificuldades destacam a necessidade de atividades didáticas que promovam a integração entre a interpretação textual e a formalização algébrica, como sugerido por Duval (1995). Para superar essas lacunas, é fundamental propor tarefas que incentivem o aluno a transitar de forma mais fluida entre registros visuais, linguísticos e algébricos, possibilitando uma compreensão mais robusta e significativa dos conceitos matemáticos envolvidos.

Figura 63 - Resolução da atividade 4 contextualizada, 2M1



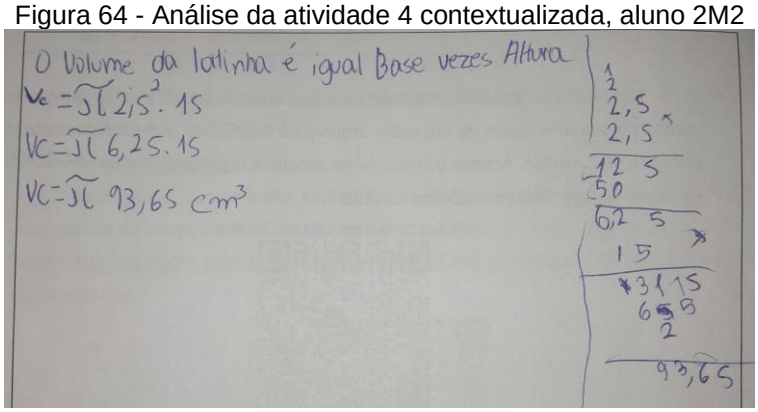
Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Conforme esperado, com base no autor supracitado, esperava-se que os alunos realizassem tanto o tratamento dentro do registro algébrico (ao aplicar as fórmulas diretamente) quanto a conversão entre registros, traduzindo o enunciado

apresentado no registro linguístico para o registro algébrico. O fato de todos os alunos terem conseguido aplicar diretamente a fórmula do volume demonstra que eles foram capazes de realizar um tratamento correto dentro do registro algébrico, encontrando os valores esperados para o volume e, em alguns casos, também para a área do objeto. Entretanto, o esquecimento de alguns alunos ao calcular a área do objeto evidencia uma possível limitação no processo de conversão entre os registros semióticos, especialmente no que diz respeito à interpretação completa do enunciado. Esse fato sugere que, embora os alunos demonstrem habilidade para desenvolver cálculos, alguns deles apresentam dificuldades em interpretar a totalidade da tarefa, o que compromete a capacidade de converter todos os elementos do registro linguístico para o algébrico de maneira eficaz.

Essa dificuldade reforça a necessidade de propor atividades que integrem de forma mais explícita a interpretação textual e a formalização matemática, permitindo que os alunos desenvolvam habilidades para realizar tanto tratamentos quanto conversões entre registros, conforme os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995).

Figura 64 - Análise da atividade 4 contextualizada, aluno 2M2



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

As dificuldades observadas na atividade contextualizada evidenciam lacunas no domínio de conceitos geométricos que deveriam ter sido consolidados em etapas anteriores do ensino, conforme ressaltado por Silva Filho (2015, p. 43). Essas limitações evidenciam a importância de adotar estratégias didáticas que favoreçam a articulação entre diferentes registros representacionais e promovam a consolidação do conhecimento geométrico e algébrico.

Nesse contexto, o uso do Geogebra, aliado a práticas pedagógicas reflexivas, configura-se como um recurso eficaz para superar essas dificuldades. A integração dessa ferramenta no processo de ensino-aprendizagem não só amplia as

possibilidades de visualização e experimentação, mas também contribui para uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos pelos alunos.

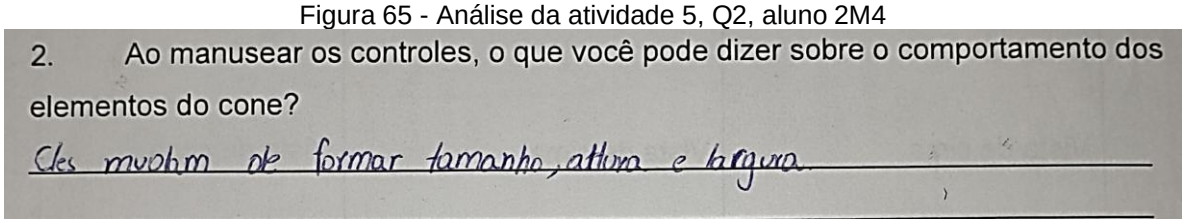
Descrição da atividade 5.

Neste novo bloco, foi estudado o cone. Na atividade 5, foi disponibilizado aos alunos o QR code do Geogebra com a forma dinâmica do cone e seus elementos. Os alunos deveriam manipular a forma geométrica em seus smartphones e, em seguida, responder a três perguntas interligadas sobre o comportamento da forma e dos elementos do cone, descrevendo-os e desenhando-os.

Conforme ilustrado na figura 66, o aluno descreveu de maneira precisa a deformação do cone, assim como as formas dos cones 2 e 3 na figura 67, onde a altura e os raios são maiores que os do cone 1, respectivamente. O aluno utilizou descrições como "mais alto que o normal" e "gordo e achatado", o que indica uma boa compreensão das variações na geometria do cone. Além disso, na figura 68, os desenhos dos cones 1, 2 e 3 foram realizados de maneira que evidenciaram as diferenças de tamanho nas bases e, principalmente, nas alturas de cada cone. A representação gráfica reflete a observação atenta dos alunos sobre as transformações geométricas.

Vale destacar que, entre os alunos participantes, não foram observadas dificuldades significativas ao interagirem com o Geogebra, o que sugere que a ferramenta foi eficaz para promover a visualização e o entendimento das relações geométricas no estudo do cone.

Figura 65 - Análise da atividade 5, Q2, aluno 2M4

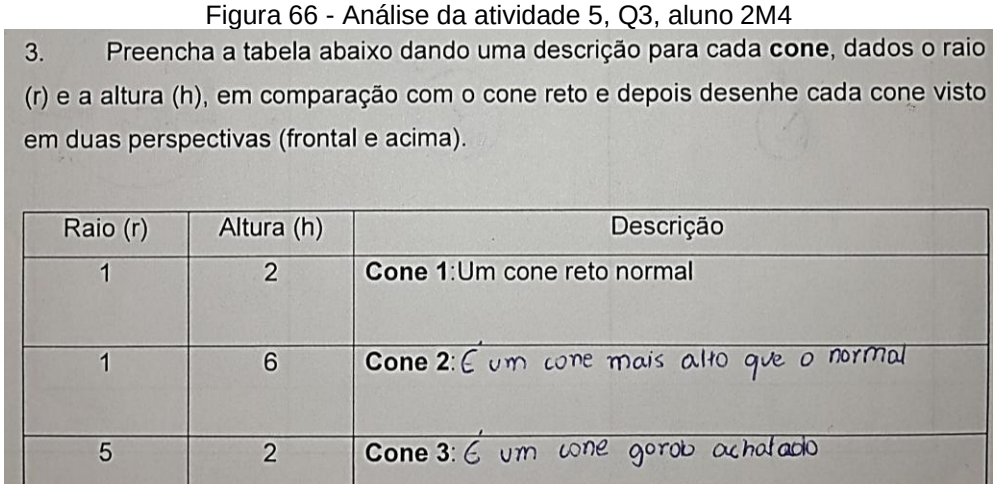


2. Ao manusear os controles, o que você pode dizer sobre o comportamento dos elementos do cone?

Eles mudam de formar tamanho, altura e largura.

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Figura 66 - Análise da atividade 5, Q3, aluno 2M4

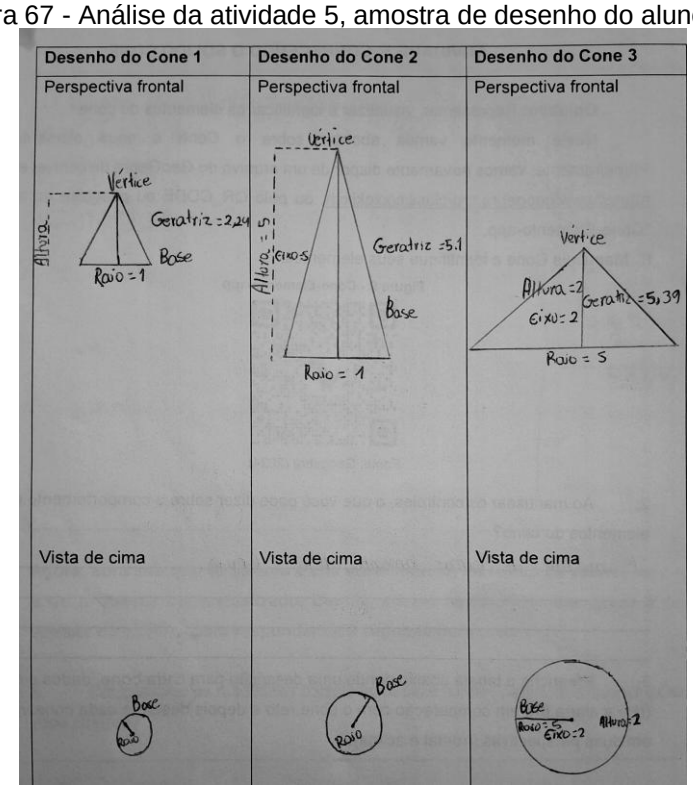


3. Preencha a tabela abaixo dando uma descrição para cada **cone**, dados o raio (r) e a altura (h), em comparação com o cone reto e depois desenhe cada cone visto em duas perspectivas (frontal e acima).

Raio (r)	Altura (h)	Descrição
1	2	**Cone 1**:Um cone reto normal
1	6	**Cone 2**: É um cone mais alto que o normal
5	2	**Cone 3**: É um cone gordo achatado

Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Figura 67 - Análise da atividade 5, amostra de desenho do aluno 2M2



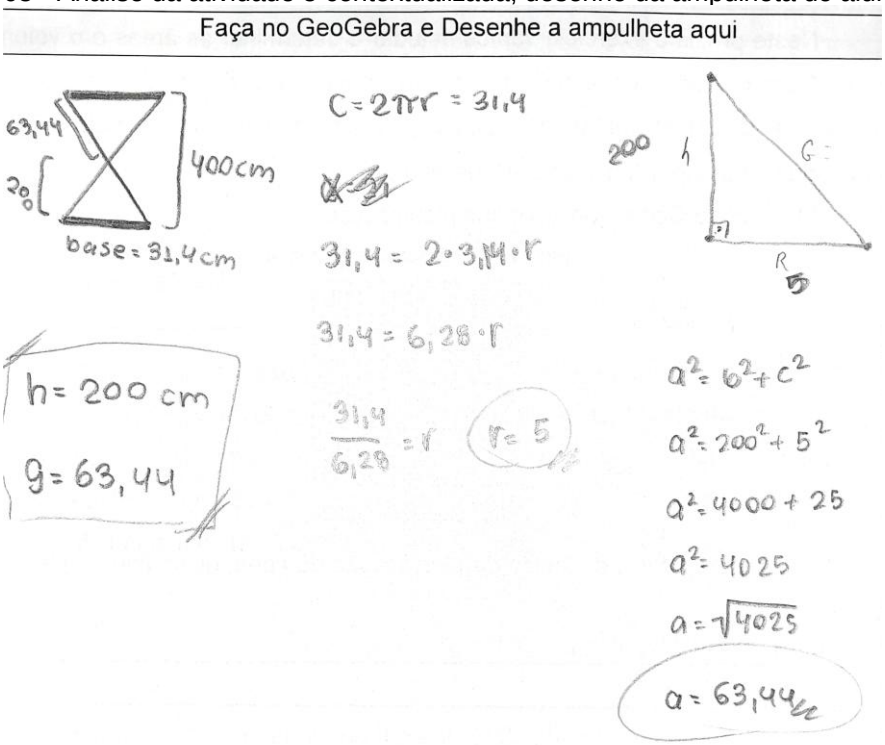
Fonte: Coleta de dados feito pelo autor (2024)

Posteriormente, na atividade contextualizada, conforme ilustrado na imagem 69, os alunos foram desafiados a calcular a geratriz e a altura de uma ampulheta. Essa questão exigia não apenas a aplicação de conhecimentos geométricos, mas também a habilidade de representar e interpretar informações de forma integrada. No

entanto, poucos alunos compreenderam a necessidade de desenhar a ampulheta e identificar um triângulo retângulo para aplicar o Teorema de Pitágoras, que é fundamental para determinar a geratriz de um dos cones que compõem o desenho.

Neste contexto, o aluno em destaque demonstrou uma compreensão mais profunda ao perceber que os vértices dos cones correspondem ao centro da ampulheta, que a altura de cada cone é metade da altura total da ampulheta, e que a circunferência determina o raio. Esse entendimento foi demonstrado tanto nas representações realizadas no Geogebra quanto nos desenhos feitos à mão no papel. Com essas informações, o aluno aplicou corretamente o Teorema de Pitágoras, obtendo o valor da geratriz. Esse exemplo destaca a importância da combinação entre visualização geométrica e raciocínio algébrico, além de evidenciar a habilidade do aluno em integrar diferentes conhecimentos para resolver o problema proposto.

Figura 68 - Análise da atividade 5 contextualizada, desenho da ampulheta do aluno 2M1



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Análise da atividade 5.

Ao analisar esse momento à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval, observa-se que, ao manipular a forma dinâmica do cone no Geogebra e responder às perguntas sobre o comportamento e os elementos do cone, os alunos realizam uma conversão do registro linguístico para o registro gráfico. Nesse novo registro, ocorre o processo de tratamento, denominado por Duval como

"apreensão operatória de posição", seguido da conversão para os registros de representação pictórica e linguística. Em outras palavras, os alunos observam e interpretam as características dos cones, como altura e raio, descrevendo-as em linguagem natural e, em seguida, representando visualmente as figuras geométricas.

Conforme destacado na análise a *priori* da atividade relacionada ao cone, espera-se que, com o auxílio do Geogebra, os alunos mobilizem as representações que conceituam os elementos do cone por meio dos registros geométrico, pictórico e verbal. Segundo Araújo (2015), as dificuldades dos alunos em trabalhar com tratamentos no registro algébrico podem ser superadas pela integração de diferentes formas de representação, algo que o Geogebra facilita ao permitir uma visualização clara e interativa das propriedades geométricas.

Além disso, a teoria instrumental de Rabardel (1995) reforça que, nessa atividade, o Geogebra atua como um potente instrumento de aprendizagem. Esse processo, denominado instrumentação, envolve o desenvolvimento de esquemas de ação que possibilitam aos alunos operarem o software de forma intencional e funcional, utilizando-o para construir conhecimento sobre os elementos do cone. À medida que exploram e manipulam o cone de forma dinâmica, os alunos desenvolvem esses esquemas, criando interações significativas que favorecem a compreensão inicial do cone.

A *priori*, pode-se concluir que a atividade sustenta uma prática de conceitualização, em que a estrutura de coordenações de representações (Duval, 1993) permite aos alunos construírem uma compreensão do conceito de cone baseada nas variações de forma e elementos. As descrições dos cones como “mais alto que o normal” ou “gordo e achatado” indicam que os alunos não estão apenas memorizando definições, mas desenvolvendo uma compreensão visual e intuitiva das propriedades geométricas de cada cone. Esse desenvolvimento também representa um refinamento dos esquemas de ação instrumental (Rabardel, 1995), uma vez que os alunos associam os elementos manipulados no Geogebra às características que configuram a forma e a estrutura do cone.

Conforme observado na análise a *priori* da atividade, o uso do Geogebra permitiu que os alunos transitassem entre registros geométricos e pictóricos, fortalecendo sua capacidade de representar visualmente os elementos do cone e aplicá-los em contextos matemáticos. Essa habilidade de transição entre registros,

descrita por Duval (1993), é essencial para consolidar o aprendizado geométrico e foi facilitada pela interação dinâmica com o software.

O fato de os alunos desenharem e demonstrarem diferenças de tamanho e forma reforça que estão realizando uma conversão entre registros: do registro dinâmico gráfico (no Geogebra) para os registros linguístico e visual. Esse processo de conversão, que, segundo Valletta (2020), também se refere à transformação do objeto, fortalece, de acordo com a teoria instrumental, a instrumentação do Geogebra como um instrumento de ensino. Isso ocorre porque os alunos conseguem coordenar entre diferentes formas de representação. Essa habilidade é essencial para a conceitualização, pois permite a construção de uma representação mental mais detalhada e flexível do conceito de cone.

Segundo a "Hipótese Fundamental de Aprendizagem" proposta por Duval (1993, p. 51), o aprendizado eficaz de um conceito exige a capacidade de transitar entre diferentes registros. Nesse contexto, os alunos demonstraram competência em relacionar representações visuais e gráficas com conceitos algébricos, aplicando, por exemplo, o Teorema de Pitágoras para calcular a geratriz do cone. Essa atividade, destacada na análise a *priori*, evidencia como o registro visual facilita a aplicação de cálculos algébricos ao conectar elementos do cone com proporções geométricas previamente exploradas no Geogebra pelos alunos, como evidenciado na tabela 8.

Esse processo de transição e coordenação entre registros é crucial para a aprendizagem significativa, pois permite que os alunos não apenas compreendam as propriedades geométricas do cone, mas também apliquem esses conhecimentos de forma operacional e reflexiva, criando uma integração entre os diferentes saberes que compõem o conceito geométrico.

Tabela 8 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 5

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P/x	P/x	P	P	P	x
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).										

Fonte: Elaborado pelo autor

Neste contexto, como pode-se ver na tabela acima, a capacidade dos alunos de integrarem diferentes registros semióticos, como visual, gráfico e algébrico, reforça o papel do Geogebra como um instrumento significativo para o ensino geométrico,

validando os objetivos alcançados na análise a *priori*. Esse software permitiu que os alunos construíssem uma visão integrada e multifacetada dos conceitos matemáticos, confirmando sua eficácia no suporte ao aprendizado significativo, como previsto nas teorias de Duval e Rabardel.

Ao proporcionar uma interação dinâmica entre os diferentes registros semióticos, o Geogebra não só facilita a construção de conceitos geométricos, mas também favorece a transição fluida entre representações visuais e algébricas, o que é essencial para uma compreensão mais profunda e duradoura. Essa capacidade de coordenar registros e manipular diferentes formas de representação é um elemento-chave no processo de ensino-aprendizagem, permitindo aos alunos desenvolverem uma compreensão mais abrangente e integrada da matemática.

Descrição da Atividade 6.

Primeiramente, neste primeiro momento da atividade, os alunos precisaram manipular, com o auxílio do Geogebra, a planificação do cone de forma dinâmica (figura 70) e, em seguida, explorar a demonstração dedutiva da área lateral do cone. Após essas manipulações, os alunos tiveram que identificar as figuras planas, como foi feito na atividade sobre o cilindro, e demonstrar as fórmulas da área lateral e total do cone.

Em seguida, na primeira manipulação no Geogebra, os alunos identificaram que a base do cone é um círculo. No entanto, a maioria não soube nomear corretamente a superfície da área lateral do cone, que seria um setor circular. Em vez disso, descreveram-na, por exemplo, como “semicírculo”, “uma fatia de pizza” e “um leque”. Esta última descrição chamou nossa atenção, pois, de fato, o objeto leque lembra a planificação da área lateral do cone, desconsiderando-se as “dobras” do leque.

Primeiramente, neste primeiro momento da atividade, os alunos precisaram manipular, com o auxílio do Geogebra, a planificação do cone de forma dinâmica (figura 70) e, em seguida, explorar a demonstração dedutiva da área lateral do cone. Após essas manipulações, os alunos tiveram que identificar as figuras planas, como foi feito na atividade sobre o cilindro, e demonstrar as fórmulas da área lateral e total do cone.

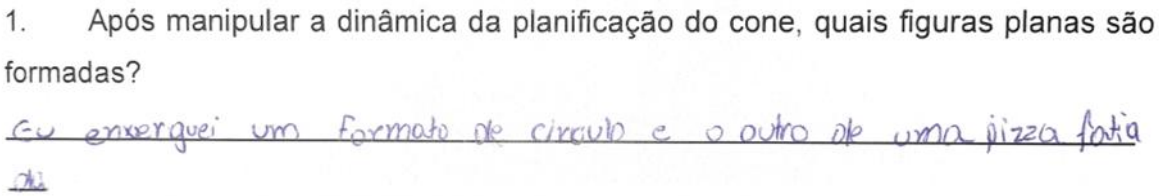
Na primeira manipulação no Geogebra, os alunos identificaram que a base do cone é um círculo. No entanto, a maioria não soube nomear corretamente a superfície da área lateral do cone, que seria um setor circular. Em vez disso, descreveram-na,

por exemplo, como “semicírculo”, “uma fatia de pizza” e “um leque”. Esta última descrição chamou nossa atenção, pois, de fato, o objeto leque lembra a planificação da área lateral do cone, desconsiderando-se as “dobras” do leque.

Esse erro na nomenclatura pode indicar uma dificuldade na visualização precisa da geometria envolvida, algo que é essencial para a construção do conceito de área lateral do cone. A falta de clareza ao nomear a superfície pode refletir a necessidade de um melhor entendimento da relação entre as representações gráficas e algébricas, algo que o uso do Geogebra poderia ajudar a esclarecer. É possível que a representação dinâmica no software ainda não tenha sido totalmente assimilada pelos alunos, dificultando a compreensão da relação entre a forma tridimensional e sua planificação bidimensional.

A descrição de "leque" sugere uma aproximação empírica e intuitiva do conceito, o que, embora revelador de um certo entendimento visual, ainda não é preciso no nível matemático exigido. Isso reforça a importância de se promover atividades que incentivem a transição de uma visão informal e intuitiva para uma formalização matemática, no intuito de consolidar o conceito correto de setor circular e a aplicação das fórmulas adequadas para o cálculo das áreas.

Figura 69 - Análise da atividade 6, Q1, aluno 2M4


1. Após manipular a dinâmica da planificação do cone, quais figuras planas são formadas?

Eu enxerguei um formato de circulo e o outro de uma pizza fatia

Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

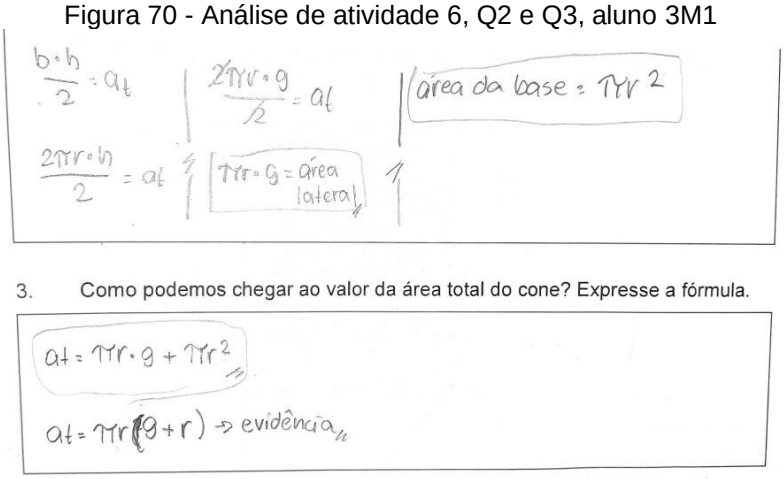
Além disso, todos os alunos que participaram dessa atividade conseguiram associar a fórmula da área lateral do cone ao perceberem, no Geogebra, que a superfície lateral do objeto, quando sua circunferência é esticada no plano até se transformar em um segmento de reta, forma um triângulo retângulo, cuja altura corresponde à geratriz do cone. Essa visualização dinâmica facilitou a compreensão da relação entre a superfície lateral do cone e o cálculo de sua área.

Na sequência, na figura 71, podemos observar a demonstração do aluno que conseguiu chegar à fórmula da área lateral e, em seguida, à fórmula da área total do cone. Vale destacar o caso do aluno 3M1, que chegou precisamente à fórmula, evidenciando a multiplicação de πr\pi rπr (a circunferência da base do cone) pela geratriz, obtendo a área lateral corretamente. Os outros alunos também conseguiram chegar à fórmula, mas houve uma lacuna no tratamento da mesma, o que pode indicar

uma dificuldade na formalização do raciocínio algébrico necessário para a expressão matemática completa da fórmula.

Essa variação no domínio da fórmula pode ser atribuída a diferentes níveis de compreensão do conceito de área lateral, bem como à capacidade de manipular a representação algébrica associada à geometria do cone. O Geogebra, ao permitir a visualização dinâmica, certamente ajudou a facilitar a transição do conceito geométrico para a sua formulação algébrica. Contudo, a atividade evidenciou que a prática de formalização matemática, especialmente no que diz respeito à multiplicação por πr\pi rπr, ainda apresenta desafios para alguns alunos.

Figura 70 - Análise de atividade 6, Q2 e Q3, aluno 3M1

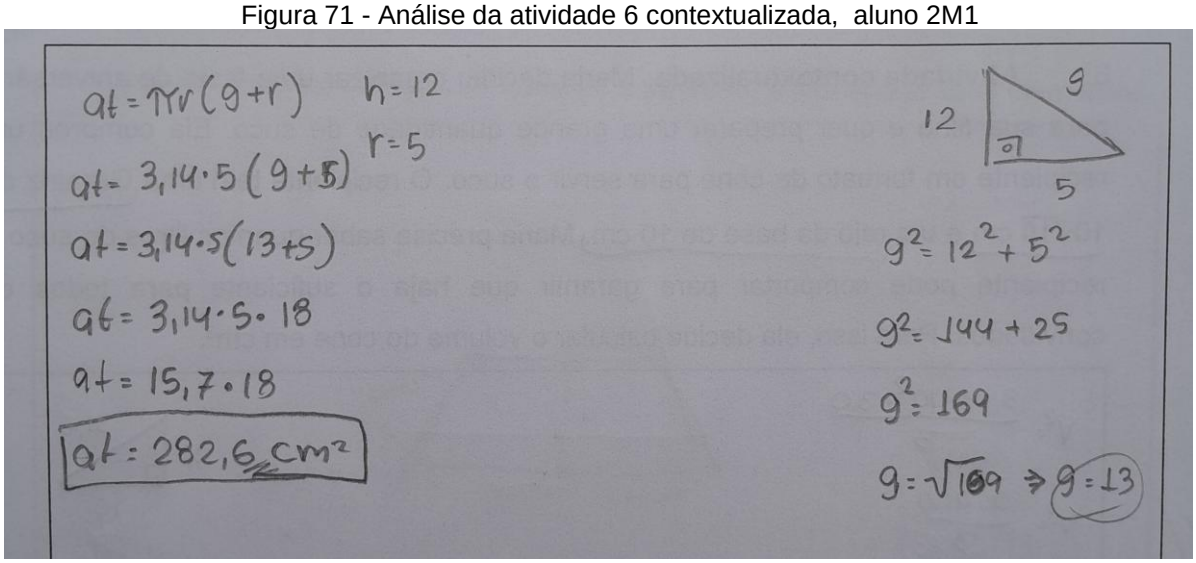


Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Posteriormente, na atividade contextualizada (figura 72), os alunos enfrentaram o desafio de calcular a área total do material necessário para um projeto de cone, desta vez sem o auxílio do Geogebra. Observamos nos registros dos alunos que, apesar de não utilizarem ferramentas dinâmicas, conseguiram alcançar valores aproximados, evidenciando a compreensão do conceito de área total do cone. Um dos alunos utilizou o valor de π\piπ como 3,14, enquanto o outro optou por representá-lo com a letra grega π\piπ, o que ilustra a flexibilidade de representação semiótica no processo de resolução.

Essa escolha reflete a liberdade na aplicação das representações simbólicas, pois o enunciado da atividade não especificava se o valor de π\piπ deveria ser substituído por um número ou mantido em sua forma simbólica. Esse aspecto evidencia como as diferentes abordagens dos alunos se relacionam com a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos, permitindo que eles manipulem tanto os símbolos matemáticos quanto os números de maneira fluida e adequada ao contexto da atividade. A flexibilidade na utilização dos registros semióticos, portanto, é um reflexo do processo de aprendizagem e da adaptação do conhecimento adquirido, seja em uma forma algébrica ou numérica.

Figura 71 - Análise da atividade 6 contextualizada, aluno 2M1

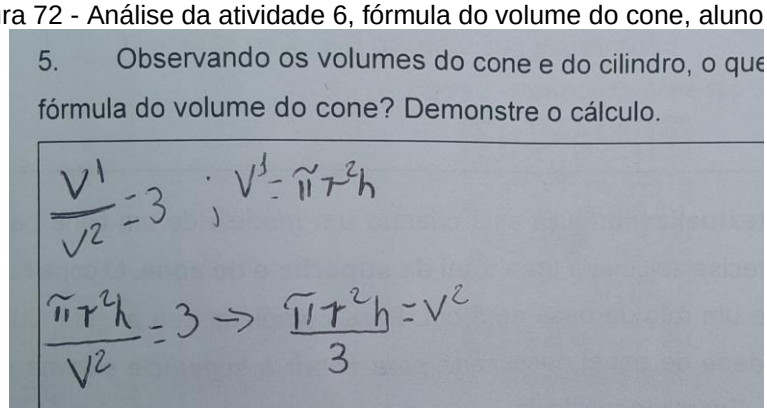


Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Inicialmente, no segundo momento da atividade 6, os alunos estudaram o volume do cone. Com o auxílio do Geogebra, eles manipularam de forma dinâmica a dedução do volume do cone em comparação ao volume do cilindro, onde os dois objetos possuem a mesma altura e raio. Esse procedimento permitiu que os alunos visualizassem a relação entre as formas geométricas e compreendessem que o volume do cone é um terço do volume do cilindro com dimensões idênticas.

Após essa exploração interativa, os alunos foram orientados a desenvolver a demonstração da fórmula do volume do cone. A partir da visualização no Geogebra, onde o cone foi comparado ao cilindro, foi possível observar que, para um cilindro com a mesma altura e o mesmo raio, o volume do cone é de fato um terço do volume do cilindro. Essa conexão intuitiva entre as duas figuras geométricas facilitou o processo de dedução da fórmula, permitindo que os alunos compreendessem não apenas a fórmula em si, mas também a sua origem e justificativa geométrica. A manipulação dinâmica do Geogebra, ao proporcionar uma visualização clara e interativa, desempenhou um papel fundamental na construção do conhecimento sobre o volume do cone, auxiliando na transição entre representações gráficas e algébricas e favorecendo a compreensão do conceito de volume de forma mais significativa e aplicada.

Figura 72 - Análise da atividade 6, fórmula do volume do cone, aluno 3M2



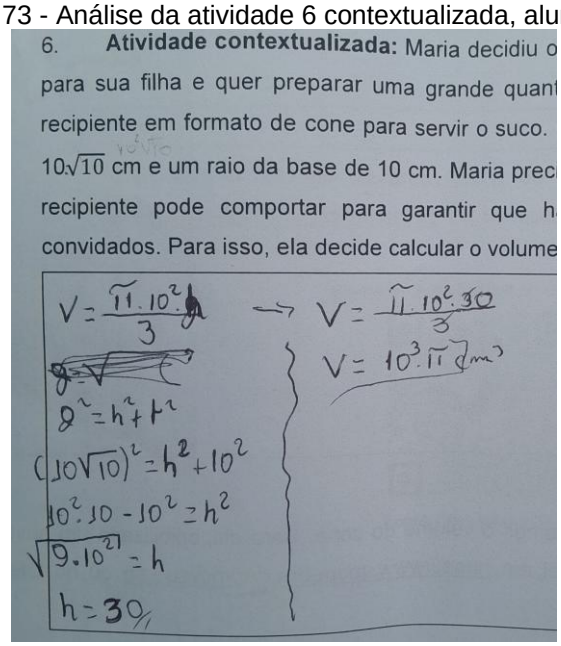
Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Consequentemente, com os conhecimentos adquiridos no estudo do cilindro ao longo da sequência didática, os alunos não enfrentaram grandes dificuldades para desenvolver a fórmula do volume do cone. Eles aplicaram corretamente as substituições numéricas e compreenderam a proporcionalidade entre os volumes dos dois sólidos, aplicando a fórmula de maneira precisa.

Além disso, na atividade contextualizada sobre o volume do cone, os alunos calcularam com precisão o volume do recipiente. Ao perceberem que precisavam determinar a altura do cone, utilizaram o Teorema de Pitágoras de forma eficaz. Esse processo permitiu calcular a altura do cone e, por consequência, determinar o valor final do volume.

Essa aplicação do teorema, aliada ao domínio das fórmulas e conceitos anteriormente estudados, evidenciou a habilidade dos alunos em integrar diferentes conceitos geométricos, tornando-os capazes de resolver problemas de maneira mais completa e contextualizada.

Figura 73 - Análise da atividade 6 contextualizada, aluno 3M2



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Análise da Atividade 6.

Primeiramente, ao analisar a atividade 6 à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS) de Duval (1993) e da Teoria Instrumental de Rabardel (1995), é possível observar a progressão do uso do Geogebra como ferramenta de aprendizagem. Inicialmente, o software funciona como um artefato tecnológico que, ao longo da sequência didática, se transforma em um verdadeiro instrumento de aprendizagem, permitindo que os alunos desenvolvam esquemas de uso e integrem múltiplas representações semióticas, como as gráficas, visuais, algébricas e verbais. Esse processo confirma nossa análise a *priori*, que indicava a expectativa de que os alunos, com o auxílio do Geogebra, mobilizassem, durante a realização da atividade, as representações que definem as fórmulas das áreas e do volume do cone por meio dos registros algébrico, gráfico e verbal.

A manipulação das representações dinâmicas no Geogebra, conforme argumenta Rabardel (1995), facilita a construção intuitiva do conhecimento geométrico, permitindo aos alunos estabelecerem uma relação entre o uso do software e o entendimento das áreas do cone. Esse movimento reflete o desenvolvimento de esquemas cognitivos que auxiliam na transição do aprendizado visual para o teórico, um processo central para a compreensão da geometria espacial.

Além disso, a análise a *priori* da atividade destaca que os alunos podem enfrentar dificuldades ao identificar os objetos na planificação da superfície do cone, especialmente ao compreender a superfície lateral como um setor circular (Pinheiro, 2022). Essas dificuldades são consistentes com os desafios observados durante o uso inicial do Geogebra.

Durante essa fase, os alunos enfrentaram dificuldades epistemológicas ao tentar nomear a superfície da área lateral do cone. Muitos utilizaram termos imprecisos como "semicírculo", "fatia de pizza" e "leque". Essa dificuldade linguística e conceitual evidencia uma etapa ainda não completamente instrumentalizada, como aponta Rabardel (1995). Esse momento é essencial para superar obstáculos, como a identificação ou o cálculo correto da geratriz utilizando o Teorema de Pitágoras, também mencionado na análise a *priori* como um dos desafios frequentes (Pinheiro, 2022).

A intervenção do professor foi crucial para ajudar os alunos a superarem esse obstáculo, especialmente ao associar a fórmula da área lateral do cone à visualização de que a superfície lateral, quando desenrolada, forma um triângulo retângulo. Esse processo ilustra uma conversão de registros gráficos dinâmicos para registros visuais fixos, facilitando a compreensão da fórmula. Segundo Duval (1993), a mobilização de diferentes registros semióticos é fundamental para a consolidação do aprendizado geométrico, permitindo aos alunos integrarem as representações dinâmicas do Geogebra com a formulação teórica necessária para a resolução de problemas geométricos.

Além disso, o tratamento algébrico do problema, como a aplicação das operações necessárias para construir a fórmula da área lateral, revela um desenvolvimento mais maduro dos esquemas de ação instrumentada. Na análise a *priori*, observa-se que tratamentos no registro algébrico podem representar obstáculos (Araújo, 2017), mas a ação da sequência didática, aliada ao uso do Geogebra, ajudou os alunos a superarem essas barreiras e a consolidarem sua autonomia.

Ao transitar para atividades mais complexas, como o cálculo do volume do cone, os alunos, conforme ilustrado na tabela 9, demonstraram uma habilidade crescente em aplicar a proporcionalidade entre o volume do cone e o cilindro. Isso corrobora com a análise a *priori*, que também destaca a importância de calcular e interpretar as fórmulas do volume do cone (Pinheiro, 2022), objetivo alcançado por meio da integração entre os registros algébrico e gráfico.

Na atividade contextualizada, o desafio de calcular o volume de um recipiente cônico utilizando o Teorema de Pitágoras revelou a importância da conversão entre registros algébricos e gráficos. Conforme a Hipótese Fundamental de Aprendizagem de Duval (2011), essa conversão é essencial para a construção do conhecimento matemático. Além disso, Rabardel (1995) reforça que essa transição não é apenas mecânica, mas reflete a instrumentação dos conceitos, permitindo que os alunos desenvolvam esquemas cognitivos mais sofisticados e aplicáveis.

Podemos concluir que a análise da atividade, à luz da TRRS de Duval e da teoria instrumental de Rabardel, confirma que o Geogebra desempenha um papel central no desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada, facilitando a transição entre diferentes registros semióticos. Essa dinâmica é fundamental para o aprendizado geométrico, pois possibilita aos alunos a mobilização de diferentes

formas de representação e, assim, a construção de um conhecimento matemático mais robusto e integrado.

Tabela 9 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 6

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P/x	P/x	P	P	P	x
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).										

Fonte: Elaborado pelo autor

Como apontado na análise a *priori*, os desafios no tratamento algébrico e na identificação das representações foram superados gradualmente, à medida que os alunos integraram representações gráficas, visuais e algébricas de maneira significativa. A conversão entre registros foi crucial para a compreensão dos conceitos geométricos, como a área e o volume do cone, destacando a importância de transitar entre diferentes formas de representação para consolidar o aprendizado matemático.

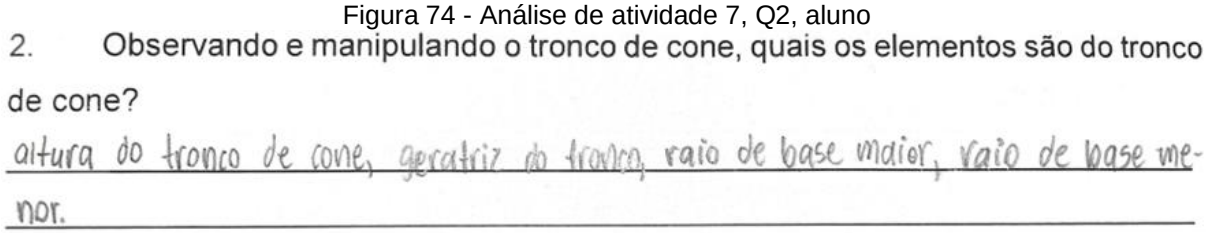
Essa dinâmica evidenciou que o uso do Geogebra não só facilita o aprendizado, mas também contribui para a construção de um conhecimento mais profundo e interligado, alinhado às abordagens teóricas de Duval (1993) e Rabardel (1995). O software, ao permitir manipulações dinâmicas e a visualização de relações geométricas complexas, atua como um mediador que facilita a integração entre o registro visual, gráfico e algébrico, permitindo aos alunos desenvolverem esquemas cognitivos mais refinados. Isso reforça a eficácia do Geogebra como ferramenta de ensino, apoiando a construção de representações matemáticas e ampliando a compreensão dos conceitos de forma abrangente e interligada.

Descrição da atividade 7.

De início, no primeiro momento da atividade, os alunos tiveram acesso a um arquivo do Geogebra que continha o tronco de cone. Eles foram orientados a manipular e identificar no software os elementos do tronco de cone e, em seguida, responder à pergunta sobre quais eram esses elementos. Conforme a figura 75, os alunos não tiveram dificuldade em listar todos os componentes do objeto, como a base maior, a base menor, a altura, a geratriz e a superfície lateral. Essa manipulação inicial, que permitiu o reconhecimento dos componentes do tronco de cone, foi fundamental para estabelecer a base para as etapas seguintes da atividade, possibilitando que os alunos se familiarizassem com as características geométricas

do objeto e, assim, pudessem avançar no desenvolvimento das fórmulas relacionadas.

Figura 74 - Análise de atividade 7, Q2, aluno


2. Observando e manipulando o tronco de cone, quais os elementos são do tronco de cone?

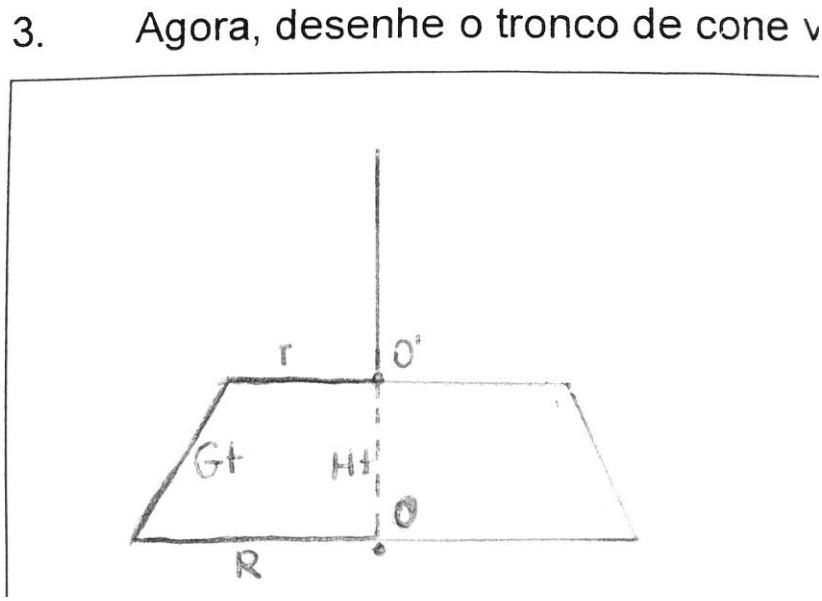
altura do tronco de cone, geratriz do tronco, raio de base maior, raio de base menor.

Fonte: Coleta de dados feita pelo aluno (2024)

Depois, sem o auxílio do Geogebra, foi solicitado que os alunos desenhassem o tronco de cone visto de frente e indicassem no desenho os elementos identificados. A atividade permitiu que os alunos transferissem o conhecimento adquirido no Geogebra para uma representação manual, reforçando a compreensão dos componentes do tronco de cone, como as bases, a altura e a geratriz.

Além disso, essa etapa foi importante para promover a conversão entre registros gráficos, incentivando os alunos a traduzirem a representação dinâmica em uma versão mais estática e precisa, utilizando suas habilidades de observação e interpretação geométrica. Essa transição de registros contribuiu para o aprofundamento do entendimento dos conceitos geométricos envolvidos.

Figura 75 - Análise da atividade 7, Q3, aluno



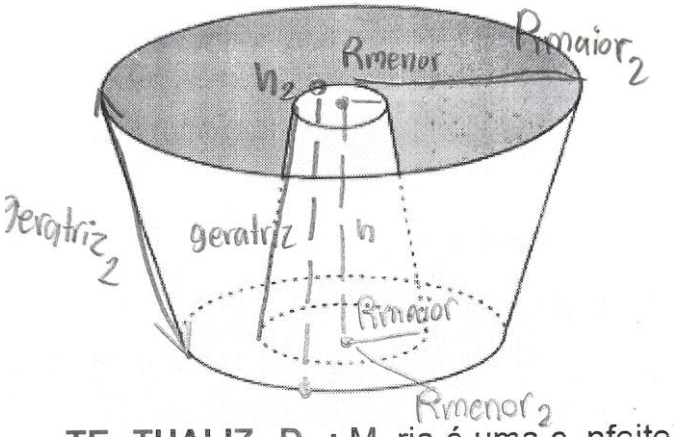
Fonte> Coleta de dados feita pelo aluno (2024)

Conforme mostrado na imagem acima, os alunos realizaram a tarefa sem grandes dificuldades, destacando corretamente a geratriz, a altura, o raio da base maior e o da base menor. Em seguida, na figura 77, representando uma forma de bolo (composta por dois troncos de cone, onde o menor está contido dentro do tronco maior

e a base maior do tronco menor repousa sobre a base menor do tronco maior), os alunos foram solicitados a identificar os elementos de cada tronco de cone.

Essa etapa proporcionou aos alunos a oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos em um novo contexto, exigindo que fizessem a distinção entre os componentes dos dois troncos de cone, o que envolveu uma análise mais detalhada da geometria do objeto composto. A atividade estimulou a conversão entre registros gráficos e visuais, ampliando a compreensão dos alunos sobre os conceitos geométricos e aprimorando sua capacidade de representar e interpretar figuras complexas.

.Figura 76 - Análise da atividade 7, Q4, aluno 2M1



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

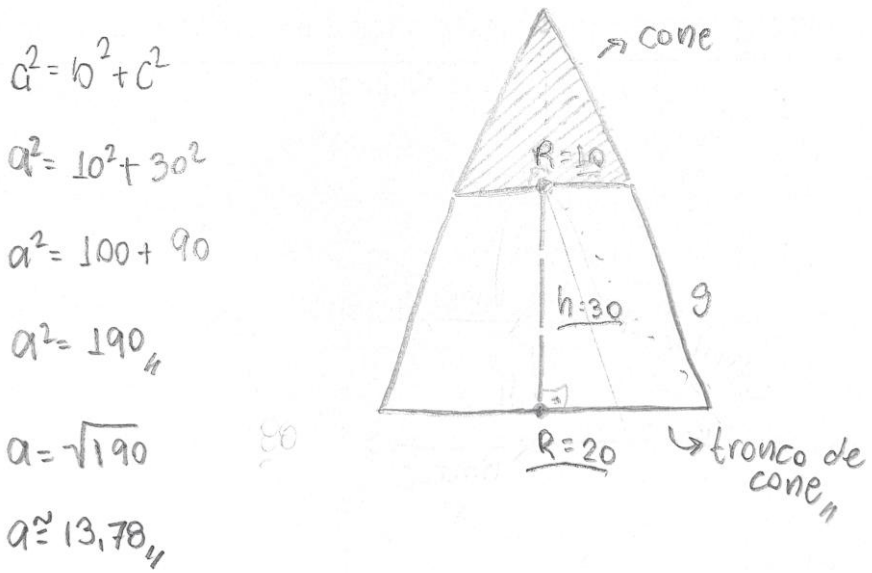
Nesse ponto, os alunos encontraram dificuldades ao tentar identificar o elemento "altura" dos cones. Os alunos 2M1 e 2M3 representaram duas alturas distintas, o que gerou confusão em relação à geometria do objeto. Já os alunos 2M2 e 2M4 não indicaram nenhuma altura no desenho. Em contraste, os alunos do 3º ano do ensino médio conseguiram perceber corretamente que as alturas dos cones eram as mesmas, demonstrando um maior domínio do conceito.

Vale destacar que todos os alunos fizeram questão de diferenciar os raios de cada tronco de cone, utilizando letras distintas para cada elemento e evitando, assim, confusões na representação gráfica. Esse cuidado indica uma compreensão crescente sobre a importância de uma notação precisa e a organização dos componentes geométricos.

Neste contexto, na atividade contextualizada (figura 78), os alunos resolveram um problema prático no qual uma confeiteira precisava fazer um bolo de vulcão, em formato de tronco de cone, e deveriam calcular a geratriz desse tronco. Os alunos desenharam com precisão o tronco de cone e o cone no topo do bolo, aplicando

adequadamente o Teorema de Pitágoras para calcular a geratriz. Esse momento evidenciou a capacidade dos alunos de utilizar conceitos matemáticos para resolver problemas contextualizados, reforçando a integração entre teoria e prática no aprendizado da geometria espacial.

Figura 77 - Análise da atividade 7 contextualizada, aluno 3M3



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

No entanto, três alunos do ensino médio tiveram dificuldade em perceber que era necessário calcular a diferença entre os raios para aplicar o teorema, isto é, identificar o triângulo retângulo no desenho. Nesse ponto, o professor/pesquisador interveio para auxiliá-los a reconhecer o triângulo correto, depois disso os alunos seguiram muito bem o restante da resolução.

Análise da atividade 7.

A atividade inicial evidencia o registro de formação, ou reconhecimento de componentes, conforme a Teoria de Duval (1993). Nesse contexto, os alunos se familiarizam com os elementos da figura por meio da manipulação e da observação no software Geogebra, que serve como suporte para essa interação inicial. Essa dinâmica é reforçada pela perspectiva de Rabardel (1995), segundo a qual o uso instrumental de um artefato tecnológico, como o Geogebra, auxilia no desenvolvimento de esquemas de uso, permitindo que os alunos construam uma base cognitiva sólida para transitar para representações mais complexas.

Esse processo está alinhado com a expectativa delineada na análise a *priori*: espera-se que, com o auxílio do Geogebra, os alunos mobilizem as representações

que conceituam os elementos do tronco de cone por meio dos registros geométrico de posição, simbólico e verbal. Também se prevê, conforme Santos (2021), que os alunos enfrentem dificuldades no reconhecimento dos elementos do tronco de cone, como as bases e a geratriz, especialmente devido à necessidade de visualização e representação precisas.

Após a etapa de manipulação no software, os alunos foram orientados a desenhar o tronco de cone e indicar seus elementos. Sob a perspectiva de Duval (1993), essa etapa corresponde à conversão do registro gráfico (no Geogebra) para o registro visual (desenho manual). Tal transição é fundamental, pois exige que os alunos traduzam o que observaram digitalmente para uma representação estática e manual, demonstrando um entendimento mais consolidado dos componentes geométricos.

Esse movimento também reflete o que Rabardel (1995, p. 72) descreve como uma "mediação pragmática". Ao desenharem o tronco de cone manualmente, os alunos reconstroem o conhecimento de forma independente, transferindo o que foi observado no software para um novo contexto, o que fortalece a compreensão dos elementos geométricos. O sucesso na realização dessa tarefa indica uma compreensão sólida da estrutura do tronco de cone, confirmando a análise a *priori*. Para Duval (1993), essa conversão contribui significativamente para a conceitualização geométrica, pois, ao desenhar o objeto, os alunos consolidam a internalização de suas propriedades e relações espaciais.

Entretanto, quando expostos à figura de um "bolo" formado por dois troncos de cone, os alunos enfrentaram dificuldades adicionais. Reconhecer elementos como a "altura" tornou-se um desafio para alguns, especialmente os do ensino fundamental. Segundo Duval (2012), essa dificuldade reflete um problema de tratamento, ou apreensão operatória, no registro visual. A figura exige um reconhecimento avançado das relações geométricas, como a altura comum entre os troncos de cone, corroborando a análise a *priori* de que identificar elementos como a altura e a geratriz pode ser desafiador, conforme Santos (2021).

Sob a ótica de Rabardel (1995), esse obstáculo demonstra a necessidade de desenvolvimento de novos esquemas de uso do instrumento. Diante de uma figura mais complexa, os alunos precisam articular conhecimentos prévios e adaptar suas estratégias instrumentais para interpretar a representação visual. Esse aspecto também reflete a Hipótese Fundamental de Aprendizagem de Duval (1993), segundo

a qual a conversão entre registros e o tratamento avançado são frequentemente fontes de dificuldade na compreensão de conceitos geométricos. A dificuldade observada em distinguir a altura dos troncos e identificar os elementos específicos de cada um, como os raios, evidencia o desafio de coordenar tratamentos múltiplos dentro do registro gráfico. Nesse ponto, a instrumentalização descrita por Rabardel (1995) é essencial para que os alunos superem tais desafios, mobilizando conscientemente diferentes registros semióticos de maneira integrada.

Posteriormente, na atividade final, os alunos foram desafiados a aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a geratriz do tronco de cone em uma situação prática, envolvendo a confeiteira e o bolo. Essa atividade exigiu a conversão do registro visual (desenho do tronco de cone) para o registro algébrico (uso do teorema). Durante o processo, a identificação do triângulo retângulo no contexto do problema apresentou desafios, especialmente para alguns alunos do ensino médio, que inicialmente não reconheceram a necessidade de subtrair os raios das bases para aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras. Esse aspecto reforça a análise a *priori*, que já apontava que a compreensão geométrica, em particular de conceitos avançados como a geratriz, demanda uma base algébrica e conceitual sólida.

A intervenção do professor/pesquisador mostrou-se fundamental nesse contexto. Ao auxiliar os alunos a converterem o problema visual em uma estrutura algébrica adequada, ele demonstrou como superar os desafios da conversão entre registros de representação. Conforme destacado por Duval (2009), essa capacidade de alternar entre o entendimento geométrico visual e a formulação algébrica é essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático. Atividades desse tipo evidenciam que o domínio da compreensão geométrica envolve a habilidade de realizar transformações e adequações entre diferentes registros, ampliando o repertório cognitivo dos estudantes.

Sob a perspectiva de Rabardel (1995), esse processo ilustra o papel da instrumentação na construção do conhecimento. Ao enfrentar desafios em uma situação prática, os alunos puderam adquirir fluência no uso de diferentes representações, consolidando um aprendizado mais robusto e aplicável. A mediação pedagógica, nesse caso, desempenhou um papel decisivo ao direcionar os alunos para o reconhecimento das relações geométricas e algébricas no problema.

Assim, o panorama geral dessa atividade prática evidencia uma aplicação concreta da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e permite observar os

processos de tratamento e conversão realizados pelos alunos. O Geogebra proporcionou um suporte inicial essencial, enquanto as atividades realizadas sem o software e a aplicação prática do cálculo da geratriz promoveram o desenvolvimento de habilidades mais independentes na representação dos elementos geométricos. A análise revela que, embora os alunos tenham conseguido realizar tratamento e conversão em atividades simples, enfrentaram obstáculos ao lidar com figuras mais complexas e com a aplicação de conceitos algébricos, como o Teorema de Pitágoras, em contextos visuais.

Tabela 10 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 7

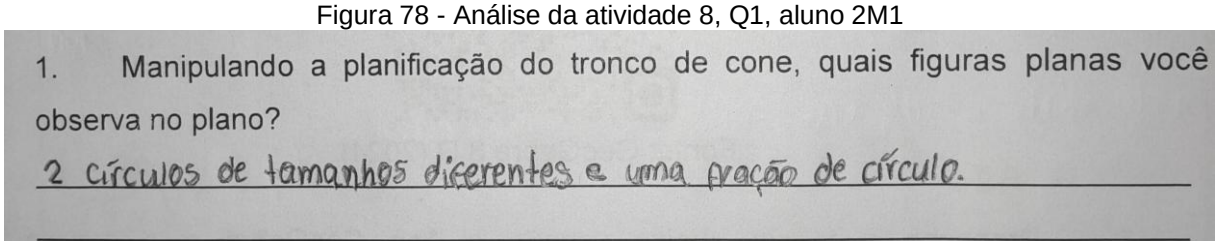
ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P/x	P/x	P	P	P	x
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).										

Fonte: Elaborado pelo autor

Descrição da atividade 8.

A atividade inicial consistiu na disponibilização de um arquivo do Geogebra que apresentava, de forma dinâmica, a planificação de um tronco de cone. Os alunos foram orientados a manipulá-lo para identificar as figuras planas presentes na planificação. Conforme ilustrado na figura 79, o aluno 2M1 respondeu que “tem dois círculos de tamanhos diferentes e uma fração de círculo”. A descrição do aluno está bastante próxima da resposta correta, uma vez que, ao mencionar “fração de círculo”, ele estava se referindo à coroa circular, que corresponde à área lateral do tronco de cone.

Figura 78 - Análise da atividade 8, Q1, aluno 2M1


1. Manipulando a planificação do tronco de cone, quais figuras planas você observa no plano?

2 círculos de tamanhos diferentes e uma fração de círculo.

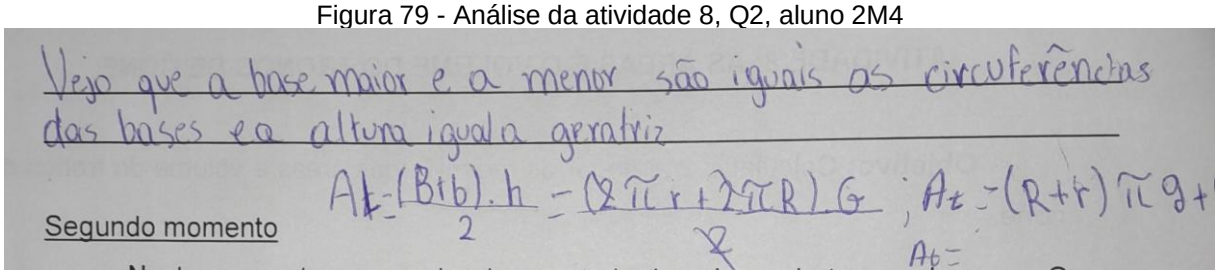
Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Posteriormente, os alunos utilizaram outro arquivo do Geogebra em seus smartphones para explorar a dedução da área lateral do tronco de cone. Eles

manipularam o modelo com o objetivo de responder à pergunta sobre como deduzir a fórmula dessa área.

Após a explicação de que a área lateral do tronco de cone pode ser associada à forma de um trapézio e que, ao desenrolar as circunferências das bases em um segmento de reta, obtém-se um trapézio regular cuja altura corresponde à geratriz do tronco de cone, conforme ilustrado na figura 80, alguns alunos conseguiram formular corretamente a dedução da área lateral e total.

Figura 79 - Análise da atividade 8, Q2, aluno 2M4



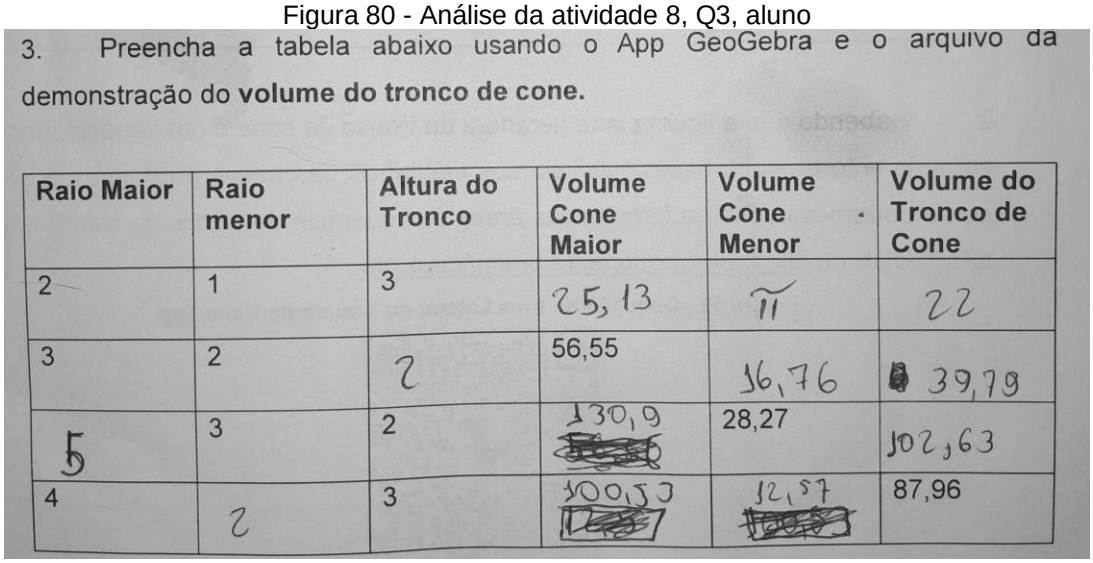
Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Outros alunos, no entanto, encontraram dificuldades durante a dedução da área lateral do tronco de cone, principalmente por não se lembrarem de como calcular a área do trapézio. Felizmente, a própria dinâmica do Geogebra exibia a fórmula do trapézio, o que facilitou o entendimento. Alguns alunos ainda descreveram por escrito como fariam para deduzir a área lateral do tronco de cone, demonstrando um esforço em compreender e registrar o processo.

No segundo momento da atividade, os alunos manipularam outro arquivo do Geogebra, que apresentava a dedução dinâmica do volume do tronco de cone. Esse arquivo também exibia, na tela, a fórmula para o cálculo do volume, auxiliando na compreensão. Em seguida, os alunos preencheram uma tabela (figura 81) utilizando o Geogebra, inserindo dados relacionados a quatro tipos de sólidos: cone menor, cone maior e tronco de cone.

Para isso, precisaram ajustar um controle deslizante no software, a fim de regular os valores dos raios menor e maior, aplicando a fórmula apresentada na tela para obter os resultados desejados.

Figura 80 - Análise da atividade 8, Q3, aluno



3. Preencha a tabela abaixo usando o App GeoGebra e o arquivo da demonstração do **volume do tronco de cone.**

Raio Maior	Raio menor	Altura do Tronco	Volume Cone Maior	Volume Cone Menor	Volume do Tronco de Cone
2	1	3	25,13	π	22
3	2	2	56,55	16,76	39,79
5	3	2	130,9	28,27	102,63
4	2	3	100,53	12,57	87,96

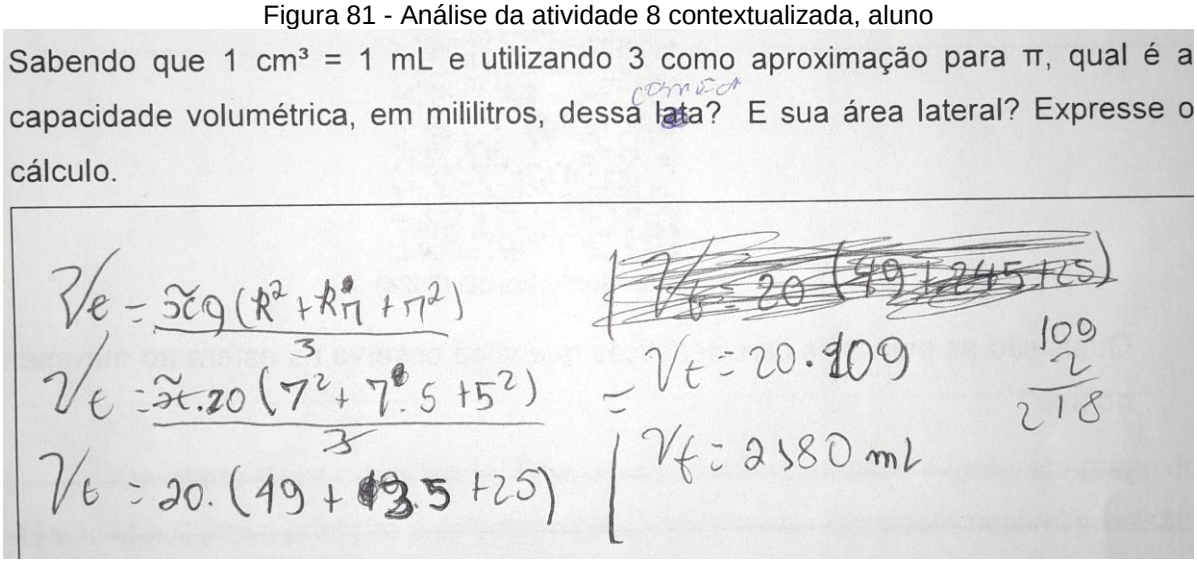
Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

No entanto, uma pequena parte dos alunos compreendeu rapidamente que bastava ajustar os controles deslizantes no Geogebra para obter todos os resultados da tabela, com exceção da última linha. Nesse caso, era necessário aplicar o conceito de que o volume do tronco de cone corresponde à diferença entre o volume do cone maior e o volume do cone menor. Um aluno, em particular, destacou-se por ter chegado rapidamente ao resultado correto, demonstrando compreensão avançada do conceito, enquanto muitos outros ainda enfrentavam dificuldades nessa etapa. Quando o professor e pesquisador perguntou como ele obteve o valor tão rapidamente, ele respondeu: "Vi no Geogebra que o raio da base menor nunca pode ser maior ou igual ao raio da base maior; se isso ocorrer, o objeto não existiria". Assim, ele utilizou o intervalo entre r e R para a existência do tronco de cone e fez substituições por tentativa e erro no Geogebra até alcançar os valores necessários para preencher a tabela.

Além disso, outros alunos enfrentaram dificuldade em associar o conceito de que o volume do tronco de cone é obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior. Alguns optaram por realizar cálculos adicionais para encontrar os valores, enquanto outros utilizaram exclusivamente o Geogebra para solucionar a questão.

Por fim, na atividade contextualizada, apresentada na figura 82, os alunos resolveram uma questão que envolvia uma caneca de chá em formato de tronco de cone. Eles foram desafiados a determinar o volume e a área lateral da caneca, sendo necessário, como primeiro passo, calcular a geratriz do tronco de cone.

Figura 81 - Análise da atividade 8 contextualizada, aluno



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Entretanto, conforme observado na imagem acima, os alunos enfrentaram alguns obstáculos ao calcular a área lateral da caneca. Um dos alunos, por exemplo, utilizou diretamente a altura da caneca, presumindo que ela correspondia à geratriz do tronco de cone, o que resultou em um cálculo incorreto, apesar de sua boa execução nos procedimentos básicos. Por outro lado, outros alunos conseguiram aplicar a fórmula corretamente, obtendo resultados satisfatórios.

Análise da atividade 8.

Inicialmente, os alunos manipularam um modelo dinâmico no Geogebra para explorar a planificação do tronco de cone, identificando figuras planas como os dois círculos e a coroa circular. Conforme a análise a *priori*, esperava-se que os alunos mobilizassem registros semióticos algébricos, gráficos e verbais para compreender os conceitos geométricos envolvidos. De acordo com Duval (1995, 2010), o tratamento no registro visual foi evidente, uma vez que a manipulação da planificação no software exemplificou o tratamento de representações dentro desse registro. Além disso, como previsto, alguns alunos apresentaram dificuldades em visualizar o tronco de cone como parte de um cone maior, um desafio descrito por Santos (2021).

Posteriormente, quando um aluno descreveu a coroa circular como uma "fração de círculo", utilizou uma terminologia não convencional, mas demonstrou uma transição entre os registros visual (observação da figura) e verbal (descrição escrita). Essa observação confirma a expectativa de que a conversão entre registros visual e verbal, destacada por Duval (2012), seria essencial para a compreensão conceitual. A análise a *priori* também indicava que dificuldades com a terminologia poderiam

surgir, o que de fato ocorreu, evidenciando a necessidade de mediação didática para consolidar a compreensão.

Sob outra perspectiva, a abordagem instrumental de Rabardel (1995) destaca que o Geogebra estava consolidado como instrumento nesta etapa da sequência didática. Essa instrumentação transformou o software em um instrumento cognitivo, permitindo que os alunos desenvolvessem esquemas de ação que articularam a manipulação dinâmica das figuras com a verbalização de suas características, conforme observado nas atividades anteriores. Ainda de acordo com a análise a *priori*, o uso de registros pictóricos, aliados ao suporte do software, foi crucial para superar as dificuldades identificadas por Neitzel (2023) em cálculos envolvendo a geratriz, especialmente em contextos que demandavam transições entre registros.

Na etapa seguinte, os alunos deduziram a fórmula da área lateral do tronco de cone, relacionando-a a um trapézio cuja geratriz corresponde à altura. Essa dedução foi mediada pelo Geogebra, que facilitou a conversão entre o registro gráfico da planificação e o algébrico, envolvendo a fórmula. Como previsto na análise a *priori*, a fórmula da área lateral, que depende da soma dos raios das bases, representou um desafio para os alunos sem domínio pleno das relações geométricas, como evidenciado na descrição. Enquanto alguns alunos realizaram a conversão de forma independente, outros precisaram do suporte do Geogebra para superar essas dificuldades, conforme antecipado.

O uso de registros verbais na descrição escrita sobre a dedução da área lateral também evidencia a conversão entre os registros algébrico e verbal. A necessidade de verbalizar o raciocínio auxiliou os alunos a consolidarem sua compreensão sobre o volume do tronco de cone. No entanto, como indicado na análise a *priori*, as dificuldades em associar registros geométricos e algébricos refletem a complexidade dessa conversão.

Na sequência, os alunos deduziram o volume do tronco de cone, utilizando o Geogebra para preencher tabelas e ajustar controles deslizantes que regulavam os raios das bases. Nessa etapa, segundo Duval (2012), ocorreu um tratamento dentro do registro geométrico, caracterizado como uma "apreensão operatória". Contudo, as dificuldades relatadas por alguns alunos em associar os volumes dos cones maior e menor ao volume do tronco de cone confirmaram a expectativa de que essa conversão entre registros visual e algébrico seria um desafio significativo, conforme descrito por Neitzel (2023).

Por fim, na etapa final, onde os alunos aplicaram o que aprenderam para resolver um problema contextualizado envolvendo uma caneca de chá em formato de tronco de cone, desafios e êxitos emergiram. Por exemplo, alguns alunos confundiram a altura da caneca com a geratriz do tronco de cone, o que confirmou as dificuldades antecipadas na análise a *priori*. No entanto, os alunos que calcularam corretamente a geratriz demonstraram domínio na conversão entre os registros visual, algébrico e numérico.

A abordagem instrumental de Rabardel (1995) esclarece que erros como esses são obstáculos naturais no processo de gênese instrumental. A instrumentação bem-sucedida do Geogebra, entretanto, permitiu que a maioria dos alunos superasse essas barreiras, consolidando suas habilidades na transição entre registros e na compreensão das relações geométricas de forma integrada.

Em conclusão, esse ponto da sequência didática ilustra como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval e a Abordagem Instrumental de Rabardel podem ser integradas para analisar o processo de aprendizagem do estudo de corpos redondos. A manipulação dinâmica no Geogebra, conforme indicado na análise a *priori*, foi essencial para que os alunos, como observado na tabela 11, mobilizassem e convertessem registros semióticos, enquanto a mediação do professor foi crucial para superar as dificuldades de visualização e compreensão das relações geométricas.

Finalmente, como previsto, a instrumentação do Geogebra pelos alunos promoveu a construção de esquemas instrumentais que facilitaram a dedução das fórmulas do tronco de cone. No entanto, dificuldades de conversão entre registros, especialmente entre os visuais e algébricos, como observado por Almouloud (2007), reforçam a necessidade de atividades bem planejadas que promovam transições graduais e intencionais, destacando a importância de intervenções pedagógicas estratégicas.

Tabela 11 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 8

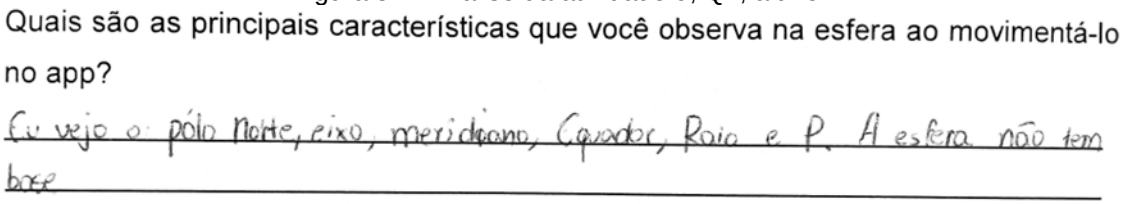
ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P/x	P/x	P	P	P	x
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).										

Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, essas observações corroboram a ideia de que a aprendizagem matemática demanda não apenas o domínio de conceitos isolados, mas também a habilidade de transitar de maneira fluente entre diferentes registros semióticos. Além disso, é fundamental a instrumentalização de ferramentas que ampliem as possibilidades.

Nesta última atividade, intitulada Atividade 9, estudamos a esfera. No início da atividade, os alunos acessaram o Geogebra, onde estava representada a esfera. Eles precisaram manusear e manipular o objeto geométrico no software, explorando suas propriedades. Logo após, conforme apresentado na figura 83, os alunos foram solicitados a especificar as principais características da esfera. Com base na interação com o modelo, os alunos conseguiram, sem dificuldades, identificar corretamente todos os elementos que compõem o objeto estudado, como o centro, o raio e a superfície esférica. Essa atividade permitiu que os alunos consolidassem sua compreensão sobre as propriedades geométricas da esfera, utilizando o Geogebra como ferramenta para a visualização e exploração interativa do conceito.

Figura 82 - Análise da atividade 9, Q1, aluno


Quais são as principais características que você observa na esfera ao movimentá-lo no app?

Eu vejo o pólo Norte, eixo, meridiano, Equador, Raio e P. A esfera não tem base

Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

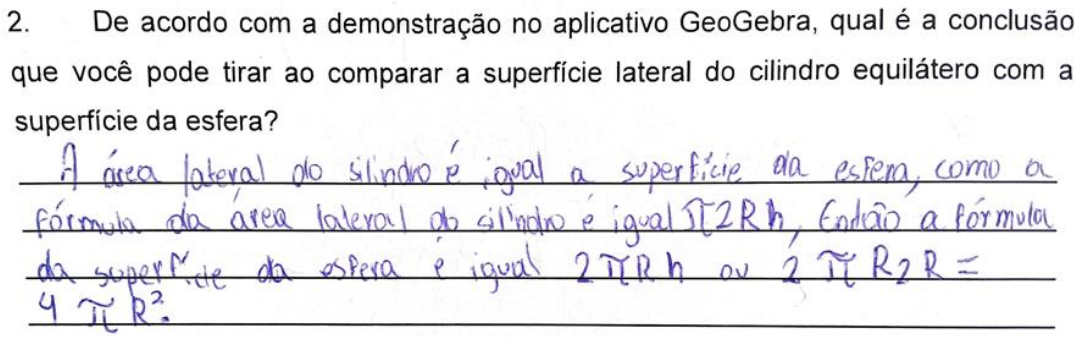
Na etapa seguinte, os alunos acessaram outro arquivo do Geogebra, onde observaram a demonstração dedutiva da superfície da esfera, que está contida dentro de um cilindro equilátero de mesmo raio que a esfera. Após a demonstração e a manipulação do modelo no Geogebra, os alunos foram convidados a concluir suas observações, conforme indicado na figura 84.

Um aluno fez à seguinte conclusão: “Se os raios da esfera e do cilindro forem iguais, suas áreas também serão iguais.” Essa observação reflete uma compreensão inicial de que, ao associar os raios da esfera e do cilindro, ele percebeu uma relação entre suas áreas. Por outro lado, outro aluno respondeu: “A área lateral do cilindro é igual à superfície da esfera.” Essa resposta revela a percepção de que a área da esfera pode ser relacionada à área lateral do cilindro, sugerindo uma aproximação ou a busca por uma correspondência entre essas duas superfícies.

Essas observações demonstram que, ao interagir com o modelo no Geogebra, os alunos começaram a fazer conexões entre os conceitos de área da

esfera e do cilindro, embora algumas conclusões ainda precisassem de mais refinamento. A manipulação visual do software favoreceu o desenvolvimento dessas ideias e mostrou que os alunos estavam no processo de construção de uma compreensão mais aprofundada das relações geométricas entre esses dois sólidos.

Figura 83 - Análise da atividade 9, Q2, aluno


2. De acordo com a demonstração no aplicativo GeoGebra, qual é a conclusão que você pode tirar ao comparar a superfície lateral do cilindro equilátero com a superfície da esfera?

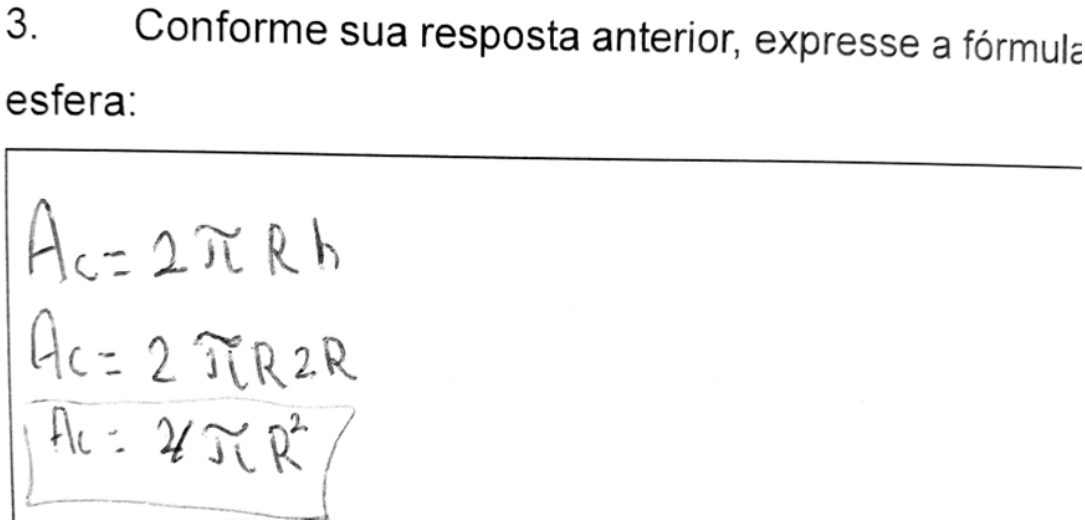
A área lateral do silindro é igual a superfície da esfera, como a fórmula da área lateral do silindro é igual $\pi 2Rh$, Então a fórmula da superf.de da esfera é igual $2\pi Rh$ ou $2\pi R_2 R = 4\pi R^2$.

Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Após a resposta anterior, como ilustrado na figura 85, os alunos foram desafiados a expressar a fórmula que calcula a superfície da esfera, comparando-a com a área lateral do cilindro equilátero. Esse exercício visava reforçar as relações entre os dois objetos geométricos. Observou-se que todos os alunos conseguiram desenvolver a fórmula corretamente, sem grandes dificuldades. Esse resultado foi um avanço significativo em comparação com a atividade do bloco dois, na qual alguns alunos encontraram dificuldades ao trabalhar com as fórmulas da circunferência e da área do círculo.

Esse progresso pode ser atribuído à familiaridade dos alunos com os conceitos anteriores, que agora estavam mais seguros em suas manipulações e compreensões das fórmulas geométricas. Além disso, a interação com o Geogebra, que proporcionou uma visualização dinâmica e uma melhor compreensão das relações entre os sólidos, parece ter desempenhado um papel fundamental no fortalecimento do raciocínio lógico dos alunos. Dessa forma, a atividade não só contribuiu para o domínio das fórmulas, mas também para a consolidação de habilidades importantes, como a capacidade de estabelecer relações e aplicar conceitos geométricos de forma mais fluente.

Figura 84 - Análise da atividade 9, Q3, aluno


3. Conforme sua resposta anterior, expresse a fórmula esfera:

$A_c = 2\pi R h$

$A_c = 2\pi R 2R$

$A_c = 4\pi R^2$

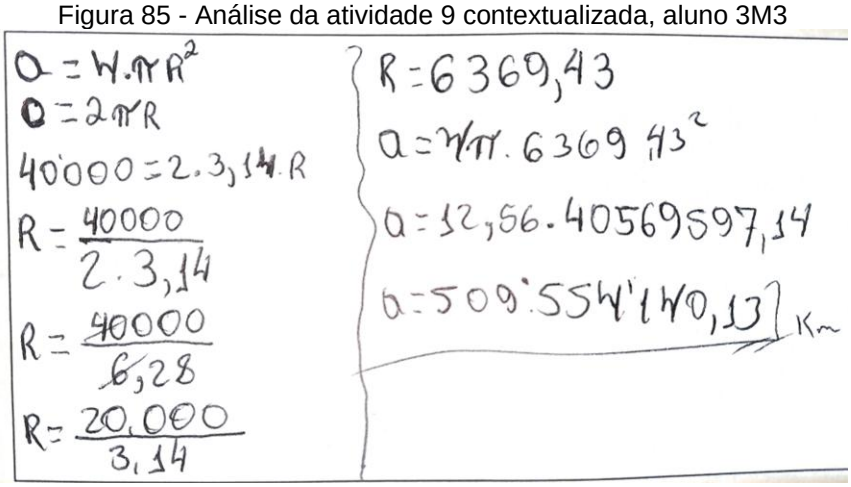
Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Para testar o conhecimento dos alunos, conforme as figuras 86 e 87, foi proposta uma atividade contextualizada sobre o tema abordado, na qual os alunos se colocaram no papel de estudantes de cartografia e utilizaram a mesma técnica de Eratóstenes para calcular o raio e a área da superfície da Terra. Essa atividade exigiu que os alunos aplicassem o conhecimento adquirido sobre fórmulas geométricas, especificamente a fórmula da circunferência do círculo, para determinar o raio da Terra a partir de um método de observação baseado em ângulos e distâncias.

Ao aplicarem corretamente a fórmula da circunferência para calcular o raio, os alunos demonstraram um bom entendimento das relações geométricas envolvidas. Em seguida, utilizaram o valor obtido para determinar a área da superfície da Terra, aplicando a fórmula da área da esfera, o que foi feito com precisão.

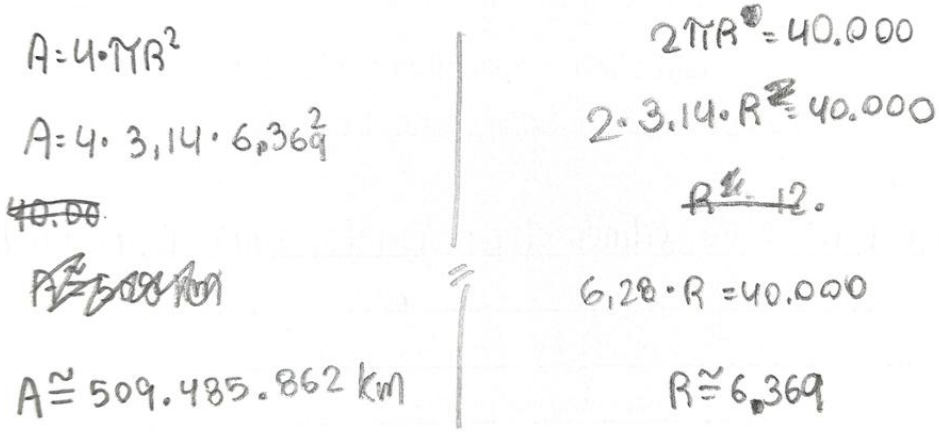
Essa atividade proporcionou uma excelente oportunidade para os alunos integrarem os conceitos aprendidos de maneira prática e contextualizada, além de evidenciar sua capacidade de aplicar fórmulas geométricas em situações do cotidiano. O sucesso na resolução da atividade reforçou a compreensão dos alunos sobre as fórmulas da circunferência e da esfera, destacando a importância de uma abordagem contextualizada no processo de aprendizagem matemática.

Figura 85 - Análise da atividade 9 contextualizada, aluno 3M3



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Figura 86 - Análise da atividade 9 contextualizada, aluno



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

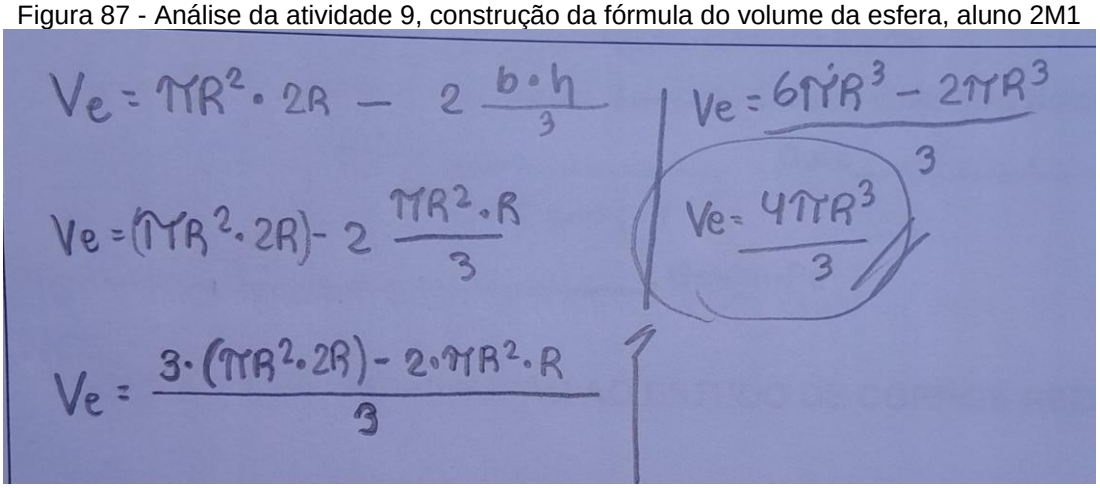
No segundo momento da sequência didática, na atividade 9, os alunos interagiram com a demonstração dinâmica do volume da esfera no Geogebra, revisitando os objetos geométricos estudados nos blocos anteriores, como o cilindro e o cone. Durante a manipulação desses objetos, os alunos foram incentivados a descrever o que observavam, gerando discussões sobre as relações entre eles. Um aluno destacou: “O espaço não ocupado pelos cones é igual ao volume da esfera”, enquanto outro comentou: “As áreas das coroas circulares são iguais nos dois objetos”, referindo-se às coroas circulares formadas pelos cones contidos no cilindro e à esfera contida também dentro de um cilindro.

Essas observações revelaram que os alunos estavam começando a perceber as relações entre os diferentes corpos geométricos, conectando suas propriedades de forma mais profunda. Na questão seguinte, os alunos foram desafiados a esboçar a dedução da fórmula do volume da esfera, contando com o auxílio do Geogebra, que

forneceu uma representação visual que ajudou a iniciar o processo dedutivo. O software facilitou a visualização das relações entre o volume da esfera e os volumes de outros corpos geométricos, como o cilindro e o cone.

Observou-se que, os alunos conseguiram desenvolver a fórmula do volume da esfera de forma satisfatória, mesmo aqueles que haviam enfrentado dificuldades nas atividades anteriores relacionadas ao cálculo da área da base e do volume do cilindro. Isso sugere uma evolução significativa no entendimento dos alunos, que conseguiram aplicar os conceitos de forma mais integrada e eficiente, superando obstáculos anteriores. O uso do Geogebra desempenhou um papel importante nesse processo, fornecendo um ambiente dinâmico e visual que facilitou a construção do raciocínio matemático e a consolidação dos conceitos geométricos.

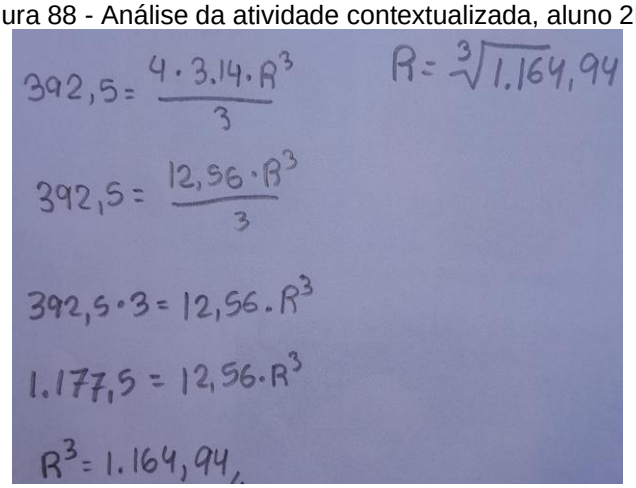
Figura 87 - Análise da atividade 9, construção da fórmula do volume da esfera, aluno 2M1



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Neste contexto, os alunos resolveram a última atividade contextualizada da sequência didática com êxito. Um exemplo claro foi o desempenho de um aluno, que realizou todos os cálculos corretamente e chegou à resposta final da atividade. Esse resultado demonstra que os alunos foram capazes de aplicar com precisão a fórmula do volume da esfera, calculando corretamente o raio e, por conseguinte, solucionando a atividade de maneira eficaz. Esse sucesso final reflete o progresso significativo na compreensão dos conceitos abordados, evidenciando a eficácia da sequência didática em promover a aprendizagem.

Figura 88 - Análise da atividade contextualizada, aluno 2M1



Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

Análise da atividade 9.

Conforme a análise a *priori* desta atividade, o objetivo era que os alunos, com o auxílio do Geogebra, mobilizassem múltiplos registros semióticos — algébrico, geométrico, simbólico e verbal — para compreender os elementos da esfera e deduzir as fórmulas de área e volume. Contudo, foi identificado que os alunos apresentavam dificuldades em associar os registros geométrico e algébrico, conforme apontado por Silva Filho (2015). Na análise a *posteriori*, foi possível verificar que esses objetivos foram atingidos, destacando a complementaridade entre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS) de Duval e a Abordagem Instrumental de Rabardel.

Nesse contexto, o uso do Geogebra foi crucial, pois permitiu que os alunos instrumentalizassem o software como mediador no processo de aprendizagem. Segundo Rabardel (1995), a transformação de um artefato em instrumento ocorre quando os alunos desenvolvem esquemas de ação instrumentalizada, articulando as ações individuais com as funcionalidades da ferramenta.

Assim, na fase inicial, a manipulação tridimensional da esfera no Geogebra proporcionou aos alunos o domínio do registro visual, essencial para a identificação de elementos como raio, centro e superfície. Essa etapa confirmou as expectativas descritas na análise a *priori*, pois, além de tornar a visualização mais clara, também facilitou a compreensão dos aspectos geométricos da esfera. Da mesma forma, a dedução da fórmula do volume da esfera, mediada pelo Geogebra, exemplificou a interação entre os registros visual, verbal e algébrico. Conforme previsto na análise a *priori*, a comparação da esfera com cilindros e cones ajudou os alunos a superarem dificuldades e a internalizar os conceitos. Nesse aspecto, a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995) destaca que o uso eficaz de ferramentas dinâmicas depende da

construção de esquemas de uso, permitindo que as transições entre representações sejam mais fluidas e eficientes.

Na etapa final, a aplicação prática da fórmula do volume consolidou a capacidade dos alunos em mobilizar e coordenar entre registros e resolver problemas complexos. Segundo Rabardel (1995), a instrumentalização bem-sucedida de um artefato, como o Geogebra, promove a transferência de conceitos para novos contextos, consolidando a aprendizagem. Essa etapa confirma que o software, aliado à mediação da sequência didática, não apenas ampliou a compreensão conceitual da esfera, mas também contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático de corpos redondos, tornando-se um elemento essencial no processo de construção do conhecimento.

Em conclusão, a análise a *posteriori* confirma as expectativas delineadas na análise a *priori* para os alunos participantes da atividade 9 da sequência didática, evidenciando a centralidade da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, enriquecida pela Abordagem Instrumental de Rabardel, no ensino da geometria. Nesse cenário, o Geogebra foi mais do que uma ferramenta de suporte; tornou-se um elemento ativo na formação de instrumentos cognitivos. A utilização do software não se limitou a uma simples ilustração de conceitos, mas atuou de forma integrada ao desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Deste modo, essa experiência reforça que a integração entre teoria e prática, mediada pela instrumentalização de artefatos, é fundamental para superar dificuldades de aprendizagem, promover a compreensão conceitual e, principalmente, desenvolver o pensamento matemático, proporcionando aos alunos uma aprendizagem significativa e bem estruturada.

Essa abordagem não só favoreceu a mobilização de múltiplos registros semióticos, mas também proporcionou aos alunos as ferramentas cognitivas necessárias para resolver problemas complexos, aplicando o conhecimento em situações contextualizadas. Com isso, a atividade demonstrou como a combinação de teoria e tecnologia pode ser um caminho eficaz para o ensino da geometria, promovendo a construção de conceitos de maneira interativa, dinâmica e significativa.

Tabela 12 - Análise A *priori*, mobilização na aprendizagem da atividade 9

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO										
Alunos	2M1	2M2	2M3	2M4	2M5	2M6	3M1	3M2	3M3	3M4
Mobilizado	P	P	P	P	P/x	P/x	P	P	P	x

Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x).

Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, realizar pesquisas envolvendo sequências didáticas apresenta diversos desafios que demandam planejamento cuidadoso, resiliência e uma postura reflexiva por parte do professor/pesquisador. O primeiro desafio que encontramos está no planejamento e na elaboração da própria sequência didática, que deve ser adequada ao contexto específico da turma, considerando o perfil sociocultural dos alunos, as diferenças de aprendizagem e os pré-requisitos necessários. Além disso, é desafiador estabelecer objetivos claros que articulem o conteúdo a ser trabalhado com as expectativas de aprendizagem, bem como prever as possíveis dificuldades que os alunos poderão enfrentar, tanto cognitivas quanto técnicas.

Outro desafio significativo é a articulação entre teoria e prática. É necessário embasar a sequência didática em teorias, como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval) ou a Abordagem Instrumental (Rabardel), e garantir que essas teorias sejam aplicadas de forma eficiente na prática. Identificar estratégias pedagógicas que alinhem as teorias à realidade da sala de aula e ao uso de recursos didáticos, como o GeoGebra, também é um ponto crucial.

Durante a execução da sequência didática, surgiram dificuldades como engajar os alunos, especialmente quando eles enfrentam obstáculos na compreensão do conteúdo ou resistências às metodologias propostas. Além disso, o professor/pesquisador pode enfrentar limitações estruturais, como a falta de dispositivos tecnológicos atualizados, infraestrutura inadequada ou acesso precário à internet. Outro aspecto desafiador que enfrentamos foi a gestão do tempo, uma vez que é necessário ajustar a duração das atividades para atender aos objetivos planejados, considerando o ritmo de aprendizagem dos alunos, pois cada um tempo sua característica.

Por sua vez, a coleta e a análise de dados representaram, em um certo momento, uma grande dificuldade quanto ao acesso às escolas. Como professor/pesquisador devemos observar e registrar de forma detalhada as interações, dificuldades e avanços dos alunos durante a aplicação da sequência didática, relacionando os resultados obtidos às expectativas de aprendizagem. Além disso, é preciso organizar e interpretar os dados de maneira objetiva, reconhecendo a subjetividade e a complexidade envolvidas nos processos de ensino-aprendizagem.

Após a execução, a validação e a revisão da sequência didática também trazem desafios. É necessário avaliar a eficácia das práticas aplicadas, verificando se os objetivos foram atingidos e, caso contrário, identificar os motivos. Essa etapa requer revisões constantes, adaptando a sequência didática com base nos resultados obtidos e nas dificuldades observadas, o que pode ser um processo longo e iterativo.

Outro grande desafio é conciliar a pesquisa com outras responsabilidades docentes, como o planejamento de aulas regulares, correção de avaliações e participação em atividades escolares. Essa sobrecarga pode impactar a gestão do tempo e a saúde emocional do professor/pesquisador, que também enfrenta pressões para publicar os resultados e, ao mesmo tempo, realizar um trabalho significativo na prática pedagógica.

Além disso, há desafios éticos a serem enfrentados, como garantir o consentimento de alunos e responsáveis para a participação na pesquisa, proteger a privacidade dos envolvidos e assegurar que a sequência didática não prejudique o aprendizado ou crie desigualdades na sala de aula. .

Esses desafios evidenciam a complexidade do papel do professor/pesquisador, que precisa equilibrar as dimensões do ensino, da pesquisa e do aprendizado dos alunos, ao mesmo tempo em que busca contribuir para o avanço educacional e científico. Diante dessas dificuldades, podemos demonstrar o sucesso desta sequência didática na tabela 13.

Tabela 13 – Resultado das mobilizações observadas na Análise a *Posteriori* em cada atividade.

ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO									
Atividade /Aluno	AT.1	AT.2	AT.3	AT.4	AT.5	AT.6	AT.7	AT.8	AT.9
2M1	P	P	P	P	P	P	P	P	P
2M2	P	P	P	P	P	P	P	P	P
2M3	P	P	P	P	P	P	P	P	P
2M4	P	P	P	P	P	P	P	P	P
2M5	P	P	P/x	P/x	x	x	x	x	x
2M6	P	P	P/x	P/x	x	x	x	x	x
3M1	P	P	P	P	P	P	P	P	P
3M2	P	P	P	P	P	P	P	P	P
3M3	P	P	P	P	P	P	P	P	P
3M4	P	P	P/x	P/x	x	x	x	x	x
Legendas: aluno que mobilizaram conceitos (P), Alunos presentes que não mobilizaram (P/x); aluno ausente (x)									

Fonte: Coleta de dados feita pelo autor (2024)

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo geral desenvolver uma sequência didática voltada para o ensino de corpos redondos com o auxílio do software Geogebra. Ao longo das atividades realizadas, foi possível explorar diferentes representações geométricas de cilindros, cones, troncos de cone e esferas, utilizando a abordagem instrumental proposta por Rabardel (1995) e a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1993, 2012). A sequência didática planejada e aplicada proporcionou aos alunos uma interação dinâmica entre os diversos registros semióticos, como o geométrico, o algébrico e o gráfico, favorecendo a compreensão dos conceitos e propriedades desses objetos tridimensionais.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, na fase de análise prévia, exploramos o panorama de pesquisas sobre o estudo de corpos redondos no ensino médio, bem como os referenciais teóricos de Rabardel (1995) e Duval (1993), já mencionados, e a Engenharia Didática de Artigue (1988). Na fase de análise prévia, os levantamentos de pesquisas revelaram que muitos alunos enfrentam dificuldades iniciais com conceitos de geometria espacial, especialmente com sólidos de revolução, devido a lacunas deixadas em etapas anteriores de estudo. Essas lacunas podem dificultar a visualização e a compreensão dos conceitos tridimensionais. Essa fase corrobora com o nosso primeiro objetivo específico: identificar as principais dificuldades que os alunos do ensino médio enfrentam ao aprender os conceitos e propriedades dos corpos redondos.

Nesse contexto, além do objetivo geral, temos os objetivos específicos deste estudo, que buscam investigar o impacto do uso de uma sequência didática apoiada pelo software GeoGebra no ensino de corpos redondos para alunos do ensino médio. A partir da questão norteadora desta pesquisa – qual é o impacto do uso de uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra na potencialização do aprendizado sobre corpos redondos? – a sequência didática demonstrou, conforme os resultados da fase de experimentação (Tabela 13) e da análise a *posteriori*, que proporcionou a muitos alunos participantes (P) a mobilização de diferentes registros de representação semiótica (geométrico, gráfico, verbal, algébrico e pictórico), conforme descrito por Duval (1993), evidenciando o nosso segundo objetivo específico: investigar a internalização de conceitos geométricos de corpos redondos

por meio da mobilização, coordenação e conversão de registros semióticos por alunos do ensino médio.

Neste contexto, as atividades promovidas não apenas possibilitaram o tratamento e a conversão entre diferentes registros semióticos, mas também contribuíram para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda dos sólidos geométricos, por meio da exploração dinâmica e visual proporcionada pelo Geogebra. A manipulação de modelos tridimensionais e a visualização em tempo real das alterações nas variáveis geométricas foram elementos chave que permitiram aos alunos não apenas compreender, mas também internalizar as propriedades dos corpos redondos de forma mais concreta e interativa.

Sob outra perspectiva, em relação ao primeiro objetivo específico, evidenciamos as dificuldades enfrentadas tanto na análise a *priori* quanto na experimentação da sequência didática. No entanto, essas dificuldades não impediram o progresso dos alunos, que, com o suporte da ferramenta tecnológica e intervenções didáticas estratégicas, conseguiram superar as limitações iniciais. A instrumentação do Geogebra foi essencial, pois não se limitou a representar os corpos redondos, mas também facilitou a transição entre os diferentes registros semióticos, promovendo a construção de uma compreensão mais aprofundada das propriedades geométricas desses objetos.

As principais dificuldades previstas na análise a *priori*, como a confusão entre altura e geratriz, a interpretação de perspectivas geométricas e a aplicação correta das fórmulas de área e volume de cada corpo redondo, foram de fato enfrentadas pelos alunos. No entanto, essas dificuldades foram gradualmente mitigadas por meio de intervenções didáticas focadas e pela interação prática com o Geogebra. Além disso, as limitações relacionadas ao conhecimento prévio de alguns alunos, como dificuldades no cálculo de áreas de figuras planas, confirmaram lacunas no aprendizado anterior, reforçando a necessidade de uma abordagem integrada e contínua no ensino de geometria para evitar a evasão desses alunos, o que foi eficazmente superado na nossa sequência didática.

Ademais, o estudo também revelou que o Geogebra atuou como um potencializador da aprendizagem colaborativa e reflexiva sobre os corpos redondos. A capacidade de manipular modelos tridimensionais e observar as transformações geométricas em tempo real contribuiu significativamente para o engajamento dos alunos, promovendo a construção de significados mais sólidos. Nesse contexto, o

software foi instrumentalizado de forma eficaz, transformando-se de um simples artefato em um verdadeiro instrumento pedagógico, como sugerido por Rabardel (1995), e validando a abordagem teórica adotada.

Por fim, conclui-se que a sequência didática mediada pelo Geogebra potencializou a aprendizagem sobre corpos redondos ao promover a articulação entre os registros de representação semiótica, facilitar a visualização e a compreensão dos conceitos espaciais e estimular o raciocínio matemático dos alunos. Essa experiência reforça a relevância de integrar tecnologias digitais no ensino da matemática, especialmente em conteúdos que exigem habilidades de visualização e manipulação tridimensional, como é o caso da geometria dos corpos redondos. As contribuições deste trabalho não só orientam futuras práticas pedagógicas, mas também servem como base para pesquisas sobre o uso de tecnologias educacionais na formação matemática dos estudantes.

Portanto, este estudo não apenas contribuiu para a elaboração de uma sequência didática eficaz no ensino de corpos redondos, mas também proporcionou uma análise detalhada das dificuldades que os alunos enfrentam nesse processo. As reflexões geradas por meio dessa investigação podem orientar futuras intervenções pedagógicas e servir de base para novos estudos, destacando o potencial do Geogebra. A construção de cada objeto na sequência didática revelou-se fundamental para a superação de obstáculos no aprendizado da geometria e para a construção de um conhecimento matemático mais significativo e dinâmico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; ALENCAR, Sergio Vicente. A Gênese Instrumental na interação com o geogebra: uma proposta para a formação continuada de professores de matemática. **Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, agosto, p. 349-365, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300002. Acesso em: 08 ago. 2023.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática Matemática**. Curitiba. Ed UFPR, 2007. 218 p.

ARAÚJO, Ciandra Augusta de. **A utilização de softwares educativos e métodos de ensino no estudo de poliedros e corpos redondos**. 2017. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças - Mt, 2017. Disponível em: https://ri.ufmt.br/bitstream/1/3734/1/DISS_2017_Ciandra%20Augusta%20de%20Ara%c3%bajo.pdf. Acesso em: 25 jan. 2024.

ARAUJO, Davi Pereira Fortes. **VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO NO ENSINO MÉDIO**: uma abordagem dinâmica e intuitiva a partir das ideias do cálculo. 2015. 200 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal Fluminense, Niterói-Rj, 2015. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3440051. Acesso em; 25 jan. 2024.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactiqu. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308, 1998.

BARBOSA, João P. V.; VAZ, Arnaldo M. Análise microgenética de processos de aprendizagem na pesquisa em educação em ciências. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, [S.l.], v. 18, n. 3, p. 458-477, nov. 2019. ISSN 1579-1513. Disponível em: <http://revistas.educacioneditora.net/index.php/REEC/article/view/344>. Acessado em: 15 ago. 2023.

BRASIL. **Guia dos livros didáticos**: PNLD 2021. Brasília: Secretaria da Básica. 2021.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC. Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**: matemática- ensino médio-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEM, 1998.

BITTAR, Marilena. Uma Proposta Para O Estudo Da Integração Da Tecnologia Na Prática Pedagógica De Professores De Matemática. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Universidade Federal de Pernambuco -UFPE, v.6, n. 3, nov. 2015. Disponível em:

https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/2252. Acesso em: 02 jan. 2024.

CABRAL, N. F. **O papel das interações professor-aluno na construção da solução lógico-aritmética otimizada de um jogo com regras**. 2004. 151 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) -UFPA. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1760/1/Dissertacao_PapelInteracoesProfessoraluno.pdf>. Acesso em: 5 de agosto de 2023.

CABRAL, N. F.; CHAQUIAM, M.; POCK, M. A.; DIAS, G. N.; PINTO, G. P. UARC: Um Organizador de Sequência Didática na Área de Matemática / UARC: A Didactic Sequence Organizer in Mathematics. **Brazilian Journal of Development**, [S. l.], v. 6, n. 6, p. 34191–34208, 2020. DOI: 10.34117/bjdv6n6-098. Disponível em: https://brazilianjournals.com/ojs/index.php/BRJD/article/view/11121. Acesso em: 2 jan. 2024.

DUVAL, R. **Registre de représentation sémiotique et focionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, 1993. Disponível em: https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf. Acesso em: 23 ago. 2023.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, Papirus editora, 2003.

_____. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução: Moretti, M. T. Revista Eletrônica de Educação Matemática. UFSC, Florianópolis (SC), v.7, n.2, p.266-297, dezembro, 2012. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso: 15 de agosto de 2023.

_____. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.

_____. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

_____. **Ver e ensinar matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica. São Paulo, Editora PROEM, 2011.

HELLMANN, Miriam de Lima**. GeogebraBook para o ensino de Corpos Redondos e Esfera**. 2021. 31 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado de Mato Grosso, Barra do Bugres - MT, 2021. Disponível em:https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=11525248#. Acesso em: 25 fev. 2024.

HENRIQUES, Afonso. Abordagem Instrumental e aplicações. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.23, n. 3, p.247-280, 2021. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p247-280. Acesso em: 21 jan. 2024.

LANGWINSKI, Luani Griggio. **O ENSINO DE ÁLGEBRA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**: um olhar para a prática dos professores do 8º ano do ensino fundamental. 2018. 129 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2018. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/3688. Acesso em: 23 nov. 2023.

LEONARDO, Fábio Martins de (org.). **Conexões, Matemática e suas tecnologias**: geometria plana e espacial. São Paulo: Moderna, 2020. 6 v. Disponível em: https://pnld.moderna.com.br/ensino-medio/obras-didaticas/area-de-conhecimento/matematica/conexoes. Acesso em: 01 dez. 2024

LIMA, Israel Costa. **O ensino de inequações trigonométricas por atividade**. 145 f. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

MADEIRA, Lilian de Lima. **SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO**: uma proposta de estudo. 2014. 76 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - MG, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/830. Acesso em: 30 mar. 2024.

MATOS, André Luiz Goulart. **Aplicações dos teoremas de pappus - guldin no ensino médio**: corpos redondos. 2018. 75 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande - MS, 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6503531. Acesso em: 26 fev. 2024.

Muniz, Wallace do Carmo. **O ensino de medidas de variação com uso de planilha eletrônica**. 2022. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

NADALON, Dionatan de Oliveira. **Sólidos e superfícies de revolução com auxílio do software geogebra**. 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria - RS, 2018. Disponível em: http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/592. Acesso em: 25 fev. 2024.

NEITZEL, Gustavo Stênio Magnago. **EXPERIMENTAÇÃO, TECNOLOGIAS DIGITAIS E O TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN**: uma proposta pedagógica para o ensino de sólidos de revolução. 2023. 175 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari -Univates, Lajeado - Rs, 2023. Disponível em:

https://www.univates.br/bduserver/api/core/bitstreams/b2e68ee1-d515-435c-8fe4-d858a78b5700/contente. Acesso em: 25 fev. 2024.

OLIVEIRA, Patrícia Benevides de. Tecnologias no Ensino da Matemática: mapeamento de laboratórios de informática nas escolas públicas no sul da Bahia e usos efetivos. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XVII EBRAPEM., 2014, Recife. **Anais**. Recife (PE): Universidade Federal de Pernambuco, 2014. p.1-13.

PEYREROL, Marc Santos. **Uma Sequência Didática para o Ensino da Parábola**. 2021. 175 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

PINHEIRO, Ana Lúcia Vaghetti. **ESTUDO DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM ÊNFASE NOS CORPOS REDONDOS**: concepções e práxis de uma sequência didática à luz da teoria de Guy Brousseau. 2022. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Universidade Federal de Santa Maria (UFS, RS), Santa Maria, 2022. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/24401. Acesso em: 25 fev. 2024.

PINHEIRO, Tassia C. S. **Análise de registros de representação semiótica em uma atividade matemática com ribeirinhos muanenses**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015. Disponível em: https://propesp.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/dissertacoes/09/tassia_cristina_da_silva_pinheiro.pdf. Acesso em: 06 ago. 2023.

RABARDEL, Pierre. Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, pp.239, 1995.

SANCHEZ, Jéssica Barbosa dos Passos. **Mapeamento da Pesquisa Acadêmica Brasileira sobre Geometria Espacial: Período de 2007 a 2017.** Orientador: Saddo Ag Amouloud. 2018. 101f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciência Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/21655. Acesso em: 06 jan. 2024.

SANTIAGO, Thiago Lopes Nascimento. **O ENSINO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**: um estudo utilizando a modelagem matemática. 2018. 69 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5947088. Acesso em: 25 jan. 2024.

SANTOS, Nailys Melo Sena. **PRAXEOLOGIA PARA ENSINAR SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**: o caso de uma bolsista residente do curso licenciatura em matemática da UFS. 2021. 143 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, O Caso de Uma Bolsista Residente do Curso Licenciatura em

Matemática da UFS, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, 2021. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/14389/3/NAILYS_MELO_SENA_SANTOS.pdf. 25 jan. 2024.

SILVA FILHO, Gilberto Beserra da. **GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO:** uma abordagem concreta. 2015. 175 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências e Educação Matemática., Programa de Pós-Graduação em Ensino Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba (Uepb), Campina Grande - Pb, 2015. Disponível em: https://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/download/disserta%C3%A7%C3%B5es/mestrado_acad%C3%AAmico/2015_5/DISSERTACAO-GILBERTO-BESERRA-DA-SILVA-FILHO.pdf. Acesso em: 25 jan. 2024.

SILVA, Haroldo de Oliveira e. **O ensino de sólidos de revolução com auxílio do superlogo 3.0**. 2017. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4997695. Acesso em: 25 fev. 2024.

SIQUEIRA, Arielly Cecília Lima. **O ensino de expressões numéricas por atividades experimentais**. 2022. 184 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022.

SOUZA, Tiago de Castro. **O TEOREMA DE PAPPUS GULDIN E O PRINCÍPIO DE CAVALIERI**: uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio. 2021. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2021. Disponível em: https://portais.univasf.edu.br/profmat/tiago_de_castro_souza_turma_2019.pdf. Acesso em: 25 fev.2024.

VALLETTA, Débora Vaga. **A CONVERGÊNCIA ENTRE A UBIQUIDADE NA EDUCAÇÃO E A GÊNESE INSTRUMENTAL**: a instrumentação e instrumentalização ubíqua. 2020. 293 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pósgraduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/219246. Acesso em: 30 mar. 2024

APÊNDICE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado aluno (a), você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada “O ENSINO DE CORPOS REDONDOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA”, sob a responsabilidade dos pesquisadores: professor Dr. Fábio José da Costa Alves, orientador, e orientando Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior, vinculados a Universidade do Estado do Pará (UEPA). Nesta pesquisa nós estamos buscando realizar com alunos, do ensino médio, uma Sequência Didática sobre o assunto de “CORPOS REDONDOS” a partir de atividades contextualizadas e com auxílio do software Geogebra. Aluno, a sua colaboração na pesquisa será preencher as atividades com as perguntas direta e indiretas sobre cada objeto matemático, onde cada bloco de atividade terão objetivos específicos. Em nenhum momento você será identificado ou seus dados pessoais serão coletados e divulgados. Somente os resultados desta pesquisa que serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Você não terá gastos ou ganho financeiro por participar na pesquisa. Não há riscos. Os benefícios serão de natureza acadêmica com a análise dos resultados do estudo obtidos sobre o “ENSINO DE CORPOS REDONDOS” e posteriormente a divulgação de um produto educacional de livre acesso. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você e com seu responsável, caso seja menor de 18 anos. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: orientador Fábio José da Costa Alves e orientando Fernando Augusto Cunha Cordeiro Junior, por meio da Coordenação do PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA (PPGEM) do

Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém, Pará- CEP: 66113-010; fone: 4009-9542.

Belém (PA), _____de___ _____de 2024.

_____

Assinatura do pesquisador

Eu,_____
aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

_____

Participante da pesquisa

_____

Responsável do participante da pesquisa

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem